التحضير للبكالوريا

ثانوية سليمان بن حمزة -عين الذهب-

السنة الثالثة

علوم تجريبية-رياضيات -تقني رياضي

7

سلسلة تمارين في الأعداد المركبة والتحويلات النقطيـــــة

التمرين 1

أكتب على الشكل الجبري الاعداد المركبة التالية:

$$z_1=(1+2i)^2(3+4i)+(1+i)^3+20$$

$$z_2=\frac{1+18i}{3+4i}+\frac{7-26i}{3-4i}$$

$$z_3=\left[(-\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\right]^2$$

$$z_4=\left(\frac{5+7i}{-7+5i}\right)^{2011}$$

التمرين 2

أكتب على الشكل الجبري والأسي الأعداد المركبة التالية :

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \quad , \quad z_2=-\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$z_3=\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4$$

$$z_4=\frac{\left(\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

التمرين 3

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

$$z\bar{z}+2z-3z\bar{z}-31-25i=0$$

$$z^2+4\bar{z}-5=0$$

$$(z+\bar{z})^2+2iz\bar{z}-4i=0$$

التمرين 4

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث:

$$|z-1+i|=|z+1|$$

$$|iz-3-2i|=3$$

$$z+\bar{z}=|z|$$

التمرين 5

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z=x+iy$، نرفق بكل عدد مركب $z\neq i$ العدد المركب $f(z)$ حيث : $f(z)=\frac{2z-i}{iz+1}$

❶ عين وأنشيء المجموعة E من المستوي حتى يكون $f(z)$ عددا حقيقيا

❷ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\overline{f(\bar{z})}=\frac{7}{4}i$

التمرين 6

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z=x+iy$، نرفق بكل عدد مركب $z\neq 2$ العدد المركب $f(z)$ حيث : $f(z)=\frac{z+2}{z-2}$

❶ أكتب $f(z)$ على الشكل الجبري

❷ عين E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون $f(z)$ عددا حقيقيا، و المجموعة E_2 للنقط M حتى يكون $f(z)$ عددا تخيليا صرفا.

❸ لتكن M' صورة $f(z)$، عين المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون : O، M و M' على استقامة واحدة

التمرين 7

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ لاحقة النقطة M هي العدد المركب $z=x+iy$، نرفق بكل عدد مركب $z\neq -i$ العدد المركب $f(z)$ حيث : $Z=\frac{z-2-i}{z+i}$

❶ عين $Re(Z)$ و $Im(Z)$

❷ عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون :

✍ Z عددا حقيقيا ✍ Z عددا تخيليا صرفا ✍ $|Z|=\sqrt{2}$

التمرين 8

ليكن Z العدد المركب معرف كما يلي :

$$Z=\frac{(\sqrt{2}-1)+i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+i}$$

❶ اكتب Z على لشكل الجبري، ثم الشكل المثلثي.

❷ عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا

❸ عين الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n تخيليا صرفا

❹ أكتب على الشكل الأسي، ثم على الشكل الجبري العدد المركب z

حيث : $Z \times z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

التمرين 9

z_1 ، z_2 و z_3 أعداد مركبة معرفة كما يلي :

$z_1 = (1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})$ ، $z_2 = -1+i\sqrt{3}$ و $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

❶ عين طويلة وعمدة كل من z_1 و z_2 ثم z_3

❷ استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

❸ أحسب العددين $\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ و $\left(\frac{z_1+z_2}{\sqrt{2}z_3}\right)^{1432}$

❹ أكتب على الشكل الأسي الجذور التربيعية للعدد $2z_3$

التمرين 10

$f(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

$$f(z) = z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 6z - 18\sqrt{2}$$

❶ أحسب $f(3\sqrt{2})$، ثم عين العدد الحقيقي a بحيث :

$f(z) = (z-3\sqrt{2})(z+a)$

❷ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $f(z) = 0$، نرمز إلى z_1 و z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z) = 0$ حيث : z_1 الحل الحقيقي و $\mathrm{Im}(z_2) \prec 0$

❸ المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،ولتكن النقط A ، B و C صور الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 على الترتيب.

