تمارين في الحساب مع الحل لشعبتي الرّياضي و التّقني رياضي للتّحضير لبكالوريا 2019

التمرين الأوّل :

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2) برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون العدد : $2\times 2012^{6n+4}+3\times 1432^{3n+2}$ قابلا للقسمة على 7 .

3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام u_n حيث : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$.

أ) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+....+u_n$.

ب) ماهي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها المجموع S_n قابلا للقسمة على 7 ؟ .

التمرين الثاني :

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):3x-8y=5$.

2) n ، x وَ y أعداد صحيحة حيث : $n=3x+2$ وَ $n=8y+7$.

✓ بيّن أنّ الثنائية $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

✓ نعتبر الجملة : $(S):\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$. بيّن أنّ : $n\equiv 23[24]$.

3) m عدد طبيعي :

✓ عيّن باقي قسمة 2^{2m} على 3 ، وَ باقي قسمة 7^{2m} على 8 .

✓ تحقّق أنّ العدد 1439 حل للجملة (S) .

✓ ما هو باقي قسمة : 1439^{2018} على 24 ؟ .

التمرين الثالث :

أجب بصحيح أو خطأ مع التّبرير :

1) من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $(2^{2n}-1)$ يقبل القسمة على 3 .

2) إذا كان العدد الصّحيح x حلاّ للمعادلة $x^2+x\equiv 0[6]$ ، فإنّ : $x\equiv 0[3]$.

3) المعادلة : $25x-30y=47$ ، تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

4) توجد ثنائية وحيدة $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $a<b$ وَ $PPCM(a,b)-PGCD(a,b)=1$

5) مهما يكن العدد الطبيعي n : $PGCD(14n+21;21n+14)=7$.

6) العددان M و N مكتوبان في النّظام العشري على الشّكل : $M=\overline{abc}$ ، $N=\overline{bca}$:

✓ إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإنّ : $(M-N)$ يقبل القسمة على 27 أيضا .

7) يوجد نظام تعداد أساسه a بحيث العدد 2018 يكتب : $\overline{21312}^{(a)}$.

التمرين الرابع :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نفرض الأعداد :

$a_n = 4\times 10^n - 1$ ، $b_n = 2\times 10^n - 1$ ، $c_n = 2\times 10^n + 1$.

1) أ) أحسب a_n ، b_n وَ c_n من أجل n يساوي 1 ، 2 وَ 3 .

ب) ما هو عدد أرقام العددين a_n وَ c_n ؟ .

✓ بيّن أنّ العددين a_n وَ c_n يقبلان القسمة على 3 .

ج) بيّن أنّ العدد b_3 أوّلي .

د) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$.

✓ إستنتج تحليلا إلى عوامل أوّلية للعدد a_6 .

ه) بيّن أنّ : $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$. ثمّ إستنتج أنّ b_n وَ c_n أوّليان فيما بينهما .

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $b_3x + c_3y = 1......(1)$.

أ) برّر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاّ .

ب) طبّق خوارزمية إقليدس على b_3 وَ c_3 لإيجاد حلا خاصا للمعادلة (1) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

الإجابة النموذجية

حل التمرين الأوّل :

1) بواقي القسمة الإقليدية لكل من 3^n و 4^n على 7 :

- $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$.

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

- $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$.

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
بواقي قسمة 3^n على 7	1	4	2

2) برهان أنّ : $2\times 2012^{6n+4} + 3\times 1432^{3n+2}$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي n :

✓ $2012 \equiv 3[7]$ ، أي : $2012^{6n+4} \equiv 3^{6n+4}[7]$ ، ومنه : $2012^{6n+4} \equiv 4[7]$.

✓ $1432 \equiv 4[7]$ ، أي : $1432^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7]$ ، ومنه : $1432^{3n+2} \equiv 2[7]$.

إذن : $2\times 2012^{6n+4} + 3\times 1432^{3n+2} \equiv 8+6[7]$ ، أي : $2\times 2012^{6n+4} + 3\times 1432^{3n+2} \equiv 14[7]$ ،

ومنه: $2\times 2012^{6n+4} + 3\times 1432^{3n+2} \equiv 0[7]$. و هو المطلوب .

