ثانوية الشهيد بن قرون احمد-بن سرور-مسيلة-

المستوى:3 ثانوي علوم تجريبية	السنة الدراسية:2019/2018	المادة:رياضيات	المدة:3ساعات ونصف

اختبار البكالوريا التجريبية

اختر احد الموضوعين:

الموضوع الاول

التمرين الاول(5نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين .نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 (علما ان الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1) احسب احتمالات الاحداث الاتية :

A : "سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء" B:سحب ثلاث كرات من نفس اللون " C : "سحب كرة بيضاء واحدة على الاقل"

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الالوان المحصل عليها .

- عين قيم المتغير العشوائي X
- بين ان $p\left(X=3\right)=\dfrac{24}{84}$ ثم استنتج $p\left(X=2\right)$ ، ثم عين قانون احتمال X.

ب) اللاعب يدفع 50DA قبل اجراء السحب ،ويكسب 25DA لكل لون من الالوان المحصل عليها .

- هل اللعبة مربحة له؟

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاويين وكرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_2 .

- احسب احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاويين علما ان الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون .

التمرين الثاني:(4نقاط)

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة بـ $u_0=3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n^{\,2}}{2}}$

1) احسب الحدود $u_1;u_2;u_3$ ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $\left(u_n\right)$.
2) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \succ 1$.
3) بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة معينا نهايتها .
4) نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=u_n^{\,2}-1$.

أ) –بين أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

ب) اكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n ثم احسب $\lim u_n$.

ت) احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية : $S_n=u_0^{\,2}+u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+...+u_n^{\,2}$ ، $T_n=v_0+2v_1+2^2v_2+....+2^nv_n$

$$L_n=\ln\left(v_0\right)+\ln\left(v_1\right)+\ln\left(v_2\right)+....+\ln\left(v_n\right)$$

التمرين الثالث:(4نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة ،المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)\left(z-2i\right)=0$

2) نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط $A;B;C;D$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$. ، $z_D=-z_A$

أ)اكتب كل من الاعداد $z_D;z_C;z_B;z_A$ على الشكل الاسي

ب)استنتج ان النقط $D;C;B;A$ تنتمي لنفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها ثم علم بدقة النقط السابقة.

3)بين أن $\left(\frac{z_D}{2}\right)^{2019}=-i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب .

4) عين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول O الى A ويحول C الى D ، ثم عين عناصره المميزة .

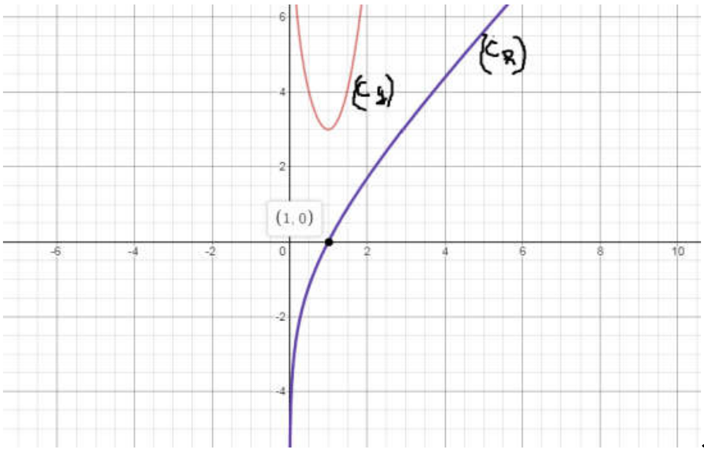
5) أ)عين ثم انشئ (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق $\arg\left(\frac{z}{z-2i}\right)=2\pi k;k\in\mathbb{Z}$

ب)عين ثم انشئ مجموعة النقط (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S.

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g و h الدالتان العدديتان المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$ و $h(x)=x-1+\ln x$

(C_g) و (C_h) تمثيلهما البياني الظاهر في الشكل المقابل



1) عين بيانيا اشارة $g(x)$ و $h(x)$ حسب قيم x.

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$ ، (C_f) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) احسب $\lim_{x\to 0^{>}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا . ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ).

3) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;0)$.

5) ارسم كل من (Δ)،(T) والمنحنى (C_f).

6) لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ: $y=mx-m$ حيث m وسيط حقيقي

أ) تحقق ان جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

ب) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان.

III. 1) باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$.

2)احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$.(يطلب اعطاء القيمة المظبوطة)

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الاول(5نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=2x-x^2$

1) أ) بين ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) بين انه من اجل كل عددحقيقي x من المجال $[0;1]$ فان $f(x)$ من المجال $[0;1]$

2) -لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{3}{7}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$.

ب) بين ان (u_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=1-u_n$.

أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n^{\,2}$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=v_0^{\,2^n}$

ت) استنتج بدلالة n عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب p_n بدلالة n ، حيث : $p_n=(1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)....(1-u_n)$

التمرين الثاني:(4نقاط)

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $D;C;B;A$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1+i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-3+i$. ، $z_D=1+5i$

1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C ،عين z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h .

2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عين z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب .

ب) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

3) أ)اكتب العدد المركب $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}$ على الشكل الاسي .

ب)استنتج نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي يحول E الى I ويحول D الى A

4) K نقطة من المستوي تحقق : $z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}(z_I-z_A)$.

اثبت ان K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له .

5)أ-عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z-1-5i=\frac{4}{\overline{z}-1+5i}$

ب-عين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S وعين عناصرها المميزة .

التمرين الثالث:(4نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\ (t\in\mathbb{R})\\z=1-t\end{cases} \quad و \quad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\y=-1-t'\ (t'\in\mathbb{R})\\z=4+2t'\end{cases}$$

1)أ) عين احداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1)و (Δ_2)

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P)المعين بالمستقيمين (Δ_1)و (Δ_2)

2)أ)اثبت ان النقطة $A\,(6;4;4)$ لاتنتمي الى المستوي (P)

ب)بين ان النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

3)أ)عين معادلة ديكارتيه للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}\,(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

ب)عين احداثيات Cو D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب .

4)أ)عين طبيعة المثلث BCD ،ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

ب)استنتج مساحة المثلث ACD

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14 \prec \alpha \prec 1.15$.

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x.

II. لتكن الدالة العددية fالمعرفة على $\mathbb{R}$بـ: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$، (C_f)التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج-بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

د-بين أن $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

2) أ-اثبت ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)معادلته : $y=2x-1$

ب-ادرس الوضع النسبي للمحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

ج-بين ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب اعطاء معادلة ديكارتية له .

ب-احسب $f(0)$، $f(2)$ ثم ارسم (Δ)، (T) و (C_f).

3) عين بيانا قيم الوسيط الحقيقي mحتى تقبل المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي xالتالية حلين متمايزين :

$(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$

III. أ)عين باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الاصلية H للدالة $h: x\mapsto (x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0.

ب)ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda \succ 1$ ، $A(\lambda)$مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=1;x=\lambda$

- احسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

انتهى

موفقون باذن الله

ثانوية الشهيد بن قرون احمد-بن سرور-مسيلة-

المستوى:3 ثانوي علوم تجريبية	السنة الدراسية:2019/2018	المادة:رياضيات	الاستاذ:زاوي شعيب

الاجابة النموذجية لاختبار البكالوريا التجريبية

الموضوع الاول

التمرين الاول(5نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين .نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق U_1 (علما ان الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1) حساب احتمالات الاحداث الاتية :

A : "سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء" B:سحب ثلاث كرات من نفس اللون " C : "سحب كرة بيضاء واحدة على الاقل"

$$p(A)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}=\frac{1}{14};p(B)=\frac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\frac{5}{84};p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{37}{42}$$

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الالوان المحصل عليها

- **تعيين قيم المتغير العشوائي X**
- القيم هي $\{1,2,3\}$
- **تبيين ان $p(X=3)=\frac{24}{84}$ ثم استنتج $p(X=2)$ ، ثم تعيين قانون احتمال X.**

$$p(X=3)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$$

استنتاج $p(X=2)$:

لدينا $p(X=1)=p(B)=\frac{5}{84}$ و $p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=1$ اذن :

$$p(X=2)=1-p(X=1)-p(X=3)$$

أي : $p(X=2)=1-\frac{5}{84}-\frac{24}{84}=1-\frac{29}{84}=\frac{55}{84}$

قانون ا حتمال X:

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

ب) اللاعب يدفع 50DA قبل اجراء السحب ،ويكسب 25DA لكل لون من الالوان المحصل عليها .

- **هل اللعبة مربحة له؟**
- قيم الربح الجبري المكنة هي $\{25-50,50-50,75-50\}$ أي $\{-25,0,25\}$ اذن:

الربح	-25	0	25

الاحتمال	$\frac{5}{84}$	$\frac{55}{84}$	$\frac{24}{84}$

وبالتالي: $E(X)=-25\times\frac{5}{84}+0\times\frac{55}{84}+25\times\frac{24}{84}=\frac{475}{84}\succ 0$ اذن اللعبة في مصلحة اللاعب

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاويين وكرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_2 .

- **حساب احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاويين علما ان الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون :**

نسمي D الحادثة :" الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاويين علما ان الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون "

و E الحادثة:" الكرتان المسحوبتان م ن U_2 بيضاويين"وبالتالي:

$$p(D)=p_B(E)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{C_3^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{C_4^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_5^2}{C_6^2}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}$$

التمرين الثاني:(4نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=3$ ومن اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$

1) **حساب الحدود $u_1;u_2;u_3$ ثم اعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).**

$$u_1=\sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}}=\sqrt{5},u_2=\sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}}=\sqrt{3},u_3=\sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}}=\sqrt{2}$$

التخمين: (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

2) **بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n\succ 1$.**

البرهان بالتراجع الخاصية :"من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n\succ 1$."

- الخاصية صحيحة من اجل $n=0$ لان $u_0=3\succ 1$
- نفرض ان $u_n\succ 1$ من اجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت ان $u_{n+1}\succ 1$

لدينا $u_n\succ 1$ معناه $u_n^2\succ 1$ أي $u_n^2+1\succ 2$ وبالتالي $\frac{u_n^2+1}{2}\succ 1$ اذن: $u_{n+1}\succ 1$

- اذن من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n\succ 1$.