✍ عين طبيعة المثلثين ABC و OAB

التمرين 11

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) التالية :

$$(iz+3+4i)(z^2-8z+25) = 0$$

نرمز لحل المعادلة (E) بـ: z_0 ، z_1 و z_2 حيث: $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ و $\mathrm{Im}(z_0) = \mathrm{Im}(z_1)$

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، ولتكن النقط A ، B و C لواحقها z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب.

❖ بين أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها r

❖ أنشيء الدائرة (C) والمثلث ABC

التمرين 12

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

❶ أنشيء النقط A ، B و C ذات اللواحق على الترتيب :

$z_A = 1+i$ ، $z_B = 2-i$ و $z_C = 3+2i$

❷ أحسب لاحقتي الشعاعين : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

❸ فسر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

✍ بين أن : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

❹ عين لاحقة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC، ثم أحسب نصف قطرها وأرسمها

❺ عين لاحقة النقطة D حتى يكون ABCD مربعا

التمرين 13

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب : $z_A = \sqrt{3}+i$ ، $z_B = 2\sqrt{3}-2i$ و $z_C = -2i$

❶ أكتب على الشكل الأسي العدد المركب : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC وأحسب مركز ثقله G

❷ لتكن النقطة D نظيرة A بالنسبة لحامل محور التراتيب.

✍ عين لاحقة D

✍ مثل الرباعي ABCD، ثم عين طبيعته

❸ أكتب على الشكل الأسي العدد المركب : $\frac{2\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+i}$

✍ بين أن: $\arg\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+i}\right) = (\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB})$

✍ استنتج أن النقط B ، O و D على استقامة واحدة

التمرين 14

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

❶ نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب:

$z_A = -\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ و $z_B = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

❖ عين اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O

❖ عين اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة $[AC]$

❖ عين اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I

❖ علم النقط A، B ، C ، D و I

❷ فسر هندسيا طويلة وعمدة العدد المركب : $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$

✍ تحقق أن العدد المركب : $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

✍ ماذا يمكن القول عن القطعتين $[AC]$ و $[BD]$

❸ ما طبيعة الرباعي ABCD؟ أحسب مساحته

❹ بين أن النقاط A، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين لاحقة مركزها ونصف قطرها r

❺ لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لحامل محور الفواصل

✍ عين z_E لاحقة النقطة E

✍ أحسب الجداء : $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}$

✍ ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة (C)

التمرين 15

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1$ و $z_B=2+2i$

❶ عين z_C لاحقة C، صورة B بالإنسحاب $\mathscr{T}$ الذي لاحقة شعاعه $b=-4i$

❷ عين z_D لاحقة النقطة D، صورة النقطة C بالتحاكي $\mathscr{H}$ الذي مركزه النقطة A ونسبته -3

❸ عين z_E لاحقة النقطة E، صورة النقطة (C) بالدوران $\mathscr{R}$ الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

❹ أنشيء النقط A، B، C، D و E

❺ أحسب : $\frac{z_E-z_B}{z_D-z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BDE

التمرين 16

نعتبر التحويل النقطي $\mathscr{T}$ من المستوي الذي يرفق النقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=iz+3-i$

❶ عين طبيعة التحويل $\mathscr{T}$ وعناصره المميزة

❷ عين A' و B' صورتي النقطتين $A(3;1)$ و $B(-1;1)$ على الترتيب بالتحويل $\mathscr{T}$ (استعمل المدور للإنشاء)

❸ ليكن (Δ) مستقيم معادلته : $y=x+2$

✍ أكتب معادلة المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل $\mathscr{T}$

❹ عين (C') صورة الدائرة (C) التي قطرها [AB] بالتحويل $\mathscr{T}$، وأنشيء (Δ) ، (Δ') ، (C) و (C')

التمرين 17

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

❶ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-8=0$

❷ لتكن النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=2$ و $z_C=-1-i\sqrt{3}$

✍ اكتب z_A و z_C على الشكل المثلثي.

