حلول تمارين الكتاب

النهايات و الإستمرارية

1- نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

حل التمرين 1 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$.

1) إيجاد عدد حقيقي A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2,9;3,1[$:

لدينا $2,9<f(x)<3,1$ ومنه $2,9\times\dfrac{x+1}{x+1}<\dfrac{3x-2}{x+1}<3,1\times\dfrac{x+1}{x+1}$ ، أي $2,9(x+1)<3x-2<3,1(x+1)$

ومنه $2,9(x+1)+2<3x<3,1(x+1)+2$ أي $2,9x+4,9<3x<3,1x+5,1$

ولدينا $3x-3,1x-5,1<0$ و $2,9x+4,9-3x<0$ ، ومنه $-0,1x<5,1$ و $-0,1x<-4,9$

إذن : $x>-\dfrac{5,1}{0,1}$ و $x>\dfrac{4,9}{0,1}$

أي أن $A=49$ ، لأن -51 لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة f .

2) إثبات أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=3$ مقارب للمنحنى C_f الممثل للدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=3$ مقارب لمنحنى الدالة f .

3) دراسة وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ :

لدينا : $f(x)-3=\dfrac{3x-2}{x+1}-3=\dfrac{3x-2-3x-3}{x+1}=\dfrac{-5}{x+1}$ ، أي $\dfrac{-5}{x+1}<0$

ومنه $f(x)-3<0$ ، إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم $(\Delta):y=3$.

حل التمرين 2 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$:

1) إيجاد عدد حقيقي A حيث إذا كان $x<A$ فإن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]0,9;1,1[$:

لدينا $0,9<f(x)<1,1$ ومنه $0,9\times\dfrac{x-1}{x-1}<\dfrac{x+1}{x-1}<1,1\times\dfrac{x-1}{x-1}$ ، أي $0,9(x-1)<x+1<1,1(x-1)$

ومنه $0,9(x-1)-1<x<1,1(x-1)-1$ أي $0,9x-1,9<x<1,1x+0,1$

ولدينا $x-1,1x-0,1<0$ و $0,9x-1,9-x<0$ ، ومنه $0,1x<0,1$ و $-1,9x<1,9$

إذن : $x<1$ و $x>-1$

أي أن $A=1$ ، لأن -1 لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة f .

2) إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى C_f الممثل للدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة f .

3) دراسة وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ :

لدينا : $f(x)-1=\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{x+1-x+1}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}$ ، أي $\dfrac{2}{x-1}>0$

ومنه $f(x)-1>0$ ، إذن : المنحنى C_f يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$.

حل التمرين 3 ص 26 ج1 :

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$:

لدينا حسب التعريف : نهاية l على $+\infty$ أو $-\infty$ يساوي الصفر

ولدينا هنا لمّا x يؤول إلى $+\infty$: 1 على $+\infty$ ناقص 1 يساوي حسب التعريف : 0 أي :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$.

حل التمرين 4 ص 26 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-3$:

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

لدينا حسب التعريف : نهاية $l>0$ في $+\infty$ تساوي $+\infty$.

ولدينا هنا لمّا x يؤول إلى $+\infty$: $2>0$ في $+\infty$ ناقص 3 يساوي حسب التعريف : $+\infty$ ، أي

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

حل التمرين 5 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $f(x)=\sqrt{1-x}$:

- إثبات باستعمال التعريف أن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$:

لدينا حسب التعريف بغض النظر عن الجذر : نهاية $l<0$ في $-\infty$ تساوي $+\infty$.

ولدينا هنا لمّا x يؤول إلى $-\infty$: 1 ناقص $-1<0$ في $-\infty$ يساوي حسب التعريف : $+\infty$ ، أي :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1-x}\right]=+\infty$.

حل التمرين 6 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}\right]=0=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

2) دراسة وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ :

لدينا $\frac{1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}-x=f(x)-(x)$ ، أي $\frac{1}{x-1}>0$

ومنه $f(x)-(x)>0$ ، إذن : المنحنى C_f يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=x$.

حل التمرين 7 ص 26 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى C_f عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-2x-1]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-1-\frac{2}{x^2+1}-2x-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{x^2+1}\right]=0$ ، و

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1-\frac{2}{x^2+1}-2x-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x^2+1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) دراسة وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى المستقيم Δ :

لدينا $f(x)-(2x-1)=2x-1-\frac{2}{x^2+1}-(2x-1)=-\frac{2}{x^2+1}$ ، أي $-\frac{2}{x^2+1}<0$

ومنه $f(x)-(2x-1)<0$ ، إذن : المنحنى C_f يقع أسفل المستقيم $(\Delta): y=2x-1$.

حل التمرين 8 ص 26 ج1 :

أ) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta): y=1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-1]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right]=0$ ، و

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right]=0$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-(1)=1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}-1=\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ، أي $\frac{1}{\sqrt{|x|}}>0$

ومنه $f(x)-(1)>0$ ، إذن : المنحنى C_f يقع فوق المستقيم $(\Delta): y=1$.

ب) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{3}$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

قاعدة :

f دالة معرفة بالشكل $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ ، لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحى الدالة يكفي حساب نهاية الجزء $\frac{c}{x+d}$ عند $-\infty$ أو عند $+\infty$

فإذا كانت النهاية تساوي الصفر فالمستقيم $y=ax+b$ مقارب لمنحى الدالة عند $-\infty$ أو عند $+\infty$.

لدينا في هذه الدالة: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta): y=-\frac{1}{3}$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{x^2}$ ، أي $-\frac{1}{x^2}<0$ إذن : المنحنى C_f يقع تحت $(\Delta): y=-\frac{1}{3}$

حل التمرين 9 ص 26 ج1 :

أ) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=2x+1+\frac{5}{x-3}$ حيث $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$، وليكن C_f تمثيلها البياني :

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta):y=2x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5}{x-3}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta):y=2x+1$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ،

وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5}{x-3}\right]=0$.