3) **بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ثم استنتج أنها متقاربة معينا نهايتها .**

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}-u_n=\frac{\sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{2}}-u_n=\frac{\sqrt{1+u_n^2}-\sqrt{2}u_n}{\sqrt{2}}=\frac{1+u_n^2-2u_n^2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+u_n^2}+\sqrt{2}u_n\right)}=\frac{1-u_n^2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+u_n^2}+\sqrt{2}u_n\right)}$$

وبما ان $u_n\succ 1$ فان $\sqrt{2}\left(\sqrt{1+u_n^2}+\sqrt{2}u_n\right)\succ 0$ و $1-u_n^2\prec 0$ وبالتالي $u_{n+1}-u_n\prec 0$ أي ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما

استنتاج التقارب:

بما ان (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل ($u_n\succ 1$ على $\mathbb{N}$) فهي متقاربة .

تعيين نهاية (u_n):

نضع $\lim u_n=l$ من العلاقة التراجعية نجد $l=\sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ أي $l^2=\frac{1+l^2}{2}$ وبالتالي: $2l^2=1+l^2$

اذن $l^2=1$ أي $l=1$ او $l=-1$ وبما ان $u_n\succ 1$ فان $l=-1$ مرفوضة وبالتالي $\lim u_n=1$.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n^2 - 1$.

أ) –اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول

$v_0 = u_0^2 - 1 = 8$

ب) اكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n ثم احسب $\lim u_n$.

- $v_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $u_n^2 = v_n + 1$ أي $u_n = \sqrt{v_n + 1}$ وبالتالي $u_n = \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

- $\lim u_n = \lim \sqrt{8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \sqrt{1} = 1$ لان $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ أي $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ت) احسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية : $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ ، $T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^nv_n$

$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = 8\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^nv_n = 8 + 2\times 8\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2^2\times 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + 2^n\times 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 8 + 8 + 8 + \dots + 8 = 8(n+1)$$

$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$

المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ حدها العام $\ln(v_n)$ حيث

$$\ln(v_n) = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \ln 8 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln 8 + n\ln\frac{1}{2} = \ln 8 - n\ln 2$$

هي متتالية حسابية حدها الاول $\ln 8$ واساسها $-\ln 2$ اذن:

$$L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n) = \frac{(\ln(v_0) + \ln(v_n))(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(\ln 8 + \ln 8 - n\ln 2)(n+1)}{2} = \frac{(2\ln 8 - n\ln 2)(n+1)}{2}$$

التمرين الثالث:(4نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الاعداد المركبة، المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z - 2i) = 0$

$S = \{2i, \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i\}$

2) نعتبر في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $A;B;C;D$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2i$ ، $z_D = -z_A$

أ)كتابة كل من الاعداد $z_A ; z_B ; z_C ; z_D$ على الشكل الاسي:

$$z_A = \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i} \text{ ، } z_B = \overline{z_A} = \overline{2e^{\frac{\pi}{6}i}} = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} \text{ ، } z_C = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i} \text{ ، } z_D = -z_A = -2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2e^{\pi i}.e^{\frac{\pi}{6}i} = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

ب)استنتاج ان النقط $A ; B ; C ; D$ تنتمي لنفس الدائرة التي يطلب تعيين مركزها وطول نصف قطرها ثم تعليم بدقة النقط السابقة.

لدينا $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = 2$ اذن $OA = OB = OC = OD = 2$ وبالتالي النقط A, B, C, D تنتمي للدائرة التي مركزها O وطول نصف قطرها 2

3)بين أن $\left(\frac{z_D}{2}\right)^{2019} = -i$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب.

$$\left(\frac{z_D}{2}\right)^{2019} = \left(\frac{2e^{\frac{7\pi}{6}i}}{2}\right)^{2019} = \left(e^{\frac{7\pi}{6}i}\right)^{2019} = e^{\frac{2019\times 7\pi}{6}i} = e^{\frac{14133\pi}{6}i} = e^{\frac{14130\pi+3\pi}{6}i} = e^{2355\pi i}.e^{\frac{\pi}{2}i} = -i$$

قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب:

لدينا $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n} = \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{6}i}}{2}\right)^{n} = e^{\frac{n\pi}{6}i}$ اذن $\left(\frac{z_A}{2}\right)^{n}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي سالب معناه $\frac{n\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k ; k \in \mathbb{N}$

أي $n = 9 + 12k ; k \in \mathbb{N}$

4) تعيين العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول O الى A ويحول C الى D :

لدينا $\begin{cases} S(O) = A \\ S(C) = D \end{cases}$ اذن: $\begin{cases} z_A = az_O + b ...(1) \\ z_D = az_C + b ...(2) \end{cases}$ وبالتالي من (1) نجد ان $b = z_A = \sqrt{3}+i$

ومن (2) نجد $a = \frac{z_D - b}{z_C} = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ وبالتالي العبارة المركبة لـ للتشابه S هي

$$z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \sqrt{3} + i$$

5) أ)تعين ثم انشاء (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق $\arg\left(\frac{z}{z-2i}\right) = 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$

