الموضوع التجريبي رقم 04 — التحضير الجيد للبكالوريا

الشعبة : علوم تجريبية — دورة : ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

## التمرين الأول: ( 04 نقاط )

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمسابقة توظيف ، يسحب مترشح عشوائيا بالتتالي وبدون إرجاع بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات ، 8 بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات وبطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية ، لايمكن التمييز بين البطاقات باللمس .

1) نعتبر الحادثتين $A$ و $B$ حيث : $A$ هي الحادثة : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية"

$B$ هي الحادثة : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين "

- احسب $P(A)$ و $P(B)$

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي $X$

جـ) احسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$

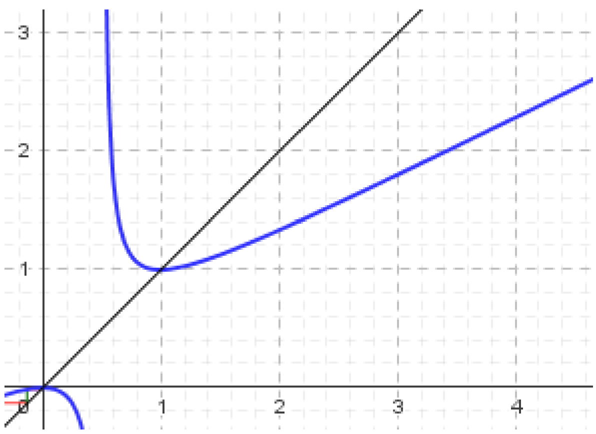
## التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني $(C)$ للدالة $f$ المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$

و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

- برهن أنه إذا كان $x>1$ فإن $f(x)>1$

2) نعرف المتتالية $(u_n)$ كما يلي : $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=f(u_n)$




أ) باستعمال الشكل المقابل, مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية $(u_n)$

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n>1$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتاليتين $(v_n)$ و $(w_n)$ المعرفتين بـ :

من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ $v_n=1-\dfrac{1}{u_n}$ و $w_n=ln(v_n)$

أ) برهن أن $(w_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) اكتب عبارة $w_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $v_n$ بدلالة $n$

ج) بين أن $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) احسب بدلالة $n$ الجداء $P_n$ حيث: $P_n=v_0\times v_1\times............\times v_n$

ثم استنتج بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n=w_0+w_1+............+w_n$ .



الأستاذين: بلقاسم ع/مالجي ح

## التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

1) أ) عيـن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z_1$ حيث $z_1 = 3+4i$

ب) حـل فـي مجمـوعـة الأعـداد المركبـة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب $z$ : $(z^2+1)(z^2-3-4i)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A$ ، $B$ ، $C$ ، $D$ و $E$ التي لواحقها على الترتيب $z_A = 2+i$ ، $z_B = 2-i$ ، $z_C = i$ ، $z_D = -i$ و $z_E = -3i$ على الترتيب

أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي .

ب) استنتج طبيعة المثلث $ABC$

3) أ) عيـن العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$ الذي يحقق $S(C)=C$ و $S(A)=B$ محددا نسبته وزاويته

ب) عين صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه $S$

جـ) استنتج مساحة المثلث $BCE$ بالتشابه $S$

4) أ) عيـن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث $iz = 1+2ie^{i\theta}$ لما $\theta$ يمسح المجموعة $\mathbb{R}$

ب) بين أن النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$

## التمرين الرابع: ( 07 نقاط )

$I$) لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x) = 1+x+e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة $g$

2) برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا $\alpha$ . تحقق أن $\alpha$ من المجال $]-1.3;-1.2[$ .

3) حدد تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ .

$II$) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي $(\Gamma)$ المنحنى البياني لها .

1) أ) أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة $f$ .

ب) برهن أن $f(\alpha) = 1+\alpha$ . .

جـ) برهن أن المنحنى $(\Gamma)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته : $y = x$ .

د) اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة $O$ مبدأ المعلم ، ثم ادرس وضعية $(\Gamma)$ بالنسبة للمماس $(T)$ .

هـ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى $(\Gamma)$ و $(\Delta)$ (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

2) $H$ نقطة فاصلتها $x$ (حيث $x \succ 0$ ) وترتيبها معدوم ، المستقيم الموازي للمحور $(yy')$ والمار من $H$ يقطع $(\Gamma)$ في النقطة $M$ ويقطع المقارب $(\Delta)$ في النقطة $N$ ، نضع $\varphi(x) = MN$ .

أ) بين أن $\varphi(x) = \frac{x}{1+e^x}$ . ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $\varphi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cdot g(-x)$ .

واستنتج أن $MN$ يكون أكبر ما يمكن عندما $x = -\alpha$ .

جـ) برهن أن $f(-\alpha) = 1$ .

د) برهن أن المماس للمنحنى $(\Gamma)$ عند النقطة $A$ ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم $(\Delta)$. اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x + m + x = 0$ .

4) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \geq 1$ لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$ .

ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\Gamma)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=-\alpha$ .

## تصحيح التمرين 01:

**1) حساب $P(A)$ و $P(B)$**

عدد عناصر مجموعة الإمكانيات هو

$$card(\Omega)=A_{10}^{2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times8!}{8!}=\boxed{90}$$

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{A_2^2}{90}=\boxed{\frac{1}{45}}$$

$$P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{2\left(A_8^1\times A_2^1\right)}{90}=\boxed{\frac{16}{45}}$$

**2) أ) تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$:**

يمكن سحب بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية أو سحب بطاقتان تتعلقان بمادة الرياضيات أو سحب بطاقة تتعلق باللغة الفرنسيةواخرى بالرياضيات أوسحب بطاقة تتعلق بالرياضيات وأخرى تتعلق بالفرنسية ومنه $\boxed{X\in\{0,1,2\}}$

**ب) تعيين قانون إحتمال المتغير العشوائي $X$**

$$P(X=0)=\frac{A_8^2}{90}=\boxed{\frac{28}{45}}\ ،$$

$$P(X=1)=P(B)=\boxed{\frac{16}{45}}$$

$$P(X=2)=P(A)=\boxed{\frac{1}{45}}$$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي $X$:

| $X$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{28}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{1}{45}$ |

**جـ) حساب الأمل الرياضي والإنحراف المعياري:**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP_i=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\boxed{\frac{18}{45}}$$

$$V(X)=\left[\sum_{i=i}^{3}(x_i)^2P_i\right]-E(X)^2$$

$$=0^2\times\frac{28}{45}+1^2\times\frac{16}{45}+2^2\times\frac{1}{45}-\left(\frac{18}{45}\right)^2=\boxed{\frac{64}{225}}$$

ومنه الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$ هو :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx\boxed{0,53}$$

## تصحيح التمرين 02:

**1) البرهان على أنه إذا كان $x>1$ فإن $f(x)>1$**

لندرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

* $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)=\boxed{+\infty}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

* الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و من

أجل كل $x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ : $f'(x)=\boxed{\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}}$

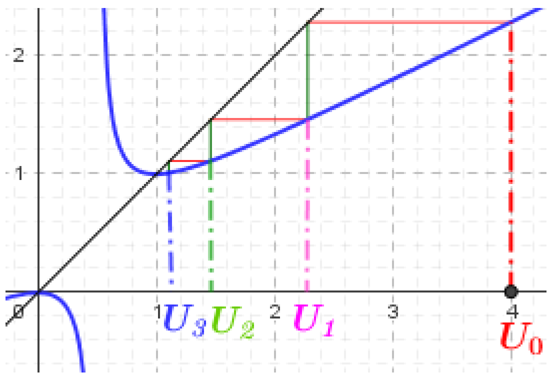
إشـارة المشتقة:

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |

ومنه الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

وبما الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$، فهي تحافظ على ترتيبها معناه من أجل كل $x>1$ فإن $f(x)>f(1)$ أي $\boxed{f(x)>1}$

**2) أ) تمثيل الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_3$ و $u_4$ على محور الفواصل :**




التخمين: المتتالية $(u_n)$ متناقصة تمـامـا ومتقـاربة نحو 1

**3) أ) البرهـان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n>1$**

نسمي $p(n)$ الخـاصيـة : $u_n>1$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=4$ أي $4>0$

ومنـه $p(0)$ صحيحـة .