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-(2x+1)=2x+1+\frac{5}{x-3}-2x-1=\frac{5}{x-3}$ ، أي $\frac{5}{x-3}>0$ إذن : المنحنى C_f يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=2x+1$

ب) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{2}x$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$ ، و

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=0$ ، ومنه المستقيم

$(\Delta):y=-\frac{1}{2}x$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}x=\frac{x}{x^2-1}$ ، أي $\frac{x}{x^2-1}>0$ إذن : المنحنى C_f يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{2}x$.

حل التمرين 10 ص 26 ج1 :

أ) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=x+3-\frac{2}{|x|}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم:

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta):y=x+3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{|x|}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+3$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك

عند $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{|x|}\right]=0$.

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-(x+3)=x+3-\frac{2}{|x|}-x-3=-\frac{2}{|x|}$ ، أي $-\frac{2}{|x|}<0$ إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم $(\Delta):y=x+3$.

ب) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم:

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta):y=-x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sin x}{x}-x+1+x-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\neq 0$ ، و نفس الشيء عند $+\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ ليس بمستقيم مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$ وَ لا عند $+\infty$

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-(-x+1)=f(x)=\frac{\sin x}{x}-x+1+x-1=\frac{\sin x}{x}$ ، أي أنه لا يمكن تحديد إشارة $\frac{\sin x}{x}$

إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم $(\Delta):y=x+3$.

حل التمرين 11 ص 26 ج1 :

أ) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$ ، حيث $D_f=\mathbb{R}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا في هذه الدالة:

$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x-1}{1-2x}-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x-1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}-x^2-\frac{6x}{4}}{1-2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1-2x}\right]=0$ ومنه المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ ، وكذلك عند $+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\frac{1}{4}}{1-2x}\right]=0$.

- تحديد وضعية المنحنى C_f بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-(x+3)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=-\frac{\frac{1}{4}}{1-2x}$ ، أي $-\frac{\frac{1}{4}}{1-2x}<0$ إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم $(\Delta):y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

ب) لدينا f دالة معرفة بـ : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ ، وليكن C_f تمثيلها البياني في معلم :

- إثبات أن C_f يقبل المستقيم $(\Delta):y=x$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

لدينا في هذه الدالة: $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1-x^3+x^2}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1$

ومنه المستقيم $(\Delta):y=x$ ليس بمستقيم مقارب عند $-\infty$ ، و لا عند $+\infty$ لأن :

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1$.

- تحديد وضعية المنحنى بالنسبة إلى Δ :

لدينا $f(x)-x=\frac{x^3+1}{x^2-1}-x=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ ، أي $\frac{x^2+1}{x^2-1}>0$ إذن : المنحنى C_f يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=x$.

2- نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي :

حل التمرين 12 ص 26 ، 27 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=2x+3$ ، نريد دراسة سلوك $f(x)$ لمّا x يؤول إلى 2 :

1) وضع تخمين لسلوك $f(x)$ لمّا x يؤول إلى 2 :

عند حساب : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}[2x+3]=f(2)=2(2)+3=7$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة f هي 7 لمّا x يؤول إلى 2 . أي أن المنحنى الممثل للدالة f يشمل النقطة $(2;7)$.

2) إيجاد مجال بحيث لما ينتمي x إليه ، $f(x)$ ينتمي إلى $]6,99;7,01[$:

معناه $6,99<f(x)<7,01$ ، يكافئ $6,99<2x+3<7,01$ ، ومنه $3,99<2x<4,01$

يكافئ $1,995<x<2,005$

إذن: $x\in]1,995;2,005[$.

3) α عدد حقيقي حيث $0<\alpha<1$:

- إيجاد المجال الذي يجب أن ينتمي إليه x لمّا $f(x)$ ينتمي إلى $]7-\alpha;7+\alpha[$:

معناه $7-\alpha<2x+3<7+\alpha$ ، يكافئ $7-\alpha-3<2x+3-3<7+\alpha-3$ ، ومنه $4-\alpha<2x<4+\alpha$ ، و هذا يكافئ $\dfrac{4-\alpha}{2}<x<\dfrac{4+\alpha}{2}$ ،

إذن: $x\in\left]\dfrac{4-\alpha}{2};\dfrac{4+\alpha}{2}\right[$.

- عند اختيار α صغير بالقدر الذي نريد ، نجد $x=2$ ومنه نستنتج أن نهاية الدالة f هي 7 لمّا x يؤول إلى 2 . أي أن التخمين السابق صحيح .

حل التمرين 13 ص 27 ج1 :

- تخمين النهاية عند 4 للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$:

عند حساب : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\left[\dfrac{x+2}{x-2}\right]=f(4)=\dfrac{4+2}{4-2}=\dfrac{6}{2}=3$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة f هي 3 لمّا x يؤول إلى 4 .

- إيجاد مجال I مركزه 4 بحيث إذا كان $x\in I$ ، فإن $f(x)\in]2,95;3,05[$:

معناه $2,95<f(x)<3,05$ ، ومنه $2,95<\dfrac{x+2}{x-2}<3,05$ ، بضرب طرفي المتراجحة في $(x-2)$

نجد $2,95(x-2)<x+2<3,05(x-2)$ ، ومنه $2,95x-5,9<x+2<3,05x-6,1$ ،

يكافئ $\begin{cases}x+2>2,95x-5,9\\x+2<3,05x-6,1\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}1,95x<7,9\\2,05x>8,1\end{cases}$ ، أي $\begin{cases}x<4,05\\x>3,95\end{cases}$ ، يكافئ $3,95<x<4,05$

إذن: $x\in I=]3,95;4,05[$.