3) أ) حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$:

نلاحظ أن المتتالية (u_n) هي مجموع متتاليتين هندسيتين إحداهما أساسها 3 و حدها الأول 2 ، والثانية أساسها 4

و حدها الأول 3 ، أي : $S_n = 2\left[\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right] + 3\left[\frac{1-4^{n+1}}{1-4}\right]$ ، ومنه : $S_n = \left[3^{n+1}-1\right] + \left[4^{n+1}-1\right]$ ،

أي أنّ : $S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$.

ب) قيم n حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 :

✓ $S_n \equiv 0[7]$ معناه : $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$.

قيم n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
باقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5
باقي قسمة 4^n على 7	1	4	2	1	4	2

نلاحظ أن : $3^n + 4^n \equiv 2[7]$ ، لما : $n = 6k$ ، و منه : $3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$ ، لما : $n+1 = 6k$.

أي لما : $n = 6k-1$ أو : $n = 6(k-1)+5$.

نضع : $k' = k-1$ ، أي : $n = 6k'+5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

ومنه حتى يكون S_n قابلا للقسمة على 7 ، يجب أن يكون $n = 6k'+5$ ، حيث : $k' \in \mathbb{N}$.

حل التمرين الثاني :

1) المعادلة : $(E): 3x - 8y = 5$ ، الثّنائية $(-1;-1)$ هي حل ظاهر للمعادلة (E) .

الآن نبحث عن كل الحلول : لدينا : $\begin{cases} 3x - 8y = 5 .....(1) \\ 3(-1) - 8(-1) = 5 .....(2) \end{cases}$ بطرح $(1)-(2)$ نجد :

$3(x+1) - 8(y+1) = 0$ أي : $3(x+1) = 8(y+1)$ ، العدد 8 يقسم $3(x+1)$ وَ 8 أوّلي مع 3 ،

إذن حسب مبرهنة غوص : 8 يقسم $(x+1)$ أي : $x+1 = 8k$ ، ومنه : $x = 8k-1$.

نعوّض قيمة x في $3(x+1) = 8(y+1)$ أي $3(8k) = 8(y+1)$ أي $3k = y+1$ ومنه: $y = 3k-1$

إذن حلول المعادلة (E) هي: $(x;y) = (8k-1; 3k-1)$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.

2) أ) لدينا : $n = 3x+2$ وَ $n = 8y+7$ ، أي : $3x+2 = 8y+7$ ، ومنه : $3x - 8y = 5$.

إذن الثّنائية $(x;y)$ هي حل للمعادلة (E) .

ب) لدينا الجملة: $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$: (S) ، إذن: $n = 3\alpha + 2$ وَ $n = 8\beta + 7$ ومنه: $3\alpha + 2 = 8\beta + 7$

أي : $3\alpha-8\beta=5$ ، إذن الثّنائية $(\alpha;\beta)$ هي حل للمعادلة (E) ، ومنه : $\begin{cases}\alpha=8k-1\\ \beta=3k-1\end{cases}$ ولدينا

$n=3x+2$ بالتعويض نجد : $n=3(8k-1)+2$ أي $n=24k-1$ أي : $n\equiv -1[24]$ ،

ومنه : $n\equiv 23[24]$ ، وهو المطلوب .

3) أ) تعيّين باقي القسمة 2^{2m} على 3 ، وَ باقي قسمة 7^{2m} على 8 :

✓ لدينا : $2^{2m}=(2^2)^m=4^m$ ، ونعلم أنّ : $4\equiv 1[3]$ أي : $4^m\equiv 1[3]$

ومنه : $2^{2m}\equiv 1[3]$.

$x\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$x^2\equiv$	0	1	4	3	4	1	$[6]$
$x^2+x\equiv$	0	2	0	0	2	0	$[6]$

✓ لدينا: $7\equiv -1[8]$ أي : $7^2\equiv 1[8]$ ، أي : $(7^2)^m\equiv 1[8]$ ومنه : $7^{2m}\equiv 1[8]$.

ب) بقسمة 1439 على كلّ من 3 وَ 8 نجد : $\begin{cases}1439\equiv 2[3]\\ 1439\equiv 7[8]\end{cases}$ ومنه 1439 حل للجملة (S) .