نفـرض أن $p(n)$ صحيحـة من أجـل عـدد طبيعـي $n$

أي $u_n > 1$ ونبرهـن صحـة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 1$.

لدينـا $u_n > 1$ ومنـه $\boxed{f(u_n) > 1}$

(لأن الدالة $f$ متزايدة على $]1,+\infty[$ فهي تحافظ على ترتيبها

أي من أجل كل $x_1 < x_2$ يكون $f(x_1) < f(x_2)$ )

أي $u_{n+1} > 1$ وهـذا يعنـي أن $p(n+1)$ صحيحـة

اذن: $\boxed{p(n) \text{ صحيحـة من أجـل كل عدد طبيعي } n}$

ب) تبيين أنه من أجل كل $n$ من $\mathbb{N}$،

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \boxed{\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1}}$$

* استنتـاج إتجاه تغيرالمتتالية $(u_n)$

من أجل كل عـدد طبيعي $n$ لدينا : $u_n > 1$ ومنـه

$1 - u_n < 0$ و $2u_n - 1 > 0$ وبالتالي فإن $u_n(1-u_n) < 0$

ومنه $\dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n - 1} < 0$ أي $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$

ومنه المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما .

* استنتـاج أن $(u_n)$ متقاربة : بمـأن $(u_n)$ متناقصة

تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن $(u_n)$ متقـاربة .

أ-) البرهـان على أن $(w_n)$ متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$$w_{n+1} = ln(v_{n+1}) = ln\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = ln\left(1 - \frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right)$$

$$= ln\left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2}\right) = ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n^2}\right)$$

$$= ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2ln(v_n) = \boxed{2w_n}$$

ومنه $(w_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول

$$w_0 = ln(v_0) = ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

ب) كتابة عبـارة $w_n$ بدلالة $n$:

لدينا $w_n = w_0 \times q^n = \boxed{2^n\, ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

استنتـاج $v_n$ بدلالة $n$ : لدينا : $w_n = ln(v_n)$ تكافيء

$v_n = e^{w_n}$ ومنه $v_n = e^{2^n ln\left(\frac{3}{4}\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

د) تبيين أن $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

$v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$ تكافئ $u_n = \dfrac{1}{1 - v_n}$ ومنه $u_n = \boxed{\dfrac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بمـأن $0 < \frac{3}{4} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = 0$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{1}$

5) حساب بدلالة $n$ الجداء $P_n$

لدينا : $P_n = v_0 \times v_1 \times ............ \times v_n$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2^1} \times ............ \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0 + 2^1 + ...... + 2^n}$$

لدينا $2^0 + 2^1 + ...... + 2^n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

وبالتالي فإن : $2^0 + 2^1 + ...... + 2^n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

ومنه $P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^0 + 2^1 + ...... + 2^n} = \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1} - 1}}$

استنتـاج بدلالة $n$ المجموع $S_n$

$$S_n = w_0 + w_1 + ............ + w_n$$
$$= ln(v_0) + ln(v_1) + ............ + ln(v_n)$$
$$= ln(v_0 \times v_1 \times ............ \times v_n)$$
$$= ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1} - 1}\right) = \boxed{(2^{n+1} - 1)\, ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

## تصحيح التمرين03:

أ- تعيين الجذران التربيعيان للعدد المركب $z_1$

ليكن $w=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ $z_1$ ومنه $w^2=z_1$

$w^2=z_1$ تكافئ $\begin{cases} x^2-y^2=3\\ x^2+y^2=5\\ 2xy=4\end{cases}$

تكافىء $x=2$ و $y=1$ أو $x=-2$ و $y=-1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب $z$ هما: $2+i$ و $-2-i$

ب) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $(z+1)^2(z^2-3-4i)=0....(I)$

(I) تكافىء $z^2+1=0$ أو $z^2-3-4i=0$

تكافىء $z=i$ أو $z=-i$ أو $z=2+i$ أو $z=-2-i$

2)أ) كتابة $z_2$ على الشكل الأسي

$$z_2=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{i-2-i}{2-i-2-i}=-i$$

ب) استنتاج طبيعة المثلث $ABC$: لدينا :

$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ومنه : $\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1\\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}$ أي :

$\begin{cases}AC=AB\\(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ إذن المثلث $ABC$ قائم في $A$

ومتساوي الساقين

3)أ) تعيين العبارة المركبة للتشابة المباشر $S$

العبارة المركبة للتشابه $S$ هي من الشكل $z'=az+b$

حيث $a$ و $b$ عددان مركبان و $a\neq0$

لدينا : $S(A)=B$ تكافىء $z_B=az_A+b$

و $S(C)=C$ تكافىء $z_C=az_C+b$

ومنه $a=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=1-i$ و $b=(1-a)z_C=-1$

اذن العبارة المركبة للتشابه $S$ هي $z'=(1-i)z-1$

تحديد نسبة وزاوية التشابه $S$: لدينا : $a=1-i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)}$

اذن نسبة التشابه المباشر $S$ هي $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

ب) تعيين صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه $S$

لدينا $S(A)=B$ ، لنعين صورة $B$ بالتشابه $S$

لدينا $z'_B=(1-i)z_B-1=(1-i)(2-i)-1=-3i=z_E$

اذن $S(B)=E$ وبالتالي فإن صورة القطعة المستقيمة

$[AB]$ بالتشابه $S$ هي القطعة المستقيمة $[BE]$

ج) استنتاج مساحة المثلث $BCE$ بالتشابه $S$

لدينا $S(A)=B$ , $S(C)=C$ و $S(B)=E$

ومنه صورة المثلث $ABC$ بالتشابه $S$ هي المثلث $BCE$

لدينا مساحة المثلث $ABC$ هي

$S_{ABC}=\frac{AC^2}{2}=\frac{|z_C-z_A|^2}{2}=2US$ وبالتالي فإن مساحة

المثلث $BCE$ هي $S_{BCE}=(\sqrt{2})^2S_{ABC}=4US$

4)أ) تعيين المجموعة $(\Gamma)$

$iz=1+2ie^{i\theta}$ تكافىء $-i(iz)=-i(1+2ie^{i\theta})$

تكافىء $z=-i+2e^{i\theta}$ تكافىء $z+i=2e^{i\theta}$

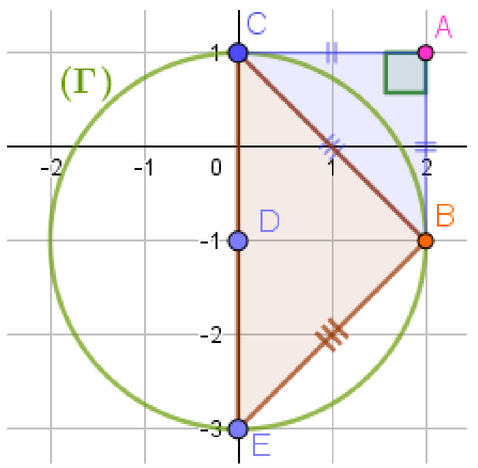
تكافىء $|z-z_D|=2$

اذن $(\Gamma)$ هي الدائرة التي مركزها $D$ ونصف قطرها $r=2$

ب) تبيين أن النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$

لدينا : $DE=|z_E-z_D|=|-3i-(-i)|=2=r$

محققة إذن : $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$



# تصحيح التمرين 04:

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+x+e^x$

1) * $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\boxed{-\infty}$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\boxed{+\infty}$

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=1+e^x \succ 0$

*جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

2) نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$:

* g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)\prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ في $\mathbb{R}$.