حل التمرين 14 ص 27 ج1 :

- تخمين النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{3x+4}{(x-2)^2}$:

عند حساب : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{3x+4}{(x-2)^2}\right]=\dfrac{6+4}{0^+}=+\infty$ يمكن التخمين بأن نهاية الدالة f هي $(+\infty)$ لمّا x يؤول إلى 2 .

- إيجاد عدد حقيقي a بحيث إذا كان $x \in]2-a;2+a[$ فإن $f(x) > 10^3$:

$f(x) > 10^3$ معناه : $\frac{3x+4}{(x-2)^2} > 10^3$ ، ومنه $3x+4 > 10^3(x-2)^2$ ،

أي $3x+4 > 10^3(x^2-4x+2)$ ، ومنه $3x+4 > 1000x^2 - 4000x + 2000$

يكافئ $1000x^2 - 4003x + 3996 < 0$ ،

نحل المتراجحة:

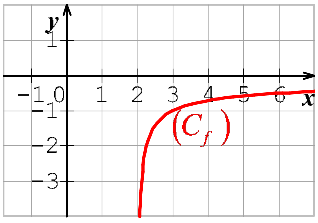
المميز: $\Delta = 4009$ ومنه : $x_1 = \frac{4003+\sqrt{4009}}{2000}$ ، $x_1 = \frac{4003-\sqrt{4009}}{2000}$

أي $\frac{4003+\sqrt{4009}}{2000} < x < \frac{4003-\sqrt{4009}}{2000}$ ومنه $1,901488751 < x < 2,101511249$

إذن: $x \in]2-1,9;2+2,1[$ أي $x \in]0,1;4,1[$

يمكن أخذ $\boxed{a = 0,1}$.

حل التمرين 15 ص 27 ج1 :



لتكن الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ : $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x-2}}$:

1) لدينا (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f :

- يمكن أن نخمن بالنسبة لسلوك الدالة f عندما يؤول x إلى 2 بأن (C_f) يؤول إلى $(-\infty)$.

2) A عدد حقيقي موجب تماماً:

- إيجاد المجال الذي ينتمي إليه x بحيث يكون $f(x) \le -A$:

حل التمرين 16 ص 27 ج1 :

1) دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ وعند 1 للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x}\right] = 2 \ .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{x}\right] = 2 \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right] = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[\frac{7}{0^-}\right] = -\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{2x+5}{x-1}\right] = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{7}{0^+}\right] = +\infty \ .$$

2) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f :

لدينا $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$.

ولدينا $f(x) - 2 = \frac{2x+5}{x-1} - 2 = \frac{2x+5-2x+2}{x-1} = \frac{7}{x-1}$

ومنه منحنى الدالة f يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ لمّا $x > 1$ ، ويقع تحته لمّا $x < 1$.

و لدينا كذلك $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يسار 1 .

و لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = +\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يمين 1 .

حل التمرين 17 ص 27 ج1 :

f دالة عددية معرفة بـ : $f(x) = \dfrac{-3x}{x+2}$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f ثم حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف :

$f(x)$ معرفة معناه $x + 2 \neq 0$ ، ومنه $x \neq -2$ ، أي أن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\} =]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.

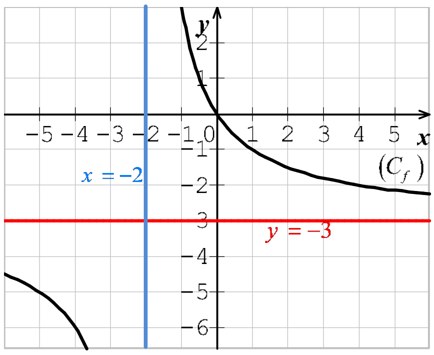
- النهايات :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[\dfrac{x(-3)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[\dfrac{-3}{1+\dfrac{2}{x}}\right] = -3$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2}\left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2}\left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{-3x}{x+2}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{-3}{1+\dfrac{2}{x}}\right] = -3$.



2) تحديد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f ودراسة وضعيته بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي :

لدينا $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -3$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ و $+\infty$.

ولدينا $f(x) - 3 = \dfrac{-3x}{x+2} + 3 = \dfrac{6}{x+2}$

ومنه منحنى الدالة f يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y = -3$ لمّا $x > -2$ ، ويقع تحته لمّا $x < -2$.

و لدينا كذلك $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يسار -2 .

و لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$ ، ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f على يمين -2 .

3- تتمات على النهايات :

حل التمرين 18 ص 27 ج1 :

أ) $f(x) = 2x^3 - x + 1$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[2x^3 - x + 1\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[2x^3\right] = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[2x^3 - x + 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[2x^3\right] = +\infty$.

ب) $f(x) = -3x^4 + 2x + 4$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[-3x^4 + 2x + 4\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[-3x^4\right] = -\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-3x^4+2x+4\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-3x^4\right]=-\infty$.

ج) $f(x)=-x^3+x^2+x+1$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3+x^2+x+1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3\right]=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3+x^2+x+1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3\right]=-\infty$.

حل التمرين 19 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -1 :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x}\right]=1$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x}\right]=1$.

$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}-1}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]=\left[\frac{-2}{0^-}\right]=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]=\left[\frac{-2}{0^+}\right]=-\infty$.

ب) $f(x)=\frac{2x^2+5}{x-2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 2 :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2+5}{x-2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2}{x}\right]=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2+5}{x-2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2}{x}\right]=+\infty$

$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\left[\frac{2x^2+5}{x-2}\right]=\left[\frac{13}{0^-}\right]=-\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\left[\frac{2x^2+5}{x-2}\right]=\left[\frac{13}{0^+}\right]=+\infty$.