✍ مثل النقط A ، B و C

✍ عين طبيعة المثلث ABC

❸ نعتبر التحويل f من المستوي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=e^{2i\frac{\pi}{3}}z$

✍ عين الطبيعة الهندسية للتحويل f

✍ عين صورتي النقطتين A و B بـ f

✍ استنتج صورة المستقيم (AC) بـ f

التمرين 18

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_A=i$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

❶ ليكن $\mathscr{R}$ الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$، نسمي C صورة B بالدوران $\mathscr{R}$

✍ أكتب العبارة المركبة للدوران $\mathscr{R}$

✍ بين أن لاحقة C هي $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

✍ أكتب z_B و z_C على الشكل الجبري

✍ أنشيء النقط A ، B و C

❷ لتكن D مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 2، -1 و 2 على الترتيب

✍ بين أن لاحقة D هي : $z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ وأنشيء النقطة D

✍ بين أن A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة

❸ ليكن $\mathscr{H}$ التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2،نسمي E صورة D بالتحاكي $\mathscr{H}$

✍ أكتب العبارة المركبة للتحاكي $\mathscr{H}$

✍بين أن لاحقة E هي $z_E=\sqrt{3}$ وأنشيء E

❹ احسب النسبة $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$ و أكتب النتيجة بالشكل الأسي

✍ استنتج طبيعة المثلث CDE

التمرين 19

في المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$

لتكن النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب

❶ أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B، ثم عين زاويته ونسبته

❷ نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي : $A_0=A$ ومن

أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$، نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n

✍ أنشيء في المستوي المركب النقط A_0، A_1 وA_2

✍ برهن أن : $z_n=2(\sqrt{3})^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

✍ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من اجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1)

❸ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=A_0A_1$ و $u_n=$ A_nA_{n+1} من أجل كل عدد طبيعي n

✍ بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q

✍ استنتج عبارة u_n بدلالة n

✍ أحسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين 20

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

❷ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: A، B، C و D

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$، $z_C=-1-i\sqrt{3}$

و $z_D=-1+i\sqrt{3}$

✍ أكتب كلا من z_A، z_B، z_C و z_D على الشكل الأسي

✍ تحقق أن $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدين

❸ z_n العدد المركب الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و $\dfrac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي

L_n العدد المركب المعرف بـ: $L_n=z_D\times z_n$

✍ أكتب كلا من L_0 ، L_1 على الشكل الجبري

✍ (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$V_n=|L_n|$

✍ أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

✍ M_0 ، M_1 ، ... ، M_n صور الأعداد المركبة L_0 ، L_1 ، ... ، L_n على الترتيب

✍ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\|\overrightarrow{OM_0}\|+\|\overrightarrow{OM_1}\|+\cdots+\|\overrightarrow{OM_n}\|$

✍ عين نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$

التمرين 21

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0 \qquad (E)$$

❶ أثبت أن المعادلة (E) تكافيء المعادلة $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)$

✍ حل في $\mathbf{C}$ المعادلة (E)

❷ ❷ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: A، B، C و D

$z_A=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$، $z_C=-1$ و $z_D=-\dfrac{5}{2}$

✍ أكتب كلا من z_A، z_B، z_C و z_D على الشكل الأسي

✍ أنشيء النقط A، B، C و D

✍ أثبت أن $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$

✍ استنتج طبيعة المثلث ABC

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$ ونسبته 2 ، ولتكن F صورة A بالتحويل S

✍ أنشيء النقطة F ثم حدد طبيعة المثلث AFC

❹ عين طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1=kz_B$، لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}^+$