*لدينا: $g(-1.2)g(-1.3)=(-0.03)(0.10)\prec 0$

ومنه $-1.3\prec\alpha\prec-1.2$.

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | − | 0 | + |

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

* استنتاج إشارة $g(-x)$:

$g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ ومنه $x=-\alpha$.

$g(-x)\prec 0$ معناه $-x\prec\alpha$ ومنه $x\succ-\alpha$.

ومنه:

| $x$ | $-\infty$ | $-\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(-x)$ | + | 0 | − |

II) f معرفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{xe^x}{1+e^x}$

1) أ) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(1+e^x)-e^x(xe^x)}{(1+e^x)^2}=\boxed{\frac{e^x\cdot g(x)}{(1+e^x)^2}}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن: $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\succ 0$

إذن: الدالة $f$ متناقصة تماماعلى المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزايدة تماماعلى المجال $[\alpha;+\infty[$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{0}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)=\boxed{+\infty}$$

جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | 0 ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ $+\infty$ |

ب) نبرهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$ : لدينا $g(\alpha)=0$ معناه:

$1+\alpha+e^\alpha=0$ أي: $e^\alpha=-(1+\alpha)$ نعوض نجد:

$$f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{1+e^\alpha}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1}=\boxed{1+\alpha}$$

ج) نبرهن أن $(\Gamma)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته $y=x$ :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{1+e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\left(\frac{-1}{e^{-x}+1}\right)\right]=0$$

د) كتابة معادلة المماس $(T)$ لـ$(\Gamma)$ عند مبدأ المعلم: $(T): y=\frac{1}{2}x$

*الوضعية: ندرس إشارة الفرق $f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$

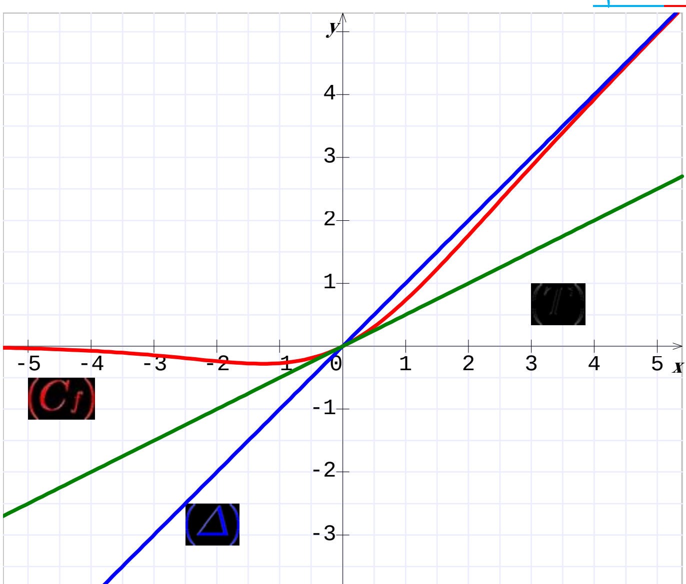
من إشارة الجداء $x(e^x-1)$ نجد :

من أجل $x\prec 0$ المنحنى $(\Gamma)$ فوق المستقيم $(T)$.

من أجل $x\succ 0$ المنحنى $(\Gamma)$ فوق المستقيم $(T)$.

من أجل $x=0$ يتقاطعان في النقطة $(0;0)$

هـ) الرسم:



2) أ) $\varphi(x)=MN=|x-f(x)|=\frac{x}{1+e^x}$ .

ب) من أجل $x\succ 0$ الدالة $\varphi$ قابلة للإشتقاق :

$$\varphi'(x)=\frac{(1+e^x)-xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x(e^{-x}+1-x)}{(1+e^x)^2}=\boxed{\frac{e^x\cdot g(-x)}{(1+e^x)^2}}$$

إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $g(-x)$

ومنه

| $x$ | $-\infty$ | $-\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\psi'(x)$ | $+$ | | $-$ |

نستنتج أن $\varphi(x)$ تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $x=-\alpha$

ومنه $MN$ يكون أكبر ما يمكن حيث

$$MN=\varphi(-\alpha)=\frac{-\alpha}{1+e^{-\alpha}}$$

ج) نبرهن أن $f(-\alpha)=1$ :

$$f(-\alpha)=\frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\frac{-\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{-\alpha}{-1-\alpha+1}=1$$

د) نبرهن أن المماس للمنحنى $(\Gamma)$ عند A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي $(\Delta)$ :

$$f'(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}\cdot g(-\alpha)}{(1+e^{-\alpha})^2}=\frac{e^{-\alpha}(1-\alpha+e^{-\alpha})}{e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}+1}$$

ولدينا : $e^{\alpha}=-1-\alpha$ نعوض نجد:

$$f'(-\alpha)=\frac{e^{-2\alpha}(e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1)}{e^{-2\alpha}(1+2e^{\alpha}+e^{2\alpha})}$$

$$=\frac{-1-\alpha-\alpha(-1-\alpha)+1}{1+2(-1-\alpha)+(-1-\alpha)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\boxed{1}$$

معادلته: $(\Delta'):y=x+\alpha+1$

3) مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة حسب قيم الوسيط $m$:

$me^x+m+x=0$ يكافئ $m=\frac{-x}{(e^x+1)}$

أي أن $m+x=\frac{-x}{1+e^x}+x$ معناه $f(x)=x+m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $(C_f)$

مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$: الموازي لـ$(\Delta')$ و$(\Delta)$:

* $m\in]-\infty;\alpha+1[$ المعادلة: لا تقبل حلول

* $m=\alpha+1$ المعادلة تقبل: حل مضاعف موجب

* $m\in]\alpha+1;0[$ المعادلة تقبل: حلين متمايزين موجبين تماما.

* $m=0$ المعادلة تقبل: حل وحيد معدوم

* $m\in]0;+\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما.

4) أ) البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x\geq 1$

لدينا $\frac{e^x}{1+e^x}\le f(x)\le x$ : ندرس إشارة الفرق نجد:

$f(x)-x=\frac{xe^x}{1+e^x}-x=\frac{-x}{1+e^x}\le 0$ معناه: $f(x)\le x$ ... (1)

من جهة أخرى ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{xe^x-e^x}{1+e^x}=\frac{e^x(x-1)}{1+e^x}\ge 0$$

معناه: من أجل $x\ge 1$: $f(x)\ge\frac{e^x}{1+e^x}$ ... (2)

من (1) و(2) نجد: من أجل $x\ge 1$ : $\frac{e^x}{1+e^x}\le f(x)\le x$

ب) إيجاد حصر لمساحة الحيز المستوي المحدد بـالمنحنى $(\Gamma)$

والمستقيمات $x=1;y=0$ و $x=-\alpha$ : بمأن:

$\frac{e^x}{1+e^x}\le f(x)\le x$ فإن: $\int_1^{-\alpha}\frac{e^x}{1+e^x}dx\le\int_1^{-\alpha}f(x)dx\le\int_1^{-\alpha}xdx$

أي: $\left[\ln(1+e^x)\right]_1^{-\alpha}\le\int_1^{-\alpha}f(x)dx\le\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{-\alpha}$

ومنه $\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right)u.a\le\int_1^{-\alpha}f(x)dx\le\frac{1}{2}(\alpha^2-1)u.a$ .

نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 05 — التحضير الجيد للبكالوريا

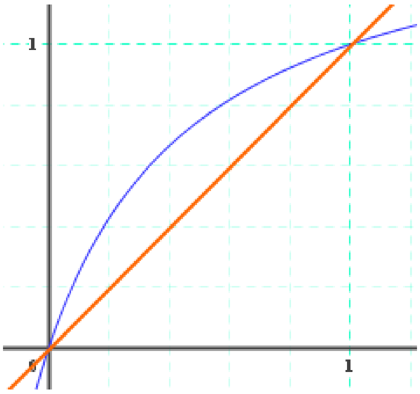
الشعبة : 3 علوم تجريبية — دورة : ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

## التمرين الأول: ( 04 نقاط )

الشكل التالي هو التمثيل البياني $(C_f)$ للدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$

و $(d)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$




1) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\dfrac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) مثل على محور الفواصل الحدود $u_0\,;u_1\,;u_2\,;u_3$ للمتتالية $(u_n)$ دون حسابها .مبرزا خطوط التمثيل .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها.