ج) $f(x)=\frac{-4x+1}{3-x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 3 :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x+1}{3-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4x}{-x}\right]=4$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x+1}{3-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4x}{-x}\right]=4$

$\lim_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}3}\left[\frac{-4x+1}{3-x}\right]=\left[\frac{-11}{0^+}\right]=-\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}3}\left[\frac{-4x+1}{3-x}\right]=\left[\frac{-11}{0^-}\right]=+\infty$

حل التمرين 20 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=0$

ب) $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 2 :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x^2-4x+4}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right]=0$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\left[\frac{x+1}{(x-2)^2}\right]=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty \ .$$

ج) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 0 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{x^3+1}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$.

حل التمرين 21 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=2x-1+\frac{3}{x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 0 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=(-\infty)-1+0=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$.

ب) $f(x)=3-\frac{1}{(x+1)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -1 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=(-\infty)-1+0=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[2x-1+\frac{3}{x}\right]=\left[0-1+\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$.

ج) $f(x)=x^2+x-\frac{1}{x-3}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 3 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\left[9+3-\frac{1}{0^-}\right]=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\left[x^2+x-\frac{1}{x-3}\right]=\left[9+3-\frac{1}{0^+}\right]=-\infty$.

حل التمرين 22 ص 27 ج1 :

أ) $f(x)=\frac{1}{(x-1)(4-x)}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند 1 ، وعند 4 :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{5x-x^2-4}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{5x-x^2-4}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2}\right]=0$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{1}{(x-1)(4-x)}\right]=\left[\frac{1}{(0^-)3}\right]=-\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \left[\dfrac{1}{(x-1)(4-x)}\right] = \left[\dfrac{1}{(0^+)3}\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} \left[\dfrac{1}{(x-1)(4-x)}\right] = \left[\dfrac{1}{3(0^+)}\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} \left[\dfrac{1}{(x-1)(4-x)}\right] = \left[\dfrac{1}{3(0^-)}\right] = -\infty$.

ب) $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -1 ، وعند 3 :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}\right] = [-\infty + 0 - 0] = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}\right] = [+\infty + 0 - 0] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \left[2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}\right] = \left[-2 + (-\infty) - \dfrac{1}{2}\right] = -\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \left[2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}\right] = \left[-2 + (+\infty) - \dfrac{1}{2}\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \left[2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}\right] = \left[6 + \dfrac{1}{4} - (+\infty)\right] = -\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \left[2x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3-x}\right] = \left[6 + \dfrac{1}{4} - (-\infty)\right] = +\infty$.

ج) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{(x+2)^2}$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، وعند -2 :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[x^2 + \dfrac{1}{(x+2)^2}\right] = [+\infty + 0] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x^2 + \dfrac{1}{(x+2)^2}\right] = [+\infty + 0] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} \left[x^2 + \dfrac{1}{(x+2)^2}\right] = \left[4 + \dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \left[x^2 + \dfrac{1}{(x+2)^2}\right] = \left[4 + \dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty$.

حل التمرين 23 ص 28 ج1 :

أ) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x} + 1$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x^2 + \sqrt{x} + 1\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[2x^2\right] = +\infty$.

ب) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$ و عند 1 :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}\right] = 0 + (+\infty) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \left[\dfrac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}\right] = \left[\dfrac{1}{0^-} + 2\right] = -\infty$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{1}{x-1}+2\sqrt{x}\right]=\left[\frac{1}{0^+}+2\right]=+\infty \ .$$

حل التمرين 24 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ ، دراسة النهاية عند 4 :

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 4}\left[\frac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right]=\left[\frac{5}{0^-}\right]=-\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 4}\left[\frac{x+1}{\sqrt{x}-2}\right]=\left[\frac{5}{0^+}\right]=+\infty \ .$$

ب) $f(x)=(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)$ ، دراسة النهاية عند $-\infty$ و عند 0 :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)\right]=(+\infty)(-\infty)=-\infty \ .$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left[(1-x)\left(2-\sqrt{-x}\right)\right]=1\times 0=0 \ .$$

حل التمرين 25 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\dfrac{2}{x}-\cos x$ ، دراسة النهاية عند 0 و عند $+\infty$:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[\frac{2}{x}-\cos x\right]=\left[\frac{2}{0^-}+1\right]=-\infty \ .$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\frac{2}{x}-\cos x\right]=\left[\frac{2}{0^+}+1\right]=+\infty \ .$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{2}{x}-\cos x\right]=0-\lim_{x \to +\infty}\cos x \ \text{(غير معرفة)} \ .$$

ب) $f(x)=\sin(2x)+x$ ، دراسة النهاية عند $\dfrac{\pi}{4}$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}}\left[\sin(2x)+x\right]=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=1+\frac{\pi}{4} \ .$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{2}{x}-\cos x\right]=0-\lim_{x \to +\infty}\cos x \ .$$

حل التمرين 26 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=x^3+x^2-x-1$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[x^3+x^2-x-1\right]=\lim_{x \to +\infty}\left[x^3\right]=+\infty \ .$$

ب) $f(x)=\dfrac{x+2}{3-\sqrt{x}}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x+2}{3-\sqrt{x}}\right]=\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right)}\right]=\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{3}{\sqrt{x}}-1}\right]=\lim_{x \to +\infty}\left[-\sqrt{x}\right]=-\infty \ .$$

حل التمرين 27 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\sqrt{x}-1-2x$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}-1-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}-2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-2x\right]=-\infty .$$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-\sqrt{x}}{x^2+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 .$$

حل التمرين 28 ص 28 ج1 :

أ) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right] .$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right]=0$$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$ ، دراسة النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-x+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right] .$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{=x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1}\right]=-\frac{1}{2}$$

حل التمرين 29 ص 28 ج1 :

الحالة (1) :

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f
أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=0$
ولدينا المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f
أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=2$.
ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0;2\}=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

الحالة (2):

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=0$

ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

الحالة (3):

لدينا حسب التمثيل البياني : المستقيمان ذو المعادلتان $x=1$ و $x=-1$ مقاربان عموديان لمنحنى الدالة f ، أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=1$ و $x=-1$

ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

الحالة (4):

لدينا حسب التمثيل البياني : محور التراتيب مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f

أي أن الدالة f غير معرفة عند $x=0$

ومنه مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4- نهاية دالة مركبة – النهايات بالمقارنة :

حل التمرين 30 ص28 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3}\left[\sqrt{\dfrac{3x+4}{x-3}}\right]=\sqrt{\dfrac{13}{0^+}}=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[\sqrt{\dfrac{3-6x}{1-x}}\right]=\sqrt{\dfrac{-3}{0^-}}=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{-2x^3+x-3}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{-2x^3}\right]=-2(-\infty)=+\infty$.