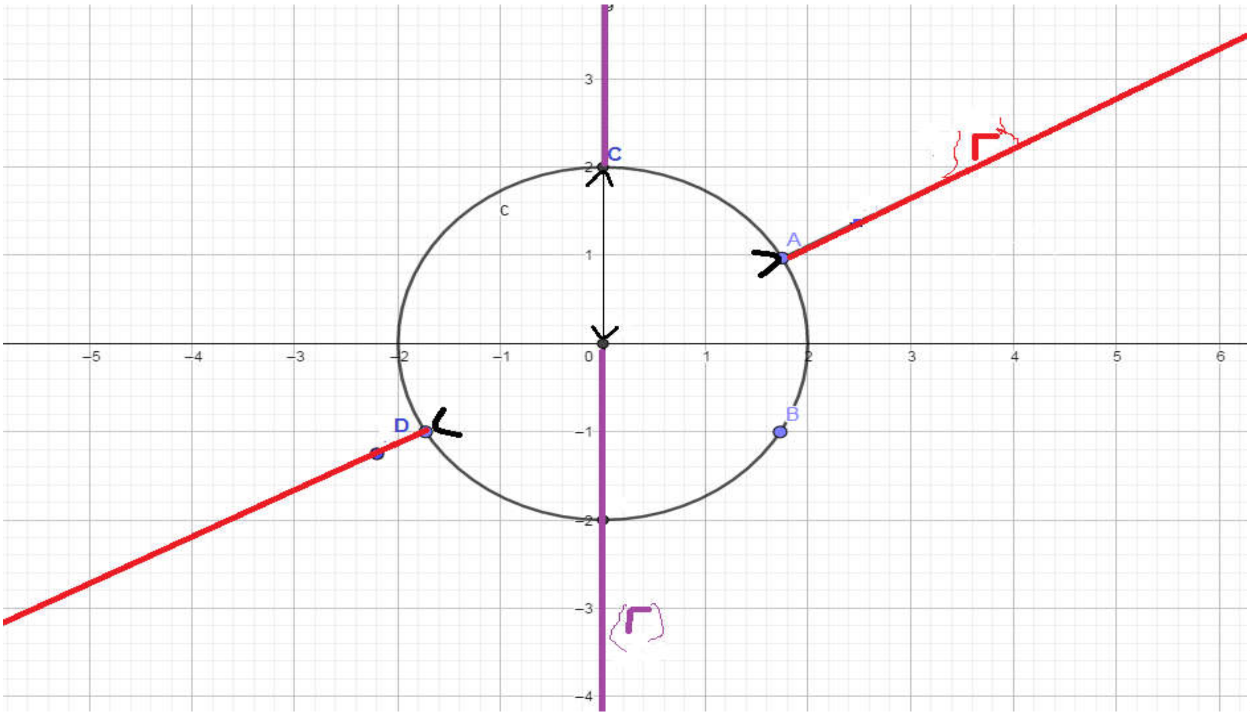
$\arg\left(\frac{z}{z-2i}\right) = 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$ معناه $\arg\left(\frac{z - z_O}{z - z_C}\right) = 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$ أي: $\left(\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{OM}\right) = 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي

(Γ) هي المستقيم (OC) ماعدا القطعة $[OC]$.

ب)عين ثم انشئ مجموعة النقط (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S.

(Γ') هي المستقيم $(S(O)S(C))$ ماعدا القطعة $[S(O)S(C)]$ أي ان (Γ') هي المستقيم (AD) ماعدا القطعة $[AD]$ لان

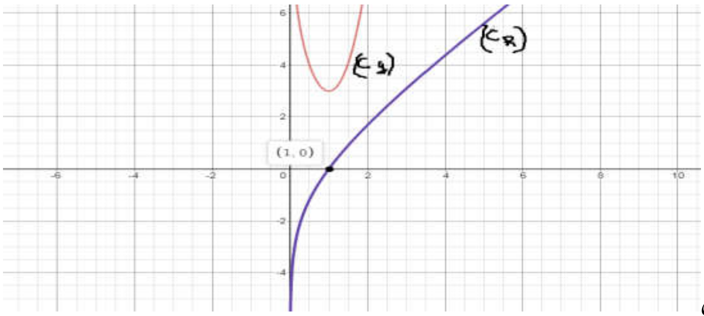
$$\begin{cases} S(O) = A \\ S(C) = D \end{cases}$$



الانشاء:

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g و h الدالتان العدديتان المعرفتان على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$ و $h(x)=x-1+\ln x$



(C_g) و (C_h) تمثيلهما البياني الظاهر في الشكل المقابل

1) تعيين بيانيا اشارة $g(x)$ و $h(x)$ حسب قيم x.

$g(x)\succ 0$ على $]0;+\infty[$ ،

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	|	-	0	+	

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$ ، (C_f) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا . ثم حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

- $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\left(x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=-\infty$ لان $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\ln x=-\infty$
- التفسير: $x=0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$

2) بيان ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f)، ثم تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ):

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - y) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$ اذن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ولدينا $f(x) - y = \frac{h(x)}{x^2}$ اذن اشارة الفرق من اشارة $h(x)$ أي :

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y$	||	-	0	+	
الوضع النسبي	||	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

3) بيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

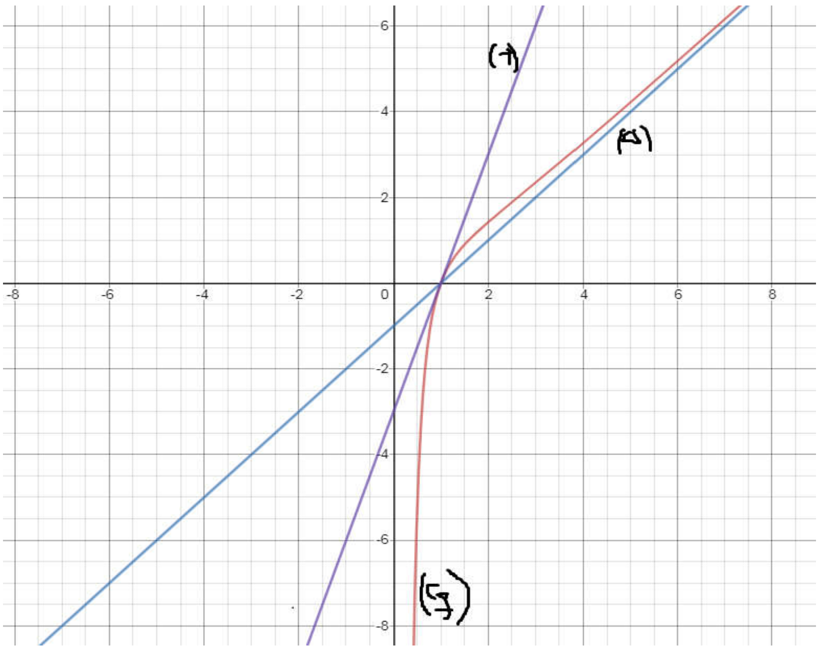
جدول تغيرات f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$+\infty$

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(1;0)$.

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3x - 3$$

5) رسم كل من (Δ)، (T) والمنحنى (C_f).



6) لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx - m$ حيث m وسيط حقيقي

أ) التحقق ان جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

لدينا $y=m.1-m=0$ اذن جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A.

ب) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان.

القيم المطلوبة هي $1\prec m\prec 3$

III. 1) باستعمال التكامل بالتجزئة بيان أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$.

$$\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{-1}{x}\end{cases}$$ اذن : $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e-\frac{1}{x^2}=-\frac{\ln e}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1=1-\frac{2}{e}$

2) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و (Δ) والمستقيمين الذين معادلتهما $x=1$ و $x=e$.(يطلب اعطاء القيمة المظبوطة)

$$s=\int_1^e(f(x)-y)dx=\int_1^e\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$s=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^e+1-\frac{2}{e}=\left(1-\frac{1}{e}\right)u.a=\left(1-\frac{1}{e}\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|=2\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^2$$

الموضوع الثاني

التمرين الاول(5نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=2x-x^2$

1) أ) بيان ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $[0;1]$ ولدينا : $f'(x)=2-2x$ وبما ان $x\in[0;1]$ فان $f'(x)\geq 0$ أي ان f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$

ت) بين انه من اجل كل عددحقيقي x من المجال $[0;1]$ فان $f(x)$ من المجال $[0;1]$

$x\in[0;1]\Rightarrow f(x)\in[f(0);f(1)]$ (لان f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$) وبالتالي $f(x)\in[0;1]$

2) - لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=\frac{3}{7}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

البرهان بالتراجع الخاصية :"من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$ ".

- الخاصية صحيحة من اجل $n=0$ لان $0\prec u_0=\frac{3}{7}\prec 1$
- نفرض ان $0\prec u_n\prec 1$ من اجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت ان $0\prec u_{n+1}\prec 1$

لدينا $0\prec u_n\prec 1$ اذن $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$ أي $0\prec u_{n+1}\prec 1$

اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

ب) بين ان (u_n) متزايدة ثم استنتج انها متقاربة.

لدينا $u_{n+1}-u_n=2u_n-u_n{}^2-u_n=u_n-u_n{}^2=u_n(1-u_n)$ وبما ان $0\prec u_n\prec 1$ فان $u_n(1-u_n)\succ 0$

أي $u_{n+1}-u_n\succ 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة

وبما ان (u_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى ($u_n\prec 1$ على $\mathbb{N}$) فهي متقاربة.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=1-u_n$.

أ) بيان انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n{}^2$

لدينا $v_n=1-u_n$ اذن $v_{n+1}=1-u_{n+1}$ أي $v_{n+1}=1-2u_n+u_n{}^2$ أي $v_{n+1}=(1-u_n)^2=v_n{}^2$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0^{2^n}$

$$v_0 = 1 - u_0 = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

البرهان بالتراجع الخاصية :"من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$ ".