2) أ) اثبت من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\prec u_n\prec 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\dfrac{1-u_n}{2u_n}$

أ) بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول $v_0$

ب) اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ واستنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ .ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ والجداء $P_n$ حيث: $S_n=v_0+2\,v_1+2^2\,v_2+..+2^n\,v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$ .

## التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2+2|z|^2-\dfrac{3}{4}=0\quad\ldots.(E)$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

2) لتكن $A$ , $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$z_A=\dfrac{-1}{2}$ ، $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$

أ) اكتب كلا من العددين $z_A+z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي .

ب) بين أن : $z_C^{\,2018}.(z_A+z_B)^{1439}=z_A+z_B$

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $A$ وزاويته $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ونسبته $k=2$

أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$.

ب) أوجد لاحقتا النقطتين $B'$ و $C'$ صورتا النقطتين $B$ و $C$ على الترتيب بالتشابه المباشر $S$.

4) بين ان المبدأ $O$ هو مركز ثقل المثلث $ABC$ ثم عين مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$$

5) أنشئ النقطة $H$ ذات اللاحقة $z_H$ حيث: $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب .



الأستاذين: بلقاسم ع /مالجي ح

## التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

يحتوي صندوق $U_1$ على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق ( علما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس ).

1) احسب احتمالات الأحداث الآتية :

$A$ : " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء ". $B$ : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون ".

$C$ : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

2) أ) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها .

- أحسب كلا من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج $P(X=2)$ .

ب) اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، و يكسب $25\ DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .هل اللعبة مربحة له؟

3) نعتبر صندوقا آخر $U_2$ يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق $U_1$ في الصندوق $U_2$ ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من $U_2$ .

- احسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من $U_2$ بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من $U_1$ لها نفس اللون

## التمرين الرابع: ( 07 نقاط )

I) $h$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=x^2-\ln x^2$

- ادرس اتجاه تغير الدالة $h$، استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $h(x)>0$ .

II) $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ . ب) احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم : $2x^2f'(x)=-h(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ .

3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ .ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0.3;0.4[$ .

- استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر $\beta$ يطلب تعيين حصر له .

4) أ) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ يوازيان المستقيم $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ $(\Delta)$، $(T_1)$، $(T_2)$ و $(C_f)$ .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $(E)...f(x)=-\frac{1}{2}x+m$

5) لتكن $k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$ ، $(C_k)$ تمثيلها البياني .

- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى $(C_f)$ إلى المنحنى $(C_k)$ (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة $F$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}^*$

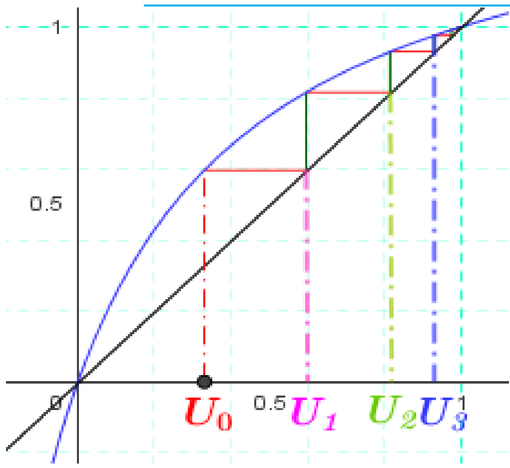
ب) اوجد الدالة الأصلية للدالة $f$ والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) $\lambda$ عدد حقيقي حيث: $\lambda\succ 1$ . أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ وفسر النتيجة هندسيا.

- أحسب $\lim_{x\to+\infty} A(\lambda)$ .

## تصحيح التمرين 01:

**1) أ)** تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$:




**ب)** وضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ و تقاربها:

المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ومتقاربة

**2) أ)** اثبات من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0<u_n<1$

نبرهن البرهان بالتراجع

① من أجل $n=0$: $0<u_0<1$ محققة لان: $u_0=\frac{1}{3}$

② نفرض أنه من أجل عدد طبيعي $n$: $0<u_n<1$ صحيحة

ونبرهن ان: $0<u_{n+1}<1$

لدينا: $0<u_n<1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(0)=0\ ;\ f(1)=1$

بما أن $f$ متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$

ومنه: $0<u_{n+1}<1$.

من ① و ② نستنتج حسب البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $\boxed{0<u_n<1}$

**ب)** دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ واستنتاج أنها متقاربة:

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n^2+2u_n}{2u_n+1}=\boxed{\frac{-2u_n(u_n-1)}{2u_n+1}}$

بما أن: $0<u_n<1$ فإن $u_n-1<0$، ومنه: $u_{n+1}-u_n>0$

نستنتج أن $(u_n)$ متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$

لأنها: محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.

**حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3u_n}{2u_n+1}$ يكافئ $\ell=\frac{3\ell}{2\ell+1}$ يكافئ $\frac{-2\ell(\ell-1)}{2\ell+1}=0$

ومنه $\ell=0$ (مرفوض) أو $\boxed{\ell=1}$ (مقبول لأن المتتالية $(u_n)$ محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما)، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\boxed{1}$

**3) أ)** نبين أن $(v_n)$ متتالية هندسية :

لدينا: $v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}}=\frac{1-\frac{3u_n}{2u_n+1}}{2\left(\frac{3u_n}{2u_n+1}\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1-u_n}{2u_n}\right)=\boxed{\frac{1}{3}v_n}$

ومنه $(v_n)$ م.هـ أساسها $q=\boxed{\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1-u_0}{2u_0}=1$

**ب)** كتابة $v_n$ بدلالة $n$ واستنتاج $u_n$ بدلالة $n$: $v_n=v_0q^n=\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

لدينا $u_n=\frac{1}{2v_n+1}$ ومنه $u_n=\boxed{\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

**ج)** حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ و الجداء $P_n$:

$$S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+\dots+2^nv_n=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

هومجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول يساوي 1 وأساسها $\frac{2}{3}$ ومنه:

$$S_n=1\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]=\boxed{3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\dots\times v_n$$
$$=v_0\times(v_0q)\times(v_0q^2)\times\dots\times(v_0q^n)$$
$$=(v_0)^{n+1}\times q^{0+1+2+\dots+n}=(1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

## تصحيح التمرين 02:

**1)** نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$: $z^2+2|z|^2-\frac{3}{4}=0$:

ليكن $z=x+iy$ حيث: $x\ ;y$ عددان حقيقيان

$(E)$ تكافئ $(x+iy)^2+2(x^2+y^2)-\frac{3}{4}=0$ تكافئ

$3x^2+y^2-\frac{3}{4}+2xyi=0$ تكافئ $\begin{cases}3x^2+y^2-\frac{3}{4}=0 & \dots(1)\\ 2xy=0 & \dots(2)\end{cases}$

(2) تكافئ $x=0$ أو $y=0$ ثم بالتعويض في المعادلة (1)

من أجل: $x=0$ يكون: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل: $y=0$ يكون: $x=\frac{1}{2}$ أو $y=-\frac{1}{2}$

ومنه: $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

**2) أ) كتابة كلا من العددين $z_A+z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي**

$z_A+z_B=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}}$ ، $z_C=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}}$

**ب) نبين أن :** $z_C^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=z_A+z_B$

$z_C^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=\left(-(z_A+z_B)\right)^{2018}(z_A+z_B)^{1439}$

$=(z_A+z_B)^{3457}=e^{i\left(\frac{2\times3457\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{6912+2\pi}{3}\right)}=e^{i\left(2304+\frac{2\pi}{3}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\boxed{z_A+z_B}$