حل التمرين 31 ص28 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]-2;2[$ بـ : $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

حساب نهاية الدالة f عند -2 و 2 :

f معرفة إذا كان $4-x^2\geq 0$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-2}\left[\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\left[\frac{-3}{0^+}\right]=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}2}\left[\frac{-3}{\sqrt{4-x^2}}\right]=\left[\frac{-3}{0^+}\right]=-\infty \ .$$

حل التمرين 32 ص28 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{x}{x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos(0)\right]=1$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi x-1}{2x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=0$.

3) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)+\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]=\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{0^+}\right]=1+(+\infty)=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos\left(\pi\dfrac{\sin x}{x}\right)\right]=\left[\cos(\pi\times1)\right]=\left[\cos\pi\right]=-1$ ، لأن $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]=1$.

حل التمرين 33 ص28 ج1 :

- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-1$: $\dfrac{-1}{x+1}\leq\dfrac{\cos x}{x+1}\leq\dfrac{1}{x+1}$:

لدينا $x>-1$ و منه $x+1>0$ ، أي $\dfrac{1}{x+1}>0$

ولدينا كذلك $-1\leq\cos x\leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد الموجب $\dfrac{1}{x+1}$ نحصل على :

$$-1\times\frac{1}{x+1}\leq\cos x\times\frac{1}{x+1}\leq 1\times\frac{1}{x+1}$$

<u>إذن:</u> $\dfrac{-1}{x+1}\leq\dfrac{\cos x}{x+1}\leq\dfrac{1}{x+1}$.

- حساب نهاية الدالة $f:x\mapsto\dfrac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x+1}\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-1}{x+1}\right]=0$ ، فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\cos x}{x+1}\right]=0$

<u>إذن :</u> الدالة $f:x\mapsto\dfrac{\cos x}{x+1}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 0 .

حل التمرين 34 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>1$ ، $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+7}{x-1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x}\right] = 3$

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x+\cos x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x}+\frac{\cos x}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[3+\frac{\cos x}{x}\right] = 3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x}{x}\right] = 0$.

و لدينا $\frac{3x+\cos x}{x} \le f(x) \le \frac{3x+7}{x-1}$ ، ومنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

<u>إذن :</u> الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 3 .

حل التمرين 35 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x \ge 0$ ، $|f(x)-3| \le \frac{1}{x^2+1}$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \ge 0$ ، $|f(x)-3| \le \frac{1}{x^2+1}$ ، أي $\frac{-1}{x^2+1} \le f(x)-3 \le \frac{1}{x^2+1}$

لأن $\frac{1}{x^2+1} > 0$ ، و منه $3-\frac{1}{x^2+1} \le f(x) \le 3+\frac{1}{x^2+1}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3+\frac{1}{x^2+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[3-\frac{1}{x^2+1}\right] = 3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2+1}\right] = 0$

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي 3 .

حل التمرين 36 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x<0$ ، $f(x) \le -2x^3$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-2x^3\right] = -\infty$ وَ $f(x) \le -2x^3$ من أجل كل عدد حقيقي $x<0$ ،

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $-\infty$.

حل التمرين 37 ص28 ج1 :

f دالة بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ، $f(x) \ge \frac{1}{2}x^4+x$:

- لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^4\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x^4+x\right] = +\infty$ وَ $f(x) \ge \frac{1}{2}x^4+x$ من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ ،

فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 38 ص29 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $1 \le 3+2\cos x \le 5$:
نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \le \cos x \le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد 2
نجد : $-2 \le 2\cos x \le 2$ و بإضافة العدد 3 إلى أطراف المتباينة نجد $3-2 \le 3+2\cos x \le 3+2$
إذن: $1 \le 3+2\cos x \le 5$.

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{3+2\cos x}$ عند $+\infty$:
لدينا $1 \le 3+2\cos x \le 5$ ومنه $1 \ge \dfrac{1}{3+2\cos x} \ge \dfrac{1}{5}$ ، وبضرب أطراف المتباينة في $(x-1)$ نجد :
$x-1 \ge \dfrac{x-1}{3+2\cos x} \ge \dfrac{x-1}{5}$ ، ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty}[x-1] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[\dfrac{x-1}{5}\right] = +\infty$
وبالتالي فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 39 ص29 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $x^2 - 3\sin x \ge x^2 - 3$:
نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \le \sin x \le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد -3
نجد : $3 \ge -3\sin x \ge -3$ و بإضافة x^2 إلى أطراف المتباينة نجد $3+x^2 \ge x^2 - 3\sin x \ge x^2 - 3$
إذن: $x^2 - 3\sin x \ge x^2 - 3$.

2) لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$ عند $+\infty$:
(كتبت في الكتاب خطأ $f : x \mapsto x^2 - \sin 3x$)
لدينا $x^2 - 3\sin x \ge x^2 - 3$ ، ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x^2 - 3\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[x^2\right] = +\infty$
وبالتالي فإنه حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 40 ص29 ج1 :

- لنبحث عن نهاية الدالة $f : x \mapsto x^2 + 2x\sin x$ عند $+\infty$ وَ عند $-\infty$:
$\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x^2 + 2x\sin x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[x(x+2\sin x)\right] = +\infty$ ، لأن $\lim\limits_{x \to +\infty}[x + 2\sin x] = +\infty$
إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.
$\lim\limits_{x \to -\infty}\left[x^2 + 2x\sin x\right] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[x(x+2\sin x)\right] = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty$ ،
إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $-\infty$ ، ونهايتها هي $+\infty$.

حل التمرين 41 ص29 ج1 :

f دالة معرفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $f(x) = \dfrac{x+\sin x}{2x+1}$:

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > -\dfrac{1}{2}$ ، $\dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x+1}$:
لدينا $-1 \le \sin x \le 1$ ، بإضافة x لأطراف المتباينة نجد : $x-1 \le x+\sin x \le x+1$ و بقسمة أطراف المتباينة على $2x+1$ نجد $\dfrac{x-1}{2x+1} \le \dfrac{x+\sin x}{2x+1} \le \dfrac{x+1}{2x+1}$

إذن: $\frac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2x+1}$.

2) لنبحث عن نهاية الدالة f عند $+\infty$:

لدينا $\frac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2x+1}$ ، ولدينا $\frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{2x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{2x+1}\right]$

ومنه حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

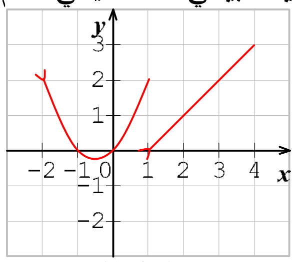
إذن : الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ، ونهايتها هي $\frac{1}{2}$.

5- الاستمرارية :

حل التمرين 42 ص29 ج1 :

- نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;4[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x; \text{------} x \in [-2;1[\\ f(x) = x - 1; \text{------} x \in [1;4[\end{cases}$

1) التمثيل البياني للدالة f في معلم :



لنبحث عن نهاية الدالة f عند 1 :

لدينا لمّا $x \in [-2;1[$ ، $f(x) = x^2 + x$ ، ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[x^2 + x\right] = 1^2 + 1 = 2$

ولدينا لمّا $x \in [1;4[$ ، $f(x) = x - 1$ ، ومنه $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[x - 1\right] = 1 - 1 = 0$

إذن وجدنا أن : $\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) \ne \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ ، ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 .

2) الدالة f غير مستمرة على المجال $[-2;4[$ ، لأنها غير مستمرة عند 1 (لا تقبل نهاية عند 1) ، و العدد1 هو عنصر ينتمي إلى المجال $[-2;4[$.

3) على المجال $[2;3]$ الدالة f معرفة بـ $f(x) = x - 1$ وحسب التمثيل البياني فهي مستمرة على هذا المجال ، وكذلك هذه الدالة كثير حدود إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فهي مستمرة على $[2;3]$.

حل التمرين 43 ص29 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1; \text{------} x \le 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5; \text{------} x > 2 \end{cases}$:

1) دراسة استمرارية الدالة f عند 2 :

لدينا من أجل $x \in]-\infty;2]$ ، $f(x) = x^2 - 2x + 1$

ومنه $\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 2}\left[x^2 - 2x + 1\right] = 4 - 4 + 1 = 1$ ، إذن: الدالة f مستمرة عند 2 على اليسار .

ولدينا من أجل $x \in]2;+\infty[$ ، $f(x) = x^2 + x - 5$

ومنه $\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 2}\left[x^2 + x - 5\right] = 4 + 2 - 5 = 1$ ، إذن: الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين .

وجدنا أن الدالة f مستمرة عند 2 على اليمين و على اليسار ، و منه فهي مستمرة عند 2 .

2) نعم الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;2[$ وَ $]2;+\infty[$ لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

حل التمرين 44 ص29 ج1 :

- دراسة استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+2; & x\le 1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x+1; & x>1 \end{cases}$:

لدينا من أجل $x\in]-\infty;1]$ ، $f(x)=-x^2+x+2$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[-x^2+x+2\right]=-1+1+2=2$

ولدينا من أجل $x\in]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{1}{2}x+1$

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{1}{2}x+1\right]=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

وجدنا أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)\neq\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$ ، ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 .

إذن : الدالة f غير مستمرة عند 1 ، ومنه فهي ليست مستمرة على $\mathbb{R}$. لكنها مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;1[$ وَ $]1;+\infty[$.

حل التمرين 45 ص29 ج1 :

f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-3}{x-1}$ إذا كان $x\neq 1$ وَ $f(1)=3$:

1) دراسة استمرارية الدالة f عند 1 :

لدينا من أجل $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ، $f(x)=\frac{x^3-3}{x-1}$ ، بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+x+1} \\ x^2-1 & \\ \underline{x^2-x} & \\ x-1 & \\ \underline{x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن $f(x)=x^2+x+1$ ،

ومنه لمّا $x\in]-\infty;1[$ ، نجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\left[x^2+x+1\right]=1+1+1=3$.

ولمّا $x\in]1;+\infty[$ ، نجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\left[x^2+x+1\right]=1+1+1=3$.

إذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ و لدينا $f(1)=3$ ، ومنه : الدالة f مستمرة عند 1

إذن : فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 46 ص29 ج1 :

لتكن الدالتان f و g المعرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ على الترتيب كما يلي :

$$f(x)=2x^3-x+1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$$

- دراسة استمرارية الدالتان f و g :

نعلم أن الدوال كثيرات الحدود معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ولدينا $f(x)=2x^3-x+1$ هي دالة كثير حدود و منه فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

و نعلم كذلك أن الدوال الناطقة معرفة و مستمرة على مجال تعريفها ، ولدينا $g(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ دالة ناطقة مجموعة تعريفها $D_g=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه فهي غير مستمرة عند 1 .