- الخاصية صحيحة من اجل $n = 0$ لان $v_0 = \frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^0}$
- نفرض ان $v_n = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$ من اجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت ان $v_{n+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^{n+1}}$

لدينا $v_{n+1} = v_n^2$ اذن $v_{n+1} = \left(\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times 2^n} = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^{n+1}}$

اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$.

ت) استنتاج بدلالة n عبارة u_n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

- لدينا $v_n = 1 - u_n$ اذن $u_n = 1 - v_n$ وبالتالي $u_n = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\frac{4}{7}\right)^{2^n}\right) = 1$ (لان $-1 \prec \frac{4}{7} \prec 1$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n} = 0$)

4) احسب p_n بدلالة n ، حيث : $p_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)....(1-u_n)$

لدينا $p_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)....(1-u_n)$ معناه $p_n = v_0 \times v_1 \times v_2 .... \times v_n$

اذن $\ln p_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + ... + \ln v_n$

ولدينا $\ln v_n = \ln\left(\frac{4}{7}\right)^{2^n} = 2^n \ln\left(\frac{4}{7}\right)$ أي ان المتتالية $(\ln v_n)$ هي متتالية هندسية اساسها 2

وبالتالي: $\ln p_n = \ln v_0 . \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)$ أي $\ln p_n = \ln\frac{4}{7}.\left(2^{n+1}-1\right)$ أي $p_n = \left(\frac{4}{7}\right)^{2^{n+1}-1}$

التمرين الثاني:(4نقاط)

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط $A;B;C;D$ التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1+i$ ، $z_B = -1+3i$ ، $z_C = -3+i$. ، $z_D = 1+5i$

1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C، عين z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h.

h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A الى C اذن $z_C = 2z_A + b \Leftarrow b = z_C - 2z_A = -3+i-2(1+i) = -5-i$

وبالتالي: $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-5-i}{1-2} = 5+i$

2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

أ) عين z_E و z_I لاحقة النقطتين E و I على الترتيب .

$z_E = \frac{z_A - z_B + z_C}{1} = -1-i$ ، $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = -2+2i$

ب) تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$ -

لدينا $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ معناه $\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=\frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ أي $ME=MI$ اذن هذه المجموعة هي المستقيم محور القطعة $[EI]$

3) أ)اكتب العدد المركب $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}$ على الشكل الاسي .

$$\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}=-\frac{1}{2}i$$

ب)استنتاج نسبة وزاوية التشابه المباشر S الذي يحول E الى I ويحول D الى A

النسبة هي $\left|-\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ والزاوية هي $\arg\left(-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\pi}{2}$

4) K نقطة من المستوى تحقق : $z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}\left(z_I-z_A\right)$.

اثبات ان K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له .

لدينا $z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}\left(z_I-z_A\right)$ و $\frac{z_I-z_A}{z_E-z_D}=-\frac{1}{2}i$ اذن

$$z_K-z_D=-2e^{\frac{\pi}{6}i}\cdot\frac{-1}{2}i\left(z_E-z_D\right)=e^{\frac{\pi}{6}i}e^{\frac{\pi}{2}i}\left(z_E-z_D\right)=e^{\frac{2\pi}{3}i}\left(z_E-z_D\right)$$

ومنه نستنتج ان K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

5)أ-عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z بحيث : $z-1-5i=\frac{4}{\overline{z-1+5i}}$.

لدينا $z-1-5i=\frac{4}{\overline{z-1+5i}}$ معناه $\left(z-z_D\right)\left(\overline{z-z_D}\right)=4$ أي $\left|z-z_D\right|^2=4$ أي $\left|z-z_D\right|=2$ أي $DM=2$

وبالتالي (Γ) هي دائرة مركزها D ونصف قطرها 2

ب-عين (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S وعين عناصرها المميزة .

(Γ') هي الدائرة التي مركزها $S(D)$ أي مركزها A ونصف قطرها $2\times\frac{1}{2}=1$

التمرين الثالث:(4نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

(Δ_1) و(Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=1-t\end{cases} \text{ و } (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t'\ (t'\in\mathbb{R})\\ z=4+2t'\end{cases}$$

1)أ) تعيين احداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و(Δ_2)

نقوم بحل الجملة $\begin{cases}3+2t=1\\ -2-2t=-1-t'\\ 1-t=4+2t'\end{cases}$ فنجد ان $\begin{cases}t=-1\\ t'=-1\end{cases}$ أي ان $B(1,0,2)$

ت) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستوى (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و(Δ_2)

$$(P):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-2t-t'\ (t,t'\in\mathbb{R})\\ z=2-t+2t'\end{cases}$$

2)أ)اثبات ان النقطة $A(6;4;4)$ لاتنتمي الى المستوي (P)

لنقم بحل الجملة $\begin{cases} 6=1+2t....(1) \\ 4=-2t-t'....(2) \\ 4=2-t+2t'....(3) \end{cases}$ نجد من (1) و (2) ان $t=\frac{5}{2};t'=-9$ وبتعويض القيمتين في (3)

نجد ان هناك تناقض وبالتالي $A(6;4;4)$ لاتنتمي الى المستوي (P)

ب)تبيين ان النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

نعلم ان B نقطة من المستوي (P) اذن بقي اثبات ان الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعامد كل من $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ اشعة توجيه لـ(P)

$\overrightarrow{AB}(-5,-4,-2)$ و $\vec{u}(2,-2,-1)$، $\vec{u'}(0,-1,2)$ وبالتالي $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0,\overrightarrow{AB}.\vec{u'}=0$ اذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

3)أ)تعيين معادلة ديكارتيه للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}(5;1;-7)$ شعاع ناظمي له.

$(Q):5x+y-7z+d=0$ وبما $A(6;4;4)$ من (Q) فان $34-28+d=0$ أي $d=-6$

وبالتالي : $(Q):5x+y-7z-6=0$ معادلة ديكارتية لـ(Q)

ب)تعيين احداثيات C وD نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب .

$5(3+2t)-2-2t-7(1-t)-6=0$ اذن $15t=0$ أي $t=0$ وبالتالي $C(3,-2,1)$

$5(1)-1-t'-7(4+2t')-6=0$ اذن $-15t'-30=0$ أي $t'=-2$ اذن $D(1,1,0)$

4)أ)تعيين طبيعة المثلث BCD، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

لدينا $\overrightarrow{BC}(2,-2,-1),\overrightarrow{BD}(0,1,-2),\overrightarrow{CD}(-2,3,-1)$ اذن $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=0-2+2=0$ وبالتالي BCD مثلث قائم في B

حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d(A,(BCD))=\frac{1}{3}S_{BCD}\times d(A,(P))=\frac{1}{3}\frac{BC.BD}{2}\times AB=\frac{15}{2}(u.v)$$

ب)استنتاج مساحة المثلث ACD:

لدينا $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B,(ACD))=\frac{1}{3}S_{ACD}\times d(B,(Q))$ اذن $S_{ACD}=\frac{3V_{ABCD}}{d(B,(Q))}$ وبالتالي :

$$S_{ACD}=\frac{3\times\frac{15}{2}}{\frac{3}{\sqrt{5}}}$$ أي $$S_{ACD}=\frac{15}{2}\sqrt{5}(u.a)$$

التمرين الرابع: (7نقاط)

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$

1) دراسة تغيرات الدالة g.

الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=(3-x)e^{-x+2}$ اذن اشارة $g'(x)$ من اشارة $3-x$

وبالتالي لدينا:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

اذن g متزايدة على $]-\infty,3]$ ومتناقصة على $[3,+\infty[$

2) بيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14 \prec \alpha \prec 1.15$.

g مستمرة ومتزايدة على المجال $]1.14;1.15[$ و $g(1.14)\times g(1.15)\prec 0$ حيث $g(1.14)-0.03; g(1.15)=0.01$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14\prec\alpha\prec 1.15$

3) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+ (x)

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$، (C_f) التمثيل البياني للدالة في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\frac{xe^2}{e^x}+e^{-x+2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-1-(x-1)e^{-x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(2-\frac{1}{x}-e^{-x+2}+\frac{e^2}{xe^x}\right)=+\infty$$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

ج-بيان أنه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

د-بيان أن $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

$$\begin{cases}f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}\\ g(\alpha)=2+(\alpha-2)e^{-\alpha+2}=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}f(\alpha)=2\alpha-1-(\alpha-1)e^{-\alpha+2}...(1)\\ e^{-\alpha+2}=\dfrac{-2}{\alpha-2}...(2)\end{cases}$$ وبتعويض (2) في (1) نجد :

$$f(\alpha)=2\alpha-1+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha-2}=2\alpha+1-2+\frac{2(\alpha-1)}{\alpha-2}=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-2}$$

استنتاج حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $1.14\prec\alpha\prec 1.15$ اذن $3.28\prec 2\alpha+1\prec 3.30...(*)$ و $\frac{2}{-0.85}\prec\frac{2}{\alpha-1}\prec\frac{2}{-0.86}$ أي $-2.36\prec\frac{2}{\alpha-1}\prec -2.32...(**)$ وبالجمع بين $(*)$ و $(**)$ طرفا لطرف نجد $0.92\prec f(\alpha)\prec 0.98$

2) أ-اثبات ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y=2x-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-(x-1)e^{-x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-xe^2}{e^x}+e^{-x+2}\right)=0$ اذن مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب-دراسة الوضع النسبي للمحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

x	$-\infty$	1	$+\infty$

$f(x)-y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

ج-بيان ان المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب اعطاء معادلة ديكارتية له .

نقوم بحل المعادلة $f'(x)=2$ أي $g(x)=2$ أي $2+(x-2)e^{-x+2}=2$ اذن $x=2$ وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 2 وبالتالي معادلة (T) من الشكل: $(T): y=2(x-2)+f(2)$ أي $(T): y=2x-2$

ب-احسب $f(0)$، $f(2)$ ثم رسم (Δ)، (T) و (C_f).

$f(2)=2$ ، $f(0)=e^2-1\simeq 6.4$

3) تعيين بيانا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x التالية حلين متمايزين :

لدينا $(E): 2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$ معناه $-1-(x-1)e^{-x+2}=-2m$ أي $-1-(x-1)e^{-x+2}+2x=-2m+2x$ وبالتالي $f(x)=-2m+2x$ اذن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-2m+2x$

اذن المعادلة (E) تقبل حلين متمايزين من اجل $\frac{1}{2}\prec m\prec 1\Leftarrow -2\prec -2m\prec -1$

III. أ)عين باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الاصلية H للدالة $h: x\mapsto (x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0.

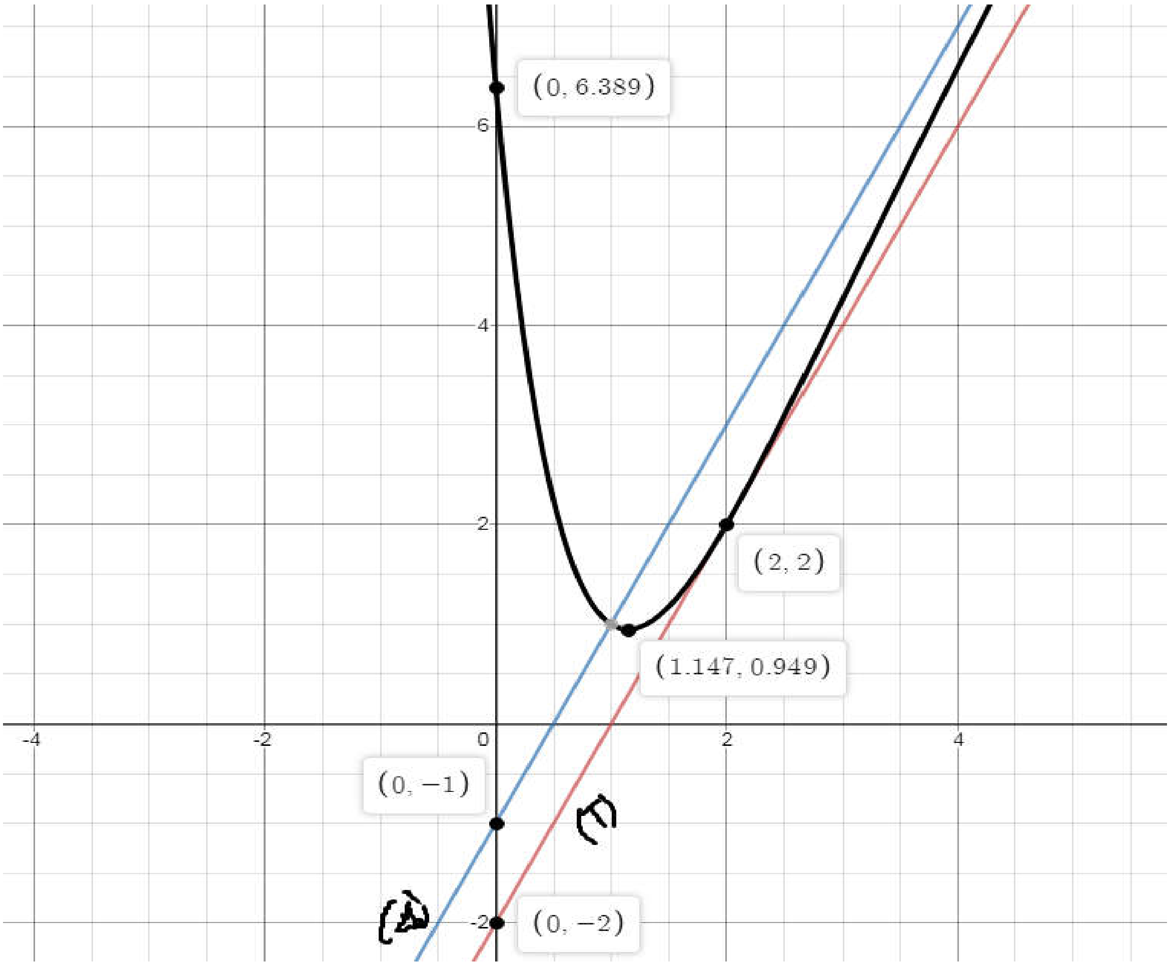
$$H(x)=\int_0^x h(t)dt=\int_0^x (t-1)e^{-t+2}dt$$

$\begin{cases}u'(t)=1\\ v(t)=-e^{-t+2}\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}u(t)=t-1\\ v'(t)=e^{-t+2}\end{cases}$ اذن $H(x)=\left[-e^{-t+2}(t-1)\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t+2}$ أي

$$H(x)=\left[-e^{-t+2}(t-1)\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t+2}=-e^{-x+2}(x-1)+e^2+e^{-x+2}-e^2=-xe^{-x}+2$$

ب)ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda\succ 1$ ، $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1; x=\lambda$

- حساب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$
- $A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(2x-1-f(x))dx=\int_1^{\lambda}(x-1)e^{-x+2}dx=H(\lambda)-H(1)=-\lambda e^{-\lambda+2}+e\,(u.a)=4\left(-\lambda e^{-\lambda+2}+e\right)cm^2$
- $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty} 4\left(-\lambda e^{-\lambda+2}+e\right)cm^2=4e.cm*2$



مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح في دراستكم بصفة خاصة وفي حياتكم بصفة عامة .....استاذكم زاوي شعيب ....