ج) لدينا: $\begin{cases}1439\equiv 2[3]\\ 1439\equiv 7[8]\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}1439^{2018}\equiv 2^{2018}[3]\\ 1439^{2018}\equiv 7^{2018}[8]\end{cases}$ ، و من السؤال (أ) سيكون لدينا :

$2^{2018}\equiv 1[3]$ وَ $7^{2018}\equiv 1[8]$ ، إذن: $\begin{cases}1439^{2018}\equiv 1[3]\\ 1439^{2018}\equiv 1[8]\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}1439^{2018}-1\equiv 0[3]\\ 1439^{2018}-1\equiv 0[8]\end{cases}$.

و بما أنّ 3 و 8 أوّليان فيما بينهما إذن : $1439^{2018}-1\equiv 0[24]$ ومنه : $1439^{2018}\equiv 1[24]$.

إذن باقي قسمة 1439^{2018} على 24 هو 1 .

حل التّمرين الثّالث :

1) الإجابة **صحيحة** ، لأنّ: $2^{2n}=4^n$ ، ونعلم أنّ: $4\equiv 1[3]$ أي: $4^n\equiv 1[3]$ أي: $4^n-1\equiv 0[3]$

ومنه : $2^{2n}-1\equiv 0[3]$.

2) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ :

ومنه $x^2+x\equiv 0[6]$ لا يعطينا حتما :

$x\equiv 0[3]$.

و كمثال مضاد: ممكن أن يكون $x\equiv 5[6]$

وهنا: $x=6k+5$ أي أنّ x ليس مضاعفا لـ 3 .

3) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ : $PGCD(25;30)=5$ لكن 5 لا يقسم 47 .

4) الإجابة **صحيحة** ، لأنّ : نعلم أنّ $PPCM(a;b)=da'b'$ حيث d هو $PGCD(a;b)$ ، وَ a' و b' أوليّان فيما بينهما ، ولدينا $PPCM(a;b)-PGCD(a;b)=1$ ، أي : $da'b'-d=1$ أي : $d(a'b'-1)=1$ إذن : $d=1$ ، ومنه : $a'b'-1=1$ أي $a'b'=2$ ، وبما أنّ $a'<b'$ لأنّ : $a<b$ ، إذن : $(a';b')=(1;2)$ ، ومنه : $(a;b)=(1;2)$ ، لأنّ : $d=1$.

5) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ : $PGCD(14n+21;21n+14)=PGCD(7(2n+3);7(3n+2))$ أي: $PGCD(14n+21;21n+14)=7\times PGCD(2n+3;3n+2)$.

نفرض أنّ : $PGCD(2n+3;3n+2)=d$ ،إذن: $\begin{cases} d/2n+3 \\ d/3n+2 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} d/3(2n+3) \\ d/2(3n+2) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} d/6n+9 \\ d/6n+4 \end{cases}$ ، ومنه : $d/5$ أي : $d=1$ أو $d=5$ ، إذن :

$PGCD(14n+21;21n+14)=7\times 1$ ، ومنه : $PGCD(14n+21;21n+14)=7$.

أو : $PGCD(14n+21;21n+14)=7\times 5$ ، ومنه : $PGCD(14n+21;21n+14)=35$.

6) الإجابة **صحيحة** ، لأنّ :

لدينا : $\begin{cases} M=\overline{abc}=a\times 10^2+b\times 10+c=100a+10b+c \\ N=\overline{bca}=b\times 10^2+c\times 10+a=100b+10c+a \end{cases}$.

بما أنّ M يقبل القسمة على 27 ، إذن M يقبل القسمة على 3 (لأنّ 27 مضاعف لـ 3) .

إذن : $M\equiv 0[3]$ أي : $100a+10b+c\equiv 0[3]$. نعلم أنّ : $100\equiv 1[3]$ وَ $10\equiv 1[3]$ ،

إذن : $a+b+c\equiv 0[3]$......(1) .

نحسب الآن : $M-N$ ، $M-N=(100a+10b+c)-(100b+10c+a)$ أي :

$M-N=99a-90b-9c$ ، أي: $M-N=9(11a-10b-c)$ (مضاعف لـ9) .

يكون $M-N$ قابلا للقسمة على 27 إذا كان : $(11a-10b-c)$ مضاعفا لـــ 3 ، أي :

$11a-10b-c\equiv 0[3]$ أي: $2a-b-c\equiv 0[3]$ وَ $2\equiv -1[3]$ ، إذن : $-a-b-c\equiv 0[3]$

(بالضرب في (-1)) أي : $a+b+c\equiv 0[3]$. ، وهذا ما توصّلنا من قبل ، أنظر (1) .