إذن: الدالة g مستمرة على المجال $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

حل التمرين 47 ص29 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x^2-x)\sin x$:

- إثبات أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$:

لنعرف الدالتين u و v كما يلي : $u:x\mapsto \sin x$ ، و $v:x\mapsto x^2-x$

نعلم أن الدالة $x\mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ أي الدالة $u:x\mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$

و نعلم أيضًا أن الدوال كثيرات الحدود معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و منه فالدالة $v:x\mapsto x^2-x$ معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$.

إذن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه فالدالة $f(x)=(x^2-x)\sin x$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 48 ص29 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$:

- دراسة استمرارية الدالة f :

لدينا الدالة f هي جداء الدالتين المستمرتين على $\mathbb{R}$ و المعرفتين بـ : $x\mapsto \cos x$ ، و $x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$

إذن جداء هذين الدالتين هو $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$ ، ونعلم أن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ هو دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه فالدالة $f(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 49 ص29 ج1 :

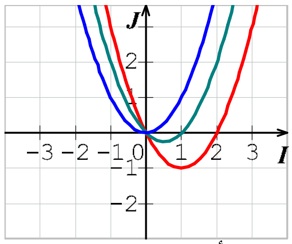
نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي : $f(x)=x(x+E(x))$ حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح :

1) تعيين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية : $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$:

نعلم أن دالة الجزء الصحيح معرفة كما يلي : $E(x)=\begin{cases}-2:x\in[-2;-1[\\-1:x\in[-2;0[\\0:x\in[-2;1[\end{cases}$

ومنه فالدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=\begin{cases} x(x-2): x\in[-2;-1[\\ x(x-1): x\in[-2;0[\\ x(x+0): x\in[-2;1[\end{cases}$ ، أي $f(x)=\begin{cases} x^2-2x : x\in[-2;-1[\\ x^2-x : x\in[-2;0[\\ x^2 : x\in[-2;1[\end{cases}$

2) رسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f :



3) إثبات أن الدالة f مستمرة على المجالات $[-2;-1[$ ، $[-2;0[$ ، $[-2;1[$:

- الدالة f معرفة على المجال $[-2;-1[$ بـ $f(x)=x^2-2x$ ومنه فهي دالة كثير حدود إذن الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$.
- الدالة f معرفة على المجال $[-2;0[$ بـ $f(x)=x^2-x$ ومنه فهي دالة كثير حدود إذن الدالة f مستمرة على $[-2;0[$.

الدالة f معرفة على المجال $[-2;0[$ بـ $f(x)=x^2$ ومنه فهي دالة كثير حدود ، إذن الدالة f مستمرة على $[-2;0[$.

6- مبرهنة القيم المتوسطة :

حل التمرين 50 ص29 ج1 :

- البرهان باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3;-2]$ بـ : $f(x)=x^3-4x$

لدينا $f(-3)=(-3)^3-4(-3)=-15$ و $f(-2)=(-2)^3-4(-2)=-8+8=0$

بما أن الدالة f مستمرة على المجال $[-3;-2]$ لأنها دالة كثير حدود ، فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$ من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k\in[f(-3);f(-2)]$ ، أي أن $k\in[-15;0]$

بما أن $k=-2$ عنصر من المجال $[-15;0]$ ، فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3;-2]$ ،

أي أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$.

حل التمرين 51 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=2x+1; & 0<x\le 1 \\ f(x)=-2x+3; & 1\le x<2 \end{cases}$:

1) إثبات بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة أن للمعادلة $f(x)=0$ حلولا في المجال $[0;2]$:

لدينا $f(x)$ معرفة على المجال $[0;1[$ بـ : $f(x)=2x+1$ و هي دالة كثير حدود ، ومنه فهي مستمرة على المجال $[0;1[$.

لدينا الدالة f معرفة على المجال $]1;2]$ بـ : $f(x)=x-1$ و هي دالة كثير حدود ، ومنه فهي مستمرة على المجال $]1;2]$.

لكن هل $f(x)$ مستمرة عند 1 ؟

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}[2x+1]=2(1)+1=3$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}[-2x+3]=-2(1)+3=1$

وجدنا أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ، ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 .

إذن : الدالة f غير مستمرة عند 1 ، ومنه فهي ليست مستمرة على المجال $[0;2]$ لأن العدد 1 عنصر من هذا المجال

إذن : الدالة f لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0;2]$

وعليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة .

2) التحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحدًا على في المجال $[0;2]$:

حل المعادلة $f(x)=0$:

لدينا :
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1; \quad x\in[0;1[\\ \\ -2x+3; \quad x\in[1;2] \end{cases}$$

ومنه $x=-\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{3}{2}$ ، $x=-\frac{1}{2}$ مرفوض لأنه لا ينتمي إلى المجال $[0;1[$

ومنه حل المعادلة $f(x)=0$ هو $x=\frac{3}{2}$ لأن هذا الحل ينتمي إلى $[1;2]$.

إذن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا هو $\frac{3}{2}$ على المجال $[0;2]$.

حل التمرين 52 ص30 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=3x^3-2x-\frac{1}{4}$:

1) حساب $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ، $f(-1)$:

$f(1)=3(1)^3-2(1)-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ، $f(0)=3(0)^3-2(0)-\frac{1}{4}=0-0-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^3-2\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\frac{-3}{8}+1-\frac{1}{4}=\frac{-3+8-2}{8}=\frac{3}{8}$.

$f(-1)=3(-1)^3-2(-1)-\frac{1}{4}=-3+2-\frac{1}{4}=-\frac{5}{4}$.

2) الاستنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$:

الدالة f كثير حدود ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي فهي مستمرة على كل من المجالات $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ ، $[0;1]$ كلٌ على حدا .

ولدينا كذلك $f(-1)\times f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ ، و $f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f(0)<0$ ، و $f(0)\times f(1)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في كل مجال من المجالات $\left[-1;-\frac{1}{2}\right]$ ، $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ ، $[0;1]$.

إذن: نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$.

حل التمرين 53 ص30 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $[-3;6]$ كما يلي : $f(x)=x^3-12x$:

1) دراسة تغيرات الدالة f :

$f(x)$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-3;6]$ ، ولدينا $f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0$ معناه $3x^2-12=0$ ومنه $3(x^2-4)=0$ ، هذا يكافئ $3((x-2)(x+2))=0$

$3\neq 0$ ، ومنه $x=2$ و $x=-2$

إذا كان $f'(x)<0$ فإن $x\in]-2;2[$ ومنه الدالة f متناقصة على المجال $x\in]-2;2[$

إذا كان $f'(x)>0$ فإن $x\in[-3;-2[\cup]2;6]$ ومنه الدالة f متناقصة على هذا المجال .

جدول تغيرات الدالة f :

x	-3		-2		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	9	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$ 30	144

2) إيجاد عدد حلول المعادلة $f(x)=30$:

حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-3;6]$ فإن الدالة تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد k ، حيث $2<k<6$ لأن من أجل $x\in[2;6]$ فإن $f(x)\in[-16;144]$ ، و العدد 30 عنصر من المجال $[-16;144]$.

إذن المعادلة $f(x)=30$ تقبل حلاً وحيدًا فقط .

حل التمرين 54 ص30 ج1 :

- إثبات أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرًا حقيقيًا :

لتكن f دالة كثير حدود معرفة بـ : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.......+a_1x+a_0$ ،

حيث $a_0;a_1;.........;a_{n-1};a_n$ معاملات حقيقية و n عدد طبيعي فردي حيث $a_n\neq 0$.

- نعلم أن f مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثير حدود ، و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$.

إذن نميز حالين كما يلي :

	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
$a_n>0$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n<0$	$+\infty$	$-\infty$

ومنه إذا كان $a_n < 0$ فإن $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right] \times \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] < 0$

وإذا كان $a_n > 0$ فإن $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right] \times \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] < 0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a_n فإن $\left[\lim_{x\to-\infty} f(x)\right] \times \left[\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] < 0$ ، و الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيًا .

إذن : نستنتج أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرًا حقيقيًا .

حل التمرين 55 ص30 ج1 :

- إثبات أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حلاً في المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $2x^3 + 1 = 0$ ، $I = [-1;0]$:

نضع $f(x) = 2x^3 + 1$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I = [-1;0]$

ومنه $f(-1) = 2(-1)^3 + 1 = -2 + 1 = -1$ ، وَ $f(0) = 2(0)^3 + 1 = 0 + 1 = 1$

العدد 0 محصور بين $f(-1)$ وَ $f(0)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I = [-1;0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين -1 وَ 0

<u>إذن :</u> المعادلة $2x^3 + 1 = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I = [-1;0]$.

2) $x^5 + 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0$ ، $I = [1;2]$:

نضع $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^2 - 1$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I = [1;2]$

ومنه $f(1) = (1)^5 + 3(1)^4 - 6(1)^2 - 1 = 1 + 3 - 6 - 1 = -3$ ، وَ $f(2) = 32 + 48 - 24 - 1 = 55$

العدد 0 محصور بين $f(1)$ وَ $f(2)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I = [1;2]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 1 وَ 2

<u>إذن :</u> المعادلة $x^5 + 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I = [1;2]$.

3) $x^4 + 4x - 3 = 0$ ، $I = \left[\frac{1}{2};1\right]$:

نضع $f(x) = x^4 + 4x - 3$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2};1\right]$

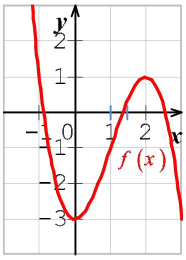
ومنه $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{16} + 2 - 3 = \frac{-15}{16} = -0,9$ ، وَ $f(1) = 1 + 4 - 3 = 2$

العدد 0 محصور بين $f\left(\frac{1}{2}\right)$ وَ $f(1)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I = \left[\frac{1}{2};1\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين $\frac{1}{2}$ وَ 1

<u>إذن :</u> المعادلة $x^4 + 4x - 3 = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $I = \left[\frac{1}{2};1\right]$.

4) $-x^3+3x^2=3$ ، $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$:



نضع $f(x)=-x^3+3x^2-3$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

ومنه $f(1)=-(1)^3+3(1)^2-3=-1+3-3=-1$ ،

وَ $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\right)^3+3\left(\frac{3}{2}\right)^2-3=-\frac{27}{8}+\frac{27}{4}-3=\frac{27}{8}-3=\frac{3}{8}=0,4$

العدد 0 محصور بين $f(1)$ وَ $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، و f دالة كثير حدود أي أنها مستمرة على المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$

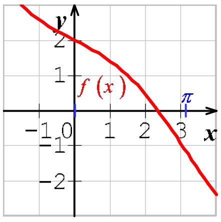
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 1 وَ $\frac{3}{2}$

كما يظهر في التمثيل البياني للدالة f .

إذن : المعادلة $-x^3+3x^2=3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $I=\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

5) $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ ، $I=[0;\pi]$:

نضع $f(x)=\frac{1}{2}\sin x-x+2$ ، حيث الدالة f معرفة على المجال $I=[0;\pi]$



ومنه $f(0)=\frac{1}{2}\sin(0)-(0)+2=0-0+2=2$ ،

وَ $f(\pi)=\frac{1}{2}\sin\pi-(\pi)+2=-\pi+2=-3,14+2=-1,14$

العدد 0 محصور بين $f(0)$ وَ $f(\pi)$ ، و f دالة كثير حدود ، لأن الدالة