**3) أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر** $S\left(A;2;\frac{\pi}{2}\right)$:

$z'-z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ ومنه: $\boxed{z'=2iz-\frac{1}{2}+i}$

**ب) إيجاد لاحقتا النقطتين $B'$ و $C'$ صورتا النقطتين $B$ و $C$ على الترتيب بالتشابه المباشر $S$:**

$z_{B'}=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i$ ، $z_{C'}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+2i$

**4) نبين ان المبدأ $O$ هو مركز ثقل المثلث $ABC$:** لاحقة مركز ثقل المثلث $ABC$ هي: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\boxed{0=z_O}$

**نعين $(\mu)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق :**

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ ،

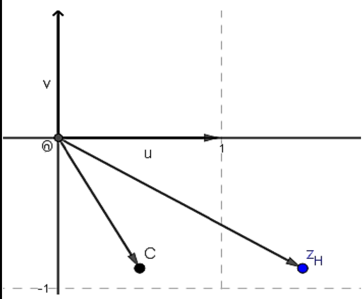
$M\in(\mu)$ معناه $3\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\right)=0$

معناه $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}=0$

ومنه: $(\mu)$ هي مستقيم يشمل المبدأ وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$

لاحقته: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ معادلته $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

**4) إنشاء النقطة $H$ ذات اللاحقة $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب:**




لدينا: لاحقة الشعاع $\vec{u}$ هي 1،

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OC}$ هي $e^{i\frac{-\pi}{3}}$

ومنه: $\overrightarrow{OH}=\vec{u}+\overrightarrow{OC}$ ،

الشعاع $\overrightarrow{OH}$ هو محصلة

الشعاعين $\overrightarrow{OC}$ و $\vec{u}$

# تصحيح التمرين03:

عدد الحالات الممكنة : $C_9^3=84$

**1) حساب احتمال الأحداث:**

$p(A)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}\approx0.07$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}\approx0.06$

الحدث $C$ : سحب كرة بيضاء على الأقل

الحدث $\overline{C}$ : عدم سحب كرة بيضاء

ط1: $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{74}{84}}\approx0.88$

ط2: $p(C)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\boxed{\frac{74}{84}}\approx0.88$

**2) أ) حساب $p(X=1)$ و $p(X=3)$ ثم استنتاج $p(X=1)$:**

قيم المتغير العشوائي $X$ هي : 3;2;1

$X=1$: " سحب 3 كرات بلون واحد "

$p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{5}{84}}$

$X=3$: " سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة "

$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\boxed{\frac{24}{84}}$

$X=2$: " سحب 3 كرات بلونين مختلفين "

$(B;B;\overline{B})$ أو $(N;N;\overline{N})$ أو $(R;R;\overline{R})$

ط1: $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\boxed{\frac{55}{84}}$

ط2: $p(X=2)=1-\left[p(X=3)+p(X=1)\right]=\boxed{\frac{55}{84}}$

**ب)** ليكن $Y$ متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه : $-25;0;+25$ ،

$E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\boxed{\frac{475}{84}}\approx5.65$

بماأن : $E(Y)\succ0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب

**3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من $U_2$ بيضاوين علماأن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:**

ليكن الحدث $F$: سحب كرتان من $U_2$ بيضاوين

لدينا: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

$$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$$

ومنه: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\boxed{\frac{41}{75}}\approx 0.55$

## تصحيح التمرين 04:

I) $h$ دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

دراسة اتجاه تغيرالدالة $h$: $h$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث $h'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $h'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ |

الدالة $h$ متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1;0[$ ، $[1;+\infty[$

لدينا: $\lim_{|x|\to+\infty}h(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0}h(x)=+\infty$ و $h(-1)=h(1)=1$

اذن: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $h(x)\succ0$

II) $f$ معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac12\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac2x\right)$

1) أ) حساب:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac12\left(-\left(\frac{2\ln|x|}{x}\right)^{\nearrow0}-x^{\nearrow+\infty}-\left(\frac2x\right)^{\nearrow0}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac12\left(\left(\frac{2\ln|x|}{-x}\right)^{\nearrow0}-x^{\nearrow-\infty}-\left(\frac2x\right)^{\nearrow0}\right)=\boxed{+\infty}$$

ب) حساب:

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac12.\left(\frac1x\right)^{\nearrow+\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac12.\left(\frac1x\right)^{\nearrow-\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=\boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجة بيانيا: $(C_f)$يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

2) أ) نبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $2x^2f'(x)=-h(x)$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac12\left[-\frac{\frac{2x}{x^2}x-1.\ln(x^2)}{x^2}-1+\frac2{x^2}\right]=\frac{-2+\ln(x^2)-x^2+2}{2x^2}$$

ومنه: $2x^2f'(x)=-(x^2-\ln(x^2))=\boxed{-h(x)}$ ، $f'(x)=\boxed{\frac{-h(x)}{2x^2}}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)\prec0$ ومنه:

الدالة $f$ متناقصة تماما على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $B$ | $0$ | $\alpha$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | ‖ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $3/2$ | $0$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $0$ | $-3/2$ | $-\infty$ |

ج) نبين أن $(\Delta): y=-\frac12x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac12x\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac12\left[-\frac{2\ln|x|}{x}-\frac2x\right]=0$$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac12x$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$

دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$: ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(-\frac12x\right)=\frac12\left[\frac{-\ln x^2-2}{x}\right]$$

$f(x)-\left(-\frac12x\right)=0$ يكافئ $-\ln x^2-2=0$ و $x\neq0$

يكافئ $\ln x^2=-2$ يكافئ $x^2=e^{-2}$ يكافئ $x=\frac1e$ أو $x=-\frac1e$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac1e\approx-0.37$ | | $0$ | | $\frac1e\approx0.37$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\ln x^2-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-1}{e};0.18\right)\right\}$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | ‖ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac1e;-0.18\right)\right\}$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

3) أ) التحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$:

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(x)+f(-x)=\frac12\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac2x\right)+\frac12\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+x-\frac2{-x}\right)=0$$

نستنتج أن الدالة $f$ فردية .

تفسيرالنتيجة بيانيا: النقطة $O$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

ب) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0.3;0.4[$

لدينا: الدالة $f$ معرفة ومستمرة (قابلة للإشتقاق) ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]0.3;0.4[$

و $f(0.4)\times f(0.3)\prec0$ ، $f(0.3)\approx0.53$ ; $f(0.4)\approx-0.41$

حسب مبرهنة ق المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

$\alpha$ على $]0.3;0.4[$ حيث $f(\alpha)=0$

استنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر $\beta$ يطلب تعيين حصرا له: بما أن النقطة $O$ مركز تناظر لـ $(C_f)$ و المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0.3;0.4[$ فإن $(C_f)$ يقطع حامل محورالفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ ويقطعه كذلك في نظيرتها فاصلتها $\beta$ بالنسبة للنقطة $O$ حيث $0.3 \prec \alpha \prec 0.4$ و عليه يكون $-0.4 \prec \beta \prec -0.3$

4) أ) نبين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ يوازيان المستقيم $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلتيهما: $f'(x_0)=\frac{-1}{2}$

$\frac{-\left(x_0^2-\ln\left(x_0^2\right)\right)}{2x_0^2}=\frac{-1}{2}$ يكافئ $\ln\left(x_0^2\right)=0$ ومنه: $x_0=1$ أو $x_0=-1$

ومنه: $(T_1): y=\frac{-1}{2}x+1$ ، $(T_2): y=\frac{-1}{2}x-1$

ب) إنشاء $(\Delta)$ ، $(T_1)$ ، $(T_2)$ و $(C_f)$:

ج) مناقشة بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة $(E)$: هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m)$ حيث: $(\Delta_m): y=-\frac{1}{2}x+m$

| $m$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد و إشارة حلول $(E)$ | حل وحيد سالب | حل مضاعف موجب + حل سالب | حلين موجبين + حل سالب | حلين مختلفين في الإشارة | حل موجب + حلان سالبان | حل موجب + حل مضاعف سالب | حل وحيد موجب |

5) نبين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $(C_f)$ إلى $(C_k)$

$D_k=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$

بما أن: $k(x)=\boxed{f(x+1)+2}$ فإن $(C_k)$ هو صورة $(C_f)$ بانسحاب شعاعه : $\vec{V}=\boxed{-\vec{i}+2\vec{j}}$

6) أ) نبين ان الدالة $F$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)$

تكون $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$ إذا كانت الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $F'(x)=f(x)$

لدينا: الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{4}.2\ln\left(x^2\right).\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}-\frac{2}{x}\right)=f(x)$$

ومنه: $F$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$

ب) إيجاد الدالة الاصلية للدالة $f$ والتي تنعدم من أجل $x=1$:

بما أن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ فإنها تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}^*$ من الشكل: $x \to F(x)+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي.

