سلسلة تمارين الدّرس -1- النهايات و الاستمرارية

النهايات

I. مفهوم النهاية و السلوك التقاربي لمنحني دالّة:

تطبيق01 : أثبت باستعمال التعريف أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x+1}=1$.

تطبيق02 : أثبت باستعمال التعريف أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}=+\infty$.

تطبيق03: لتكن f الدّالة المعرّفة على $\Re-\{-1;1\}$ بـ: $f(x)=2x+1-\frac{1}{x^2-1}$

1. بيّن أنّ (C_f) منحنى الدّالة يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)،
2. ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ).

تطبيق04 : نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{-x^2+3x+2}{x-2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أ. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $]2;+\infty[$:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

ب. استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

3. أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

II. حساب النهايات:

تطبيق01:احسب النهاية في كل حالة من الحالات التالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{2x^2+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^2-2x+1}$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x}}$ 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{x^2+x+1}}$ 6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x^2+\sqrt{x^4+1}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-\sqrt{1+x}\right]$ 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{1+x^2}\right]$ 9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]$
10. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\frac{2x}{x-3}$ 11. $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\frac{x-2}{1-x^2}$ 12. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\frac{-1}{2x^2+x-3}$
13. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{2x^2+x-3}$ 14. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ 15. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$ 16. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{3x}-3}$

تطبيق02:**(للطالب)** ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m النهايتين:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{1+x^2}-mx\right]$ 2. $\lim\limits_{x\to1}\frac{5mx^2+(1-2m)x+1}{x-1}$

III. نظريات حول النهايات:

تطبيق01: (نهاية دالة مركبة)

احسب 3. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ 1. $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}$

تطبيق02: (النهاية و المقارنة)

1. من اجل كلّ $x>0$ قارن بين $x\sqrt{2}$ و $\sqrt{2x^2+x+1}$.
2. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]$.

تطبيق03: (النهاية و المقارنة)-للطالب-

1. اثبت من اجل كلّ $x\geq1$ أنّ $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq1$
2. استنتج النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

تطبيق 03:(العدد المشتق)

1. احسب باستعمال تعريف العدد المشتق ما يلي:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$.

2. استنتج $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

تمرين (للطالب) احسب النهايات التّالية:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\sin\frac{1}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x.\sin x}{1-\cos x}$ 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x}$ 4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x.\sin x}$

الاستمرارية

نشاط:

لتكن f و g الدّالتان المعرّفتان على المجال $[-3;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+1 & ;\ x\in[-3;1[\\ f(x)=3-x & ;\ x\in[1;3] \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} g(x)=x^2-2 & ;\ x\in[-3;0[\\ g(x)=3-x & ;\ x\in[0;3] \end{cases}$$

1. احسب صور الاعداد 3-؛ 2-و2 بالدّالتين f و g .
2. ارسم C_f و C_g التمثيلين البيانيين للدّالتين f و g على الترتيب.
3. عيّن $f(1)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ثمّ $g(0)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} g(x)$ ؛ ماذا تستنتج؟
4. هل يمكن رسم C_g دون رفع القلم(اليد)؛ ماذا تستنتج؟

I. مفهوم الاستمرارية

تطبيق01:

f دالة معرفة على $\Re$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3+1}{x+1} & ;\ x\neq1 \\ f(-1)=3 \end{cases}$.

1. ادرس استمرارية الدّالة f عند1-.
2. هل الدّالة f مستمرة على $\Re$.

تطبيق02:

f دالة معرفة على $\Re$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=2x+\alpha & ;\ x>1 \\ f(x)=x^2+x & ;\ x\leq1 \end{cases}$

عيّن قيمة α حتى تكون الدّالة f مستمرّة عند 1.

تمرين للطالب:

نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\Re$ بـ: $\begin{cases} f(x)=0 & ;\ x\leq2 \\ f(x)=a-\frac{b}{x-1} & ;\ 2<x<6 \\ f(x)=1 & ;\ x\geq6 \end{cases}$

حدّد a و b اذا علمت أن f مستمرّة على $\Re$.

II. مبرهنة القيم المتوسطة:

تطبيق01: أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-2x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

تطبيق02: أثبت باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $2x^3-3x^2-1=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$

تطبيق03: نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بـ: $f(x)=2x^3+2x+3$

1. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;0]$،
2. أوجد حصرا للعدد α سعته 10^{-2}،