المؤسسة : متقن سرار عبد الحميد – زغاية | العام الدراسي : 2019/2018
المستوى : 3 علوم تجريبية | مدة الانجاز : 2 ساعة

الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

ملاحظة : اختر التمرين الأول (A) أو التمرين الأول (B) .... التمرين الثاني والثالث اجباريين .

التمرين الأول : (A) (06,5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3u_n}{u_n+2}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+2}$

2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\prec u_n\leq 4$

ب – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-u_n)}{u_n+2}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج - بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم عين نهايتها .

3) أ – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-1=\frac{2(u_n-1)}{u_n+2}$

ب – استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-1\leq\frac{2}{3}(u_n-1)$

ج - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0\prec u_n-1\prec 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الأول : (B) (06,5 نقاط)

- اختر الإجابة الصحيحة من بين الأجوبة المقترحة في كل مما يلي مع **التبرير**

	①	②	③
حلول المعادلة $z^2-2z+4=0$	$S=\{1+i\ ;\ 1-i\}$	$S=\varnothing$	$S=\{1-i\sqrt{3}\ ;\ 1+i\sqrt{3}\}$
الشكل الأسي للعدد المركب $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$	$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z=-2e^{i\frac{\pi}{3}}$	$z=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-2$. ABC هو مثلث :	قائم في A	قائم في A ومتساوي الساقين	متقايس الأضلاع .
مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب حيث $\lvert z-z_A\rvert=\lvert i(z-z_B)\rvert$ هي	المستقيم (AB) ماعدا النقطة B	نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ ماعدا B	محور القطعة $[AB]$
$ABCD$ متوازي أضلاع . إذا كان $\lvert z_C-z_A\rvert=\lvert z_D-z_B\rvert$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ فإن الرباعي $ABCD$ هو :	معين	مربع	مستطيل

التمرين الثاني: (06,5 نقاط)

يحتوي كيس على **(4)** كريات بيضاء مرقمة ب 1 ؛ 1 ؛ 2 ؛ 1- و **(4)** كريات حمراء مرقمة ب 1 ؛ 1 ؛2 ؛ 2 ؛ 1- و **(4)** كريات خضراء مرقمة ب 1 ؛ 2 ؛ 1- ؛ 1- . كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد و نعتبر الأحداث التالية :

- A " الحصول على الألوان الثلاثة "
- B " الحصول على نفس الرقم "

1) ماهو عدد السحبات الممكنة ؟

2) أ – احسب كل من $P(A)$ و $P(B)$ ثم بين أن : $P(A\cap B)=\dfrac{6}{220}$.

ب - هل الحدثان A و B مستقلان ؟ برر إجابتك .

ج - استنتج كل من $P_A(B)$ و $P_B(A)$.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لثلاث كريات عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس .

- عرف قانون الاحتمال للمتغير X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=]0,5\ ;\ +\infty[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب كل من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0.5} f(x)$.

2) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0,6\ ;\ 0,8[$

4) عيّن فاصلة النقطة من (C_f) والتي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

5) أ - أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ب - استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية $\ln$ ثم ارسم (C) و (C_f) .

بالتوفيق في البكالوريا

تصحيح الاختبار الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (A)

(u_n) معرفة ب $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n+2}$

1) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+2}$

بعد توحيد المقامات والمطابقة بين عبارتي u_{n+1} نجد : $\boxed{a = 3 \text{ ؛ } b = -6}$ ومنه $u_{n+1} = 3 - \frac{6}{u_n+2}$

2) أ - برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \prec u_n \leq 4$

نضع : $1 \prec u_n \leq 4 ....p(n)$

- **نبرهن صحة $p(0)$:**

لدينا $1 \prec u_0 = 4 \leq 4$ ومنه $p(0)$ صحيحة ....(1)

- **نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة :**

لدينا $1 \prec u_n \leq 4$ ومنه $3 \prec u_n + 2 \leq 6$ ومنه $\frac{1}{6} \prec \frac{1}{u_n+2} \leq \frac{1}{3}$ ومنه

$(-6)\left(\frac{1}{6}\right) \leq \frac{-6}{u_n+2} \prec (-6)\left(\frac{1}{3}\right)$ ومنه $-2+3 \prec \frac{-6}{u_n+2} + 3 \leq -1+3$

ومنه $1 \prec u_{n+1} \leq 2$ ومنه $1 \prec u_{n+1} \leq 4$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة .....(2)

من (1) و(2) نستنتج أن $p(n)$ صحيحة .