$F(1)+c=0$ يكافئ $c=\frac{1}{4}$ ومنه الدالة الاصلية للدالة $f$ والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدالة:

$$x \to \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)+\frac{1}{4}$$

ج) حساب التكامل: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ حيث $\lambda \succ 1$

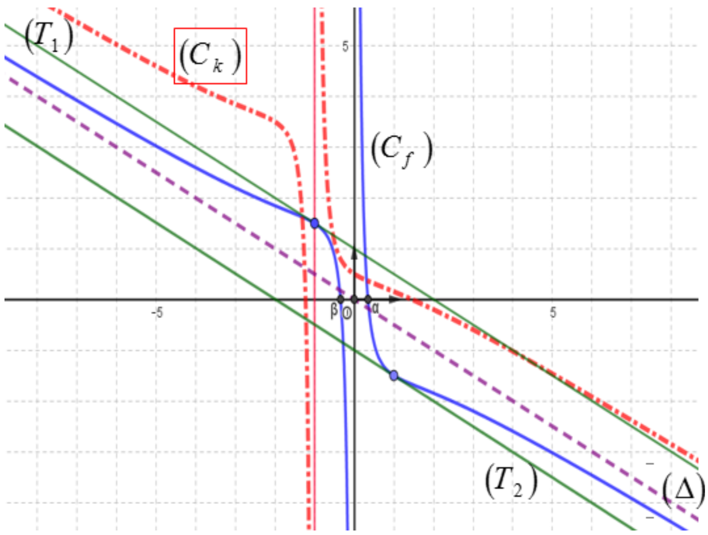
$$A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)\right]_1^{\lambda}$$

$$=\boxed{\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\quad (u.a)}$$

تفسيرالنتيجة هندسيا: $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\,;x=\lambda\,;y=0$

$$\lim_{x\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\right)=+\infty$$




نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 06 . التحضير الجيد للبكالوريا

الشعبة : 3 علوم تجريبية دورة : ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 03 سا و 30 د

## التمرين الأول: ( 04 نقاط )

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ : $(z-i)(z^2+2z+2)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ . النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ لواحقها : $z_A=i$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1-i$ ، $z_D=1-2i$ على الترتيب .

أ) تحقق أن النقطة $D$ مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$ .

ب) اكتب العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي، ثم فسّر النتيجة هندسيا . برّر طبيعة الرباعي $ABCD$ .

ج) اكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ، ثم أحسب $(-4+4i)^{2018}$ .

3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن $B$ ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\dfrac{iz-4+2i}{z-2}$ .

أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$.

ب) بين أن : $AM'\times BM=4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ .

4) $(\Gamma)$ هي مجموعة النقط $M$ من المستوي بحيث: $\arg(z'-i)=\dfrac{\pi}{4}$ .

ـ تحقق أن النقطة $E$ ذات اللاحقة $z_E=2+i$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ ، ثم عين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ .

## التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر المستوي $(P)$ معادلته : $2x+y-2z+4=0$ و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$ .

1) أ) بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا . ب) تحقق أن $(P)$ هو المستوي $(ABC)$ .

2) أ) بيّن أن المثلث $ABC$ قائم .

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ المار بالنقطة $O$ و العمودي على $(P)$ .

ج) النقطة $K$ هي المسقط العمودي للنقطة $O$ على $(P)$ ، أحسب الطول $OK$ .

3) النقطة $G$ هي مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$

أ) احسب إحداثيات النقطة $G$ .

ب) احسب المسافة بين النقطة $G$ و المستوي $(P)$ .

4) $(\Gamma)$ هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

أ) عيّن طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة .

ب) ما طبيعة $(\Gamma)\cap(P)$ ؟ .

ج) احسب حجم رباعي الوجوه $GABC$ .

## التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : . $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

1) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 < u_n < 2$ .

2) ادرس رتابة المتتالية $(u_n)$ .

3) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .

4) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$ .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \leq 2 - u_n \leq (\frac{4}{5})^n$ ، ثمّ عيّن نهاية المتتالية $(u_n)$ من جديد

## التمرين الرابع: ( 08 نقاط )

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : . $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$

ب) عيّن نهايات الدالة $g$ عند $0$ و عند $+\infty$ .

2) أ) ادرس إتجاه تغيّر الدالة $g$ و شكل جدول تغيّراتها .

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x \in ]0;+\infty[$ .

II) لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ .

$(C)$ هو المنحني الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ .

1) احسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ .

3) بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار $+\infty$

- حدد وضعية المنحني $(C)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

4) ادرس إتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

5) اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C)$ عند النقطة $A(1;0)$ .

6) ارسم كلا من $(\Delta)$ ، $(T)$ و المنحني $(C)$ .

7) لتكن $(d_m)$ عائلات المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx - m$ ، حيث $m$ وسيط حقيقي

أ) تحقق أنّ جميع المستقيمات $(d_m)$ تمر بالنقطة $A$ .

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$ حتى يكون للمعادلة $f(x) = mx - m$ حلان متمايزان .

III) 1) باستعمال التكامل بالتجزئة ، بيّن أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$ .

2) احسب بـ $u.a$ مساحة الحيّز للمستوي المحدد بالمنحني $(C)$ و $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتهما :

$x = 1$ و $x = e$ ( يجب تقديم القيمة المضبوطة لمساحة الحيز .

## تصحيح التمرين 01:

1) حل المعادلة: (①) : $(z-i)(z^2+2z+2)=0 \quad ...(①)$

لدينا : $\begin{cases} z-i=0 \ ; \ \boxed{z=i} \\ z^2+2z+2=0 \ ...(♦) \end{cases}$

حلول المعادلة(♦) : $\Delta=-4=(2i)^2$ ومنه

$z_1=\dfrac{-2+2i}{2}=\boxed{-1+i}$ و $z_2=\overline{z_1}=\boxed{-1-i}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (①) هي $S=\{i\ ;-1-i\ ;-1+i\}$

2) أ) التحقق أن $D$ مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$ :

يكفي التحقق أن $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي

$$z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}=0$$

لدينا

$$z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}$$
$$=(z_A-z_D)-(z_B-z_D)-(z_C-z_D)$$
$$=z_A-z_B-z_C-z_D=i-2+1+i-1+2i=\boxed{0}$$

الخلاصة: $D$ مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

ب) كتابة العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي:

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}=\frac{1-2i-i}{2+1+i}=\frac{1-3i}{3+i}=\frac{-i(i+3)}{3+i}=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

التفسير الهندسي : $\left|\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right|=1$ يكافئ $AD=BC$

$\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ يكافئ $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD})=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \ / k\in\mathbb{R}$

طبيعة الرباعي $ABDC$: بما أن $AD=BC$ و $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

فإن الرباعي $ABDC$ مربع

لأن قطريه متساويين و متعامدين

ج) كتابة العدد $-4+4i$ على الشكل الأسي :