إذن : $M-N$ يقبل القسمة على 27 أيضا .

7) الإجابة **خاطئة** ، لأنّ : $2018=\overline{21321}^{(a)}$ ، $(a>3)$: $2018=2a^4+a^3+3a^2+2a+1$ ،

إذن : $2a^4<2018$ أي : $a^4<1009$ أي : $a^2<\sqrt{1009}$ أي: $a^2<31,764$ أي: $a<\sqrt{31,764}$

ومنه : $a<5,63$ ، لكن : $(a>3)$ ، إذن : $(a=4)$ أو $(a=5)$.

✓ التحقق من أجل : $(a=4)$

مرفوضة لأنّ : $\overline{21321}^{(4)}=2\times(4)^4+1\times(4)^3+3\times(4)^2+2\times(4)+1=633$.

✓ التحقّق من أجل : $(a=5)$

مرفوضة لأنّ : $\overline{21321}^{(5)}=2\times(5)^4+1\times(5)^3+3\times(5)^2+2\times(5)+1=1461$.

إذن لا يوجد نظام تعداد أساسه a حيث 2018 يكتب : $\overline{21321}^{(a)}$.

حل التمرين الرابع :

1) أ) $\begin{cases}a_1=39\\b_1=19\\c_1=21\end{cases}$ ، $\begin{cases}a_2=399\\b_2=199\\c_2=201\end{cases}$ ، $\begin{cases}a_3=3999\\b_3=1999\\c_3=2001\end{cases}$. ب) عدد أرقام a_n وَ b_n هو : $n+1$.

✓ بما أنّ : $10\equiv 1[3]$ إذن : $10^n\equiv 1[3]$ ، ومنه : $4\times10^n\equiv 4[3]$ ، أي : $4\times10^n\equiv 1[3]$ ، أي : $4\times10^n-1\equiv 0[3]$ ، ومنه : $a_n\equiv 0[3]$. وَ أيضا بنفس الطريقة : $c_n\equiv 0[3]$.

ج) $b_3=1999$ ، $\sqrt{1999}\approx 44,71$. b_3 لا يقبل القسمة على كل الأعداد الأوّلية الأصغر من $44,71$ ، إذن هو أوّلي .

د) $b_n\times c_n=(2\times10^n-1)(2\times10^n+1)$ ، أي : $b_n\times c_n=(2\times10^n)^2-1$ ، أي : $b_n\times c_n=4\times10^{2n}-1$ ،

و منه : $b_n\times c_n=a_{2n}$ ، و هو المطلوب .

✓ إستنتاج تحليلا للعدد a_6 : $a_6=b_3\times c_3$ ، أي : $a_6=1999\times2001$ ، و منه : $a_6=1999\times3\times23\times29$.

ه) نعلم أنّ : $PGCD(a;b)=PGCD(a;a-b)$ ، إذن : $PGCD(b_n;c_n)=PGCD(c_n;c_n-b_n)$ ، أي :

$PGCD(b_n;c_n)=PGCD(c_n;2)$ ، لكن العدد c_n فردي $(c_n=2\times10^n+1)$ ، إذن : $PGCD(c_n;2)=1$ ،

و منه : $PGCD(b_n;c_n)=1$. و منه فإنّ : b_n وَ c_n أوّليان فيما بينهما .

2) لدينا المعادلة $b_3x+c_3y=1......(1)$:

أ) بما أنّ b_3 وَ c_3 أوّليان فيما بينهما ، إذن حسب مبرهنة بيزو المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

ب) لدينا : $\begin{cases}2001=1999\times1+2\\1999=999\times2+1\end{cases}$ ، إذن : $1999-2\times999=1$ ، أي :

$1999-(2001-1999)\times999=1$ ، أي :

$1999-999\times2001+999\times1999=1$ ، و منه : $1000\times1999-999\times2001=1$.

إذن : $(1000;-999)$ حل خاص للمعادلة (1) .

ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) : $1999x+2001y=1$ ، و لدينا : $1999(1000)+2001(-999)=1$ ،
بالطرح نجد :

$1999(x-1000)+2001(y+999)=0$ ، $1999(x-1000)=-2001(y+999)$ ،

حسب غـــوص : $\begin{cases} x=2001k+1000 \\ y=-1999k-999 \end{cases}$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرّزاق