✍ في كل مَايلي D_f مجموعة تعريف الدَالة f .
(C_f) هو التمثيل البيَاني لِلدَالة f في المستوي منسوب إلَى المعلم المتعَامد و المتجَانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

قابلية الاشتقاق :

ســــؤال :

✍ أدرس قَابلية اشتقَاق الدَالة f في النقطة ذَات الفَاصلة x_0 .
و فسّر النتيجة بيَانيًا .

طريقة :

نحسب $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ أو $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

① إذَا وجدنَا النهَاية عدَد حقيقي فإن :
⋆ f تقبل الاَشتقَاق عند x_0 و هذَا العدَد الحقيقي هو العدَد المشتق $f'(x_0)$.
⋆ (C_f) يقبل مَماسًا عند النقطة ذَات الفَاصلة x_0 معَامل توجيهه $f'(x_0)$.

② إذَا وجدنَا النهَاية ∞ فإن :
⋆ f لَا تقبل الاَشتقَاق عند x_0 .
⋆ (C_f) يقبل مَماسًا يوَازي حَامل محور التَراتيب عند النقطة ذَات الفَاصلة x_0 معَادلته $x=x_0$.

③ إذَا وجدنَا النهَاية من اليمين لَا تسَاوي النهَاية من اليسَار فإن :
⋆ f لَا تقبل الاَشتقَاق عند x_0 .
⋆ (C_f) يقبل نصفي مَماسين عند النقطة ذَات الفَاصلة x_0 معَاملي توجيهَهمَا $f'_d(x_0)$ و $f'_g(x_0)$.

تطبيق :

✍ أدرس قَابلية إشتقَاق f في القيمة x_0 ثم فسّر كل نتيجة بيَانيَا

① f الدَالة المعرفة علَى $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2+1$ $\quad x_0=1$
② f معرفة علَى $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+x}$ $\quad x_0=-1$
③ f الدَالة المعرفة علَى $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2|x-3|$ $\quad x_0=3$

حل مختصر :

① $$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2+1-(1^2+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2+h)=2$$

• f تقبل الاَشتقَاق عند 1 وعدَدهَا المشتق هو $f'(1)=2$.
• (C_f) يقبل مَماسًا عند النقطة ذَات الفَاصلة 1 معَامل توجيهه 2

② $$\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{\sqrt{1+x}}{x+1}$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}=+\infty$$

• f لَا تقبل الاَشتقَاق عند -1 .
• (C_f) يقبل مَماسًا يوَازي حَامل محور التَراتيب عند النقطة ذَات الفَاصلة -1 معَادلته $x=-1$.

③ $$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2|x-3|}{x-3}$$
$$\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{x^2(-x+3)}{x-3}=-9 \text{ و } \lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{x^2(x-3)}{x-3}=9$$

• f لَا تقبل الاَشتقَاق عند 3 .
• (C_f) يقبل نصفي مَماسين عند النقطة ذَات الفَاصلة 1 معَاملي توجيهَهمَا -9 و 9 علَى الترتيب .

المماس :

سؤال«①» :

✍ أكتب معَادلة المَماس لـ (C_f) في النقطة ذَات الفَاصلة x_0 .

طريقة :

نكتب الدستور $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
و نعوض x_0 بقيمتهَا المعطَاة .

تطبيق«①» :

✍ f الدَالة المعرفة علَى $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+2$
لنكتب معَادلة المَماس لـ f عند $x_0=1$:
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه : $y=2(x-1)+3$
و عليه : $y=2x+1$

سؤال«②» :

✍ أكتب معَادلة المَماس لـ (C_f) في النقطة ذَات الترتيب y_0 .

طريقة :

نحل المَعادلة $f(x_0)=y_0$ لتعيين قيمة (أو قيم) x_0 .
و نعود لِلحَالة الأولَى .

تطبيق«②» :

✍ f الدَالة المعرفة علَى $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+2x-1$
لنكتب معَادلة المَماس لـ (C_f) عند النقطة ذَات الترتيب $y_0=2$:
نحل المَعادلة $f(x_0)=2$ أي : $x_0^2+2x_0-1=2$
و منه : $x_0^2+2x_0-3=0$
إذن : $x_0=-3$ أو $x_0=1$
و منه : (C_f) يقبل مَماسين عند النقطتين $(-3;2)$ و $(1;2)$.
نعين معَادلتي المَماسين بَاتبَاع الطريقة السَابقة .

سؤال«③» :

✍ بين أنه يوجد مَماس (أو أكثر) لـ (C_f) معَامل توجيهه a .
✍ بين أنه يوجد مَماس (أو أكثر) لـ (C_f) يوَازي المستقيم ذي المعَادلة $y=ax+b$.

طريقة :

نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ لتعيين قيمة (أو قيم) x_0 .

و نعود للحالة الأولى .

تطبيق«③» :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+3x-4$

لنبين أن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه -1 :

نحل المعادلة $f'(x_0)=-1$ أي : $2x_0+3=-1$

و منه : $x_0=-2$

إذن : (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه -1 عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

نعين معادلة المماس باتباع الطريقة الأولى .

سؤال«④» :

✍ بين أنه يوجد مماس (أو أكثر) لـ (C_f) يعامد المستقيم ذي المعادلة $y=ax+b$.

طريقة :

نحل المعادلة $af'(x_0)=-1$ لتعيين قيمة (أو قيم) x_0 .

و نعود للحالة الأولى .

تطبيق«④» :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x^2+3x$

نبين أن (C_f) يقبل مماسا يعامد المستقيم ذي المعادلة $y=2x+3$

نحل المعادلة $2f'(x_0)=-1$ أي : $2(-2x_0+3)=-1$

و منه : $x_0=\frac{7}{4}$

إذن : (C_f) يقبل مماسا يعامد المستقيم ذي المعادلة $y=2x+3$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\frac{7}{4}$.

نعين معادلة المماس باتباع الطريقة الأولى .

سؤال«⑤» :

✍ بين أنه يوجد مماس (أو أكثر) لـ (C_f) يشمل النقطة $A(\alpha;\beta)$.

طريقة :

نحل المعادلة $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$

لتعيين قيمة (أو قيم) x_0 و نعود للحالة الأولى .

تطبيق«⑤» :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x^2+x$

نبين أن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(1,2)$:

نحل المعادلة $2=f'(x_0)(1-x_0)+f(x_0)$

أي : $2=(4x_0+1)(1-x_0)+2x_0^2+x_0$

و منه بعد التبسيط نجد : $x_0=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ أو $x_0=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

إذن : (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(1,2)$ عند النقطتين ذات الفاصلتين $x_0=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ و $x_0=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

نعين معادلتي المماسين باتباع الطريقة الأولى .

نقطة الانعطاف :

سؤال :

✍ بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

طريقة :

⋆ عموما نحسب $f''(x)$ و ندرس إشارته فإذا انعدم عند x_0 من D_f مغيرا إشارته تكون النقطة $(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

⋆ في بعض الحالات إذا انعدم $f'(x)$ عند x_0 من D_f و لا يغير من إشارته فتكون النقطة $(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

⋆ في بعض الحالات إذا درسنا وضعية (C_f) بالنسبة للمماس عند x_0 ، وجدنا أن (C_f) غير وضعيته بالنسبة للمماس فتكون النقطة $(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

تطبيق :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x^3+3x+1$

لنبين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف :

لدينا: $f''(x)=-6x$

نلاحظ أن $f''(x)$ تنعدم من أجل $x=0$ و تغير من إشارتها

إذن : $A(0,1)$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

طريقة :

⋆ نحل المعادلة $f(x)=0$.

تقاطع (C_f) مع حامل محور التراتيب :

طريقة :

⋆ نحسب $f(0)$.

شفعية دالة :

سؤال«①» :

✍ بين أن f دالة زوجية . ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

طريقة :

⋆ D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 و نثبت أن : $f(-x)=f(x)$.

تطبيق«①» :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2+1$

لنبين أن f دالة زوجية :

لدينا: $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$$

إذن : f دالة زوجية و (C_f) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب .

سؤال«②» :

✍ بين أن f دالة فردية . ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

طريقة :

⋆ D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 و نثبت أن : $f(-x)=-f(x)$.

تطبيق«②» :

✍ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{2}{x}+x$

لنبين أن f دالة فردية :

لدينا: $\mathbb{R}^*$ متناظر بالنسبة إلى 0

و من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(-x)=\frac{2}{-x}-x=-(\frac{2}{x}+x)=-f(x)$$

إذن : f دالة فردية و (C_f) متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم .

مركز التناظر :

سؤال :

✍ بين أن النقطة $w(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

طريقة :

⋆ نثبت أن : $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

أو $f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$.

محور التناظر :

سؤال :

✍ بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$ محور تناظر لـ (C_f) .

طريقة :

⋆ نثبت أن : $f(2\alpha-x)=f(x)$

أو $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$.

مبرهنة القيم المتوسطة :

سؤال :

✍ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[a;b]$.

طريقة :

⋆ f مستمرة و رتيبة على $[a;b]$.

⋆ $f(a)\times f(b)<0$.

تطبيق :

✍ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3-3x^2-1$

① أدرس اتجاه تغير الدالة f .

② بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $3<\alpha<3.5$

حل التطبيق :

① لدينا : $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

نستنتج أن f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$

و متناقصة تماما على المجال $[0;2]$.

② f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]3;3.5[$

و لدينا : $f(3)=-1$ و $f(3.5)=5.13$

و منه : $f(3)\times f(3.5)<0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3<\alpha<3.5$

المستقيم المقارب العمودي :

طريقة :

⋆ إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=a$.

المستقيم المقارب الأفقي :

طريقة :

⋆ إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=b$ عند ∞ .

المستقيم المقارب المائل :

سؤال :

✍ بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞ .

طريقة :

⋆ نثبت أن : $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$

الوضع النسبي :

سؤال :

✍ عين الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$

طريقة :

⋆ ندرس إشارة الفرق : $f(x)-(ax+b)$

الأستاذ : بلبحري كمال