الشكل الاسي: لدينا: $|-4+4i|=|-4(1-i)|=|-4||1-i|=4\sqrt{2}$

لتكن $\theta$ عمدة لـ $-4+4i$ ومنه $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{-4}{4\sqrt2}=-\dfrac{\sqrt2}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}\end{cases}$

ومنه نجد: $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ إذن: $-4+4i=\boxed{4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}$

- حساب $(-4+4i)^{2018}$:

$$(-4+4i)^{2018}=\left(4\sqrt2e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{2018}=\left(4\sqrt2\right)^{2018}e^{\frac{6054\pi}{4}i}$$
$$=\left(4\sqrt2\right)^{2018}e^{\frac{3\pi}{2}i}=\boxed{\left(4\sqrt2\right)^{2018}(-i)}$$

3) أ) حساب $z'-i$:

$$z'-i=\frac{iz-4+2i}{z-2}-i=\frac{iz-4+2i-i(z-2)}{z-2}$$
$$=\frac{iz-4+2i+iz+2i}{z-2}=\boxed{\frac{-4+4i}{z-2}}$$

ب) اثبات أن : $AM'\times BM=4\sqrt2$

لدينا $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$ ، أي : $|z'-z_A|=\dfrac{|-4+4i|}{|z-z_B|}$ ،

ومنه : $AM'=\dfrac{4\sqrt2}{BM}$ أي : $AM'\times BM=4\sqrt2$

ومن جهة أخرى نجد : $\arg(z'-i)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-2}\right)$ ،

ومنه : $\arg(z'-z_A)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-z_B}\right)$ ، أي :

ومنه ، $\arg(z'-z_A)=\arg(-4+4i)-\arg(z-z_B)$ :

$$\arg(z'-z_A)+\arg(z-z_B)=\arg(-4+4i)$$

إذن : $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k \quad / k\in\mathbb{R}$ .

4) - التحقق أن $E$ تنتمي إلى $(\Gamma)$ :

لدينا $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z_E-2}=\dfrac{-4+4i}{2+i-2}=\dfrac{-4+4i}{i}=4+4i$

ومنه: $\arg(z'-i)=\arg(4+4i)=\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ (محققة)

**الخلاصة: النقطة $E$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma)$**

- تعيين طبيعة المجموعة $(\Gamma)$ :

$\arg(z'-i)=\dfrac{\pi}{4}$ يكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\dfrac{\pi}{4}$ و لدينا،

$(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\dfrac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})$ ومنه $\dfrac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{\pi}{4}$

ومنه $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه : مجموعة النقط $M$ من المستوي

هي : نصف المستقيم المفتوح $\left]BE\right)$ الذي رأسه $B$ و

الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $\left(\vec{u};\vec{w}\right)=\frac{\pi}{2}$ .

## تصحيح التمرين 02:

لدينا : $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$ .

1) أ) بيان أن النقط $C;B;A$ تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ حيث $\left(\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{-2}\right)$

معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه النقط $C;B;A$ تعيّن مستويا .

ب) التحقق أنّ $(P)$ هو المستوي $(ABC)$:

لدينا: $(P): 2x+y-2z+4=0$ ، و $A(3;2;6)$ .

بالتعويض : $6+2-12+4=0$ ، و منه: $A\in(P)$ .

بنفس الطريقة نبيّن أنّ: $B\in(P)$ و $C\in(P)$ . و منه

نستنتج أنّ المستوي $(P)$ هو $(ABC)$ .

2) أ) بيان أنّ المثلث $ABC$ قائم :

نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2=0$ ، إذن : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

و منه المثلث $ABC$ قائم في $A$ .

ب) كتابة تمثيل وسيطي لـ $(\Delta)$ المار بـ $O$ و يعامد $(P)$:

$(\Delta)$ يعامد $(P)$ أي : $\vec{n}(2;1;-2)$ يعتبر شعاع توجيه لـ $(\Delta)$ و منه التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ هو: $(\Delta):\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$ ; $t\in\mathbb{R}$

ج) حساب الطول $OK$ : بما أنّ $k$ هي المسقط العمودي لـ $O$ على $(P)$، إذن ستكون $k$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ مع $(P)$ .

لحساب إحداثيات النقطة $k$ نعوض تمثيل $(\Delta)$ في معادلة $(P)$ نجد : $2(2t)+t-2(-2t)+4=0$ ، أي :

$9t=-4$ ، و منه : $t=\frac{-4}{9}$ . و منه : $\boxed{K\left(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9}\right)}$ .

3) $G$ مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$:

أ) حساب إحداثي النقطة $G$ :

$$G\begin{cases}x=\frac{3(0)+1(3)+1(1)+1(4)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\\y=\frac{3(0)+1(2)+1(2)+1(-2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\z=\frac{3(0)+1(6)+1(4)+1(5)}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\end{cases}$$

و منه : $\boxed{G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)}$ .

ب) حساب المسافة بين النقطة $G$ و المستوي $(P)$ :

$$d(G;(P))=\frac{\left|\frac{4}{3}\times2+\frac{1}{3}\times1+\frac{5}{2}(-2)+4\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{\sqrt{9}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

، و منه : $\boxed{d(G;(P))=\frac{2}{3}}$ .

4) $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من الفضاء حيث:

$\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$ :

أ) تعيين طبيعة مجموعة النقط $(\Gamma)$ و عناصرها المميزة :

$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=5$ ، أي : $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{5}{6}$ ، و منه : $MG=\frac{5}{6}$ ،

إذن $(\Gamma)$ هي سطح كرة مركزها $G$ و نصف قطرها: $R=\frac{5}{6}$

ب) طبيعة $(\Gamma)\cap(P)$ :

بما أنّ : $d(G;(P))<R$ ، فإنّ : $(\Gamma)\cap(P)$ هي دائرة .

ج) حساب حجم رباعي الوجوه $GABC$:

$$V_{GABC}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h$$

حيث $S_{ABC}$ مساحة المثلث $ABC$ هي :

$$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{12}{2}=6\ .$$

$h$ : هي المسافة بين $G$ و $(P)$ ، و منه : $h=\frac{2}{3}$ .

إذن حجم الرباعي $GABC$ : $V_{GABC}=\frac{1}{3}\times6\times\frac{2}{3}$

ومنه: $V_{GABC}=\boxed{\frac{4}{3}(u.a)}$

# تصحيح التمرين 03:

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1} \end{cases}$ .

**1)** إثبات أنّه من أجل كل عدد $0<u_n<2$:

نضع : $P(n): 0<u_n<2$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي : $0<u_0<2$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$. أي نفرض أن $0<u_n<2$ صحيحة و نبين أن: $0<u_{n+1}<2$ .

- لدينا فرضا أنّ: $0<u_n<2$، إذن : $\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}>0$ ، أي : $u_{n+1}>0......(1)$ . يبقى أن نبيّن أنّ : $u_{n+1}<2$ .

نحسب $u_{n+1}-2$:

$$u_{n+1}-2=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-2=\frac{u_n^3+2-2u_n^2-2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^3-2u_n^2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2(u_n-2)}{u_n^2+1}$$

، بما أنّ: $u_n<2$ ،فرضا ، إذن : $u_n-2<0$ ، و منه : $u_{n+1}-2<0$، إذن : $u_{n+1}<2......(2)$

إذن من **(1)** و**(2)** فإن: $0<u_{n+1}<2$ . ومنه $P(n+1)$ صحيحة

خلاصة: من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن: $\boxed{0<u_n<2}$ .

**2)** دراسة رتابة المتتالية $(u_n)$: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$ :

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-u_n=\dfrac{u_n^3+2-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}=\dfrac{2-u_n}{u_n^2+1}>0$

، لأنّ : لدينا $u_n<2$ ، إذن : $2-u_n>0$ .

و منه $\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة على } \mathbb{N}}$ .

**3)** إستنتاج أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة و حساب نهايتها:

$(u_n)$ متزايدة وَ محدودة من الأعلى بـ 2 ، إذن هي متقاربة.

