1

التمرين

لتكن المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases} y' - 2y = 0 & \dots (1) \\ y' - 2y = xe^x & \dots (2) \end{cases}$$

1) حل المعادلة التفاضلية (1).

2) ليكن a و b عددين حقيقيين، و u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$u(x) = (ax+b)e^x$$

a) أوجد a و b حتى تكون u حلا للمعادلة (2).

b) برهن أن الدالة v حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $u+v$ حلا للمعادلة (2).

c) استنتج مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (2).

d) حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (2) والتي تنعدم من أجل $x=0$.

الحل

لتكن المعادلتين التفاضليتين:

$$\begin{cases} y' - 2y = 0 & \dots (1) \\ y' - 2y = xe^x & \dots (2) \end{cases}$$

1) حل المعادلة التفاضلية (1):

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية (1) على الشكل:

$$y' = 2y$$

نعلم أن مجموعة حلول معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay$ هي الدوال $x \longmapsto ke^{ax}$ حيث k ثابت حقيقي.

ومنه:

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال:

$$x \longmapsto ke^{2x}$$

حيث k ثابت حقيقي.

2) ليكن a و b عددين حقيقيين، و u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$u(x) = (ax+b)e^x$$

a) إيجاد a و b حتى تكون u حلا للمعادلة (2):

الدالة u حل للمعادلة التفاضلية (2) معناه:

$$u'(x) - 2u(x) = xe^x$$

حيث $u'(x)$ مشتقة $u(x)$.

الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$u'(x) = (ax+b)'e^x + (ax+b)(e^x)'$$
$$u'(x) = ae^x + (ax+b)e^x$$

ومنه:

$$u'(x) = (ax+a+b)e^x$$

2

لدينا:

$$u'(x) - 2u(x) = xe^x$$
$$(ax+a+b)e^x - 2(ax+b)e^x = xe^x$$
$$(ax+a+b-2ax-2b)e^x = xe^x$$
$$(-ax+a-b)e^x = xe^x$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

ونكتب:

$$u(x) = -(x+1)e^x$$

b) البرهان أن الدالة v حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $u+v$ حلا للمعادلة (2):

أولا:

نفرض أن v حل للمعادلة (1) أي:

$$v' - 2v = 0$$

ونبرهن أن $u+v$ حلا للمعادلة (2) أي:

$$(u+v)' - 2(u+v) = xe^x$$

لدينا:

v حل للمعادلة (1) ـ من الفرضية ـ :

$$v' - 2v = 0$$

و u حل للمعادلة (2) ـ من 2) a) ـ :

$$u' - 2u = xe^x$$

بالجمع طرف لطرف:

$$(u' - 2u) + (v' - 2v) = (0 + xe^x)$$
$$(u' + v') - 2u - 2v = xe^x$$
$$(u' + v') - 2(u+v) = xe^x$$
$$(u+v)' - 2(u+v) = xe^x$$

ومنه:

$u+v$ حل للمعادلة (2)

ثانيا:

نفرض أن $u+v$ حل للمعادلة (2) أي:

$$(u+v)' - 2(u+v) = xe^x$$

ونبرهن أن v حلا للمعادلة (1) أي:

$$v' - 2v = 0$$

لدينا:

$u+v$ حل للمعادلة (2) ـ من الفرضية ـ :

$$(u+v)' - 2(u+v) = xe^x$$
$$u' + v' - 2u - 2v = xe^x$$
$$(u' - 2u) + (v' - 2v) = xe^x$$

و u حل للمعادلة (2) ـ من 2) a) ـ :

$$u' - 2u = xe^x$$

3

بالتعويض:

$xe^x + (v' - 2v) = xe^x$
$v' - 2v = 0$

ومنه:

v حل للمعادلة (1)

نتيجة:

الدالة v حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $u + v$ حلا للمعادلة (2)

c) استنتاج مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (2):

v حل للمعادلة (1):

$$v' - 2v = 0$$

ومجموعة حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال:

$$x \longmapsto ke^{2x}$$

ومنه:

$$v(x) = ke^{2x}$$

و u حل للمعادلة (2):

$$u' - 2u = xe^x$$

حيث:

$$u(x) = -(x+1)e^x$$

$u + v$ حل للمعادلة (2):

$$(u+v)' - 2(u+v) = xe^x$$

نضع:

$$f = u + v$$

نجد:

$$f' - 2f = xe^x$$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (2) هي الدوال:

$$f(x) = v(x) + u(x)$$

ومنه:

$$f(x) = ke^{2x} - (x+1)e^x$$

d) تحديد الحل f للمعادلة التفاضلية (2) والتي تنعدم من أجل $x = 0$:

$f(0) = 0$
$ke^0 - (0+1)e^0 = 0$
$k - 1 = 0$

ومنه:

$$k = 1$$

ونكتب:

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$$

ويمكن أن نكتب أيضا:

$$f(x) = (e^x - x - 1)e^x$$

4