ب – إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+2}$ ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n+2} - u_n = \frac{3u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2}$$

$$= \frac{u_n - u_n^2}{u_n+2} = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+2}$$

ومنه $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+2}$

إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $(1-u_n)$ وبما أن $(1-u_n) \prec 0$ فإن $u_{n+1} - u_n \prec 0$ ومنه (u_n) متناقصة .

ج - إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم تعيين نهايتها:

نتيجة: (u_n) متناقصة ومحدودة من أسفل ($u_n \succ 1$) فهي متقاربة .

حساب نهاية المتتالية (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإنه يوجد عدد حقيقي l بحيث $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

ومنه $l = \frac{3l}{l+2}$ تكافيء $l^2 - l = 0$ تكافيء $l(l-1) = 0$ منه $l = 1$ ؛ $l = 0$ (مرفوض)

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

3) أ – إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 2}$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n+2} - 1 = \frac{3u_n - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

ب – استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_n - 1)$

لدينا $u_n \succ 1$ ومنه $u_n + 2 \succ 3$ ومنه $\frac{1}{u_n+2} \prec \frac{1}{3}$ ومنه $\frac{2}{u_n+2} \prec \frac{2}{3}$ وبضرب الطرفين في $(u_n - 1)$ نجد

ومنه $\frac{2(u_n-1)}{u_n+2} \leq \frac{2}{3}(u_n - 1)$ تكافيء $u_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_n - 1)$

ج - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $0 \prec u_n - 1 \prec 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **ثم استنتاج نهاية المتتالية** (u_n) .

لدينا $u_n \succ 1$ ومنه $u_n - 1 \succ 0$ ....**(1)**

ولدينا $u_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_n - 1)$ ومنه

$$\begin{cases} u_n - 1 \leq \frac{2}{3}(u_{n-1} - 1) \\ u_{n-1} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_{n-2} - 1) \\ u_{n-2} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_{n-3} - 1) \\ u_{n-3} - 1 \leq \frac{2}{3}(u_{n-4} - 1) \\ . \\ . \\ u_1 - 1 \leq \frac{2}{3}(u_0 - 1) \end{cases}$$

وبالضرب طرف لطرف نجد

$$\underbrace{(u_n-1)\times\cancel{(u_{n-1}-1)}\times\cancel{(u_{n-2}-1)}\times\cancel{(u_{n-3}-1)}\times\ldots\times(u_1-1)}$$

$$\le$$

$$\overbrace{\frac{2}{3}\cancel{(u_{n-1}-1)}\times\frac{2}{3}\cancel{(u_{n-2}-1)}\times\frac{2}{3}\cancel{(u_{n-3}-1)}\times\ldots\ldots\times\frac{2}{3}(u_0-1)}$$

ومنه $(4-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n \ge (u_n-1)$ وعليه نجد $(u_n-1)\le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(2)**.....

من (1) و(2) نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n . $0\prec u_n-1\prec 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

● **استنتاج** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ **:**

لدينا $0\prec u_n-1\prec 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ و بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0$

ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1}$

التمرين الأول (B)

● **حلول المعادلة** $z^2-2z+4=0$ **هي** : $S=\left\{1-i\sqrt{3}\ ;\ 1+i\sqrt{3}\right\}$ (الجواب 3)

التبرير :

$\Delta=-12$ ؛ $\sqrt{\Delta}=2i\sqrt{3}$ ؛ $z_1=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ ؛ $z_2=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$

● **الشكل الأسي للعدد المركب** $z=-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **هو** : $z=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

التبرير :

$$|z|=\left|-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right|=2\times1=2$$ (خواص الطويلة)

$$\arg(z)=\arg\left[-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]=\arg(-2)+\arg\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\pi+\frac{\pi}{3}$$ (خواص العمدة)

$$=\frac{4\pi}{3}$$

● $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-2$.

المثلث ABC **هو مثلث** : متقايس الأضلاع (الجواب 3)

التبرير : $|z_B-z_A|=|z_C-z_A|=|z_C-z_B|=2\sqrt{3}$

● مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب حيث $|z-z_A|=|i(z-z_B)|$ هي: محور القطعة $[AB]$ (الجواب ③)

التبرير :

$|z-z_A|=|i(z-z_B)|$ تكافيء $|z-z_A|=|z-z_B|$ تكافيء $MA=MB$

● $ABCD$ متوازي أضلاع إذا كان $|z_C-z_A|=|z_D-z_B|$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ فإن الرباعي $ABCD$ هو : مربع (الجواب ②)

التبرير : $AC=BD$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ معناه : القطران متقايسان ومتعامدان

التمرين الثاني

1) عدد السحبات الممكنة :

عدد السحبات الممكنة : $C_{12}^3=220$

2) أ – حساب كل من $P(A)$ و $P(B)$ ثم تبيان أن : $P(A\cap B)=\dfrac{6}{220}$

● حساب $P(A)$:

$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_4^1\times C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{64}{220}=\boxed{\frac{16}{55}}$$

● حساب $P(B)$:

$$P(B)=\frac{C_4^3+C_4^3+C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{12}{220}=\boxed{\frac{3}{55}}$$

● تبيان أن : $P(A\cap B)=\dfrac{6}{220}$

$$P(A\cap B)=\frac{(C_2^1\times C_1^1\times C_1^1)+(C_1^1\times C_2^1\times C_1^1)+(C_1^1\times C_1^1\times C_2^1)}{C_{12}^3}=\boxed{\frac{3}{110}}$$

ب - هل الحادثتان A و B مستقلتان مع التبرير ؟.

الحادثتان A و B غير مستقلتان لأن : $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

ج - استنتاج كل من $P_A(B)$ و $P_B(A)$:

● $$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{3}{110}\times\frac{55}{16}=\boxed{\frac{3}{32}}$$

● $$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{110}\times\frac{55}{3}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لثلاث كريات عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس .

● تعريف قانون الاحتمال للمتغير X ثم حساب أمله الرياضياتي $E(X)$:

X_i	1	2	3	4
$P(X_i)$	$P(X=1)=\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{4}{220}$	$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_8^1}{C_{12}^3}=\frac{48}{220}$	$P(X=3)=\frac{C_4^1\times C_8^2}{C_{12}^3}=\frac{112}{220}$	$P(X=4)=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{56}{220}$

حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$

$$E(X)=\sum_{i=0}^{i=3} X_i\times P(X_i)$$
$$=\left(1\times\frac{4}{220}\right)+\left(2\times\frac{48}{220}\right)+\left(3\times\frac{112}{220}\right)+\left(4\times\frac{56}{220}\right)$$
$$=\frac{4+96+336+224}{220}$$
$$\boxed{E(X)=3}$$

التمرين الثالث

الدالة f المعرفة على المجال $I=\left]0,5\ ;\ +\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$

6) حساب كل من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0.5} f(x)$:

● $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1+\ln(2x-1)=+\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$)

● $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)=1+\ln(2x-1)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}\frac{1}{2}}(2x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$)

7) إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم تشكيل جدول تغيراتها:

f تقبل الاشتقاق على I ومن أجل كل x من I فإن : $f'(x)=\frac{(2x-1)'}{2x-1}=\frac{2}{2x-1}$

$f'(x)\succ 0$ ومنه فإن الدالة f متزايدة تماما على I .

جدول تغيرات f :

x	$0,5$	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

8) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0,6\ ;\ 0,8[$

- f مستمرة على $]0,6\ ;\ 0,8[$.
- f رتيبة (متزايدة تماما) على $]0,6\ ;\ 0,8[$.
- $f(0,6)\times f(0,8)\prec 0$ ($f(0,6)=-0,6$ ؛ $f(0,8)=0,48$) .
- ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0,6\ ;\ 0,8[$.

9) تعيّين فاصلة النقطة من (C_f) والتي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$:

المماس عند فاصلة هذه النقطة موازي للمستقيم (d) معناه المماس والمستقيم (d) لهما نفس معامل التوجيه ومنه : $f'(x_0)=1$

تكافئي $\frac{2}{2x_0-1}=1$ تكافئي $2x_0-1=2$ ومنه : $\boxed{x_0=\frac{3}{2}}$

أ - اثبات أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

لدينا $f(x)=1+\ln(2x-1)$ تكافئي $f(x)=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ تكافئي $f(x)=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$

وبالمطابقة نجد : $\boxed{a=\frac{-1}{2}\ ;\ b=1+\ln 2}$

ب - استنتاج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة $\ln$ ثم انشاء (C) و (C_f) :

لدينا $f(x)=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln 2$

ومنه (C_f) **هو صورة منحنى الدالة** $\ln$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$.

إنشاء (C) و (C_f) :