- نهاية $(u_n)$: $(u_n)$ متقاربة معناه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

لدينا: $u_{n+1}=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$ ، أي : $l=\dfrac{l^3+2}{l^2+1}$

ومنه : $l^3+l=l^3+2$ ، إذن : $\boxed{l=2}$ .

**4) أ)** بيان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$

نحسب الفرق $2-u_{n+1}$:

$$2-u_{n+1}=2-\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}=\frac{2u_n^2+2-u_n^3-2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1} .$$

نقارن النتيجة مع $\frac{4}{5}(2-u_n)$ :

$$\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)=(2-u_n)\left[\frac{u_n^2}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}\right]$$

$$=(2-u_n)\left(\frac{5u_n^2-4u_n^2-4}{5(u_n^2+1)}\right)=(2-u_n)\left(\frac{u_n^2-4}{5(u_n^2+1)}\right)$$

أي:

$$\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)=(2-u_n)\left(\frac{(u_n-2)(u_n+2)}{5(u_n^2+1)}\right)$$

$$=\frac{-(u_n-2)^2(u_n+2)}{5(u_n^2+1)}<0$$

إذن : $\boxed{2-u_{n+1}<\frac{4}{5}(2-u_n)}$.

**ب)** إثبات أنّ $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$

لدينا من السؤال أ) : $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$ ، إذن :

بالضرب نجد :

$$\begin{cases} 0\le 2-u_1\le\frac{4}{5}(2-u_0) \\ 0\le 2-u_2\le\frac{4}{5}(2-u_1) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 0\le 2-u_n\le\frac{4}{5}(2-u_{n-1}) \end{cases}$$

$$0\le(2-u_1)(2-u_2)\times\ldots\times(2-u_n)$$

$$\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-u_0)(2-u_1)\times\ldots\times(2-u_{n-1})$$ ،

بالإختزال نحصل على: $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-u_0)$ ، أي:

$0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-1)$ ، ومنه : $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ .

نهاية $(u_n)$: بما أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ ، حسب النهايات بالحصر: $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$ ، ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=2$

## تصحيح التمرين 04:

**الجزء الأول:** لدينا : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$ .

**1) التحقق أنّ :** $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$ :

$$(x-1)(3x^2+3x+2)$$
$$=3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2=3x^3-x-2$$

**ب) تعيين نهايات الدالة** $g$ :

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} g(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x^3-x-2\ln x+3\right)=\boxed{+\infty}$$

لأنّ : $\left(\lim_{x\to 0} x^3-x=0\right.$ و $\left.\lim_{x\to 0}-2\ln x=+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x^2-1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{3}{x}\right)=\boxed{+\infty}$$

لأنّ : $\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0\right.$ و $\left.\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0\right)$.

**2)أ) دراسة إتجاه تغير الدالة $g$ و تشكيل جدول تغيّراتها :**

الدالة $g$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x)=3x^2-1-\frac{2}{x}=\frac{3x^3-x-2}{x}=\frac{(x-1)(3x^2+x+2)}{x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(x-1)(3x^2+3x+2)$ .

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x^2+x+2$ | | $+$ | | $+$ | |
| $3x^3-x-2$ | | $-$ | | $+$ | |

**جدول التغيرات: :**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**ب) إستنتاج إشارة $g(x)$ :**

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ : $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، ( القيمة الصغرة لـ $g$ هي 3 ) .

**الجزء الثاني:** لدينا $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$ .

**1) حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و تفسير النتيجة هندسيا :**

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\boxed{-\infty}$ ، لأنّ: $\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x-1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x^2=0^+\end{cases}$.

التفسير$(C)$يقبل مقارب عمودي هو محور التراتيب بجوار$-\infty$

**2) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$$ .

**3) بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ مقارب لـ $(C)$ بجوار $+\infty$ :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$ ، و منه $(\Delta)$ مقارب مائل لـ $(C)$ بجوار$+\infty$ .

**الوضعية النسبية :** لدينا $f(x)-y=\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$ ،

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ ونلخصها في الجدول التالي:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

وعليه فإن: $x-1+\ln x\geq 0$ على المجال $[1,+\infty[$

و $x-1+\ln x\leq 0$ على المجال $]0;1]$.

من الجدول السابق نلخص الوضعية في الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| الوضعية | | $(C)$ يقع تحت $(\Delta)$ | $(C)$ يقطع $(\Delta)$ عند $(1;0)$ | $(C)$ يقع فوق $(\Delta)$ | |

**4) دراسة إتجاه تغير الدالة $f$ و تشكيل جدول تغيّراتها**

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=1+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x-1+\ln x)}{x^4}$$
$$=1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x^4-x^2+3x-2x\ln x}{x^4}$$

أي: $f'(x)=\dfrac{x\left(x^3-x-2\ln x+3\right)}{x^4}$

$=\dfrac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}=\boxed{\dfrac{g(x)}{x^3}}$

وَ منه: $\boxed{\text{إشارة } f'(x) \text{ من إشارة } g(x)}$.

**جدول تغيرات الدالة** $f$:

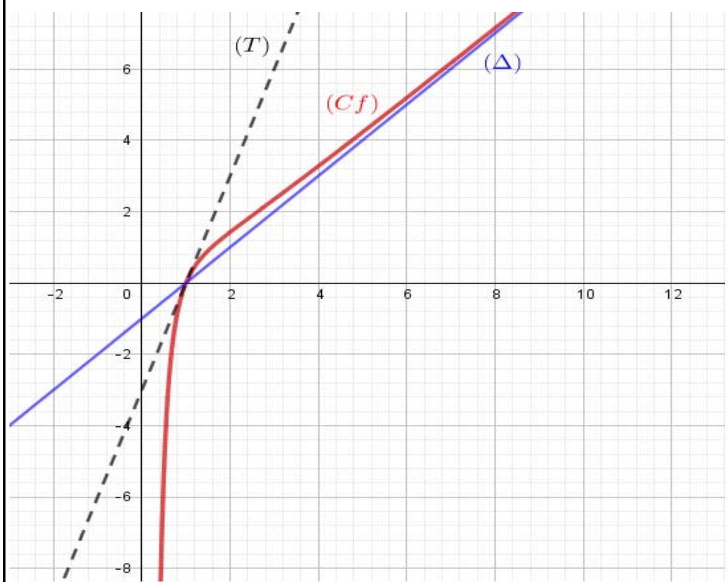
| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

**5)** كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحني $(C)$ عند النقطة $A(1;0)$:

$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي :

$(T): y=3(x-1)+0$ ، و منه : $(T): y=3x-3$ .

**6)** رسم كلا من $(T)$ و $(\Delta)$ و المنحني $(C)$:




**7)** لدينا $(d_m): y=mx-m$ :

**أ)** التحقق أنّ $(d_m)$ تمر بالنقطة $A$ : $0=m(1)-m$ أي :

$m-m=0$ ، و منه $A$ تنتمي إلى $(d_m)$ .

**ب)** المعادلة $f(x)=mx-m$ تقبل حلان متمايزان إذا

كان : $1<m<3$ .

حيث : $1$ هو معامل توجيه $(\Delta)$ و$3$ هو معامل توجيه $(T)$ .

**الجزء الثالث : 1)** بيان أنّ $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$ :

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\left(\underbrace{\ln x}_{v}\times\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e-\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}dx$$

أي :

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=\left(-\frac{\ln e}{e}-\frac{1}{e}\right)-\left(-\ln 1-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

و منه : $\displaystyle\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\boxed{1-\frac{2}{e}}$ .

**2)** حساب مساحة الحيّز :

$$A=\int_1^e\left[f(x)-y\right]dx=\int_1^e\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$$

أي:

$$A=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^e+\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

$$=\left(\ln e+\frac{1}{e}\right)-\left(\ln(1)+1\right)+\left(1-\frac{2}{e}\right)=1+\frac{1}{e}-1+1-\frac{2}{e}$$

و منه : $A=\boxed{1-\frac{1}{e}(ua)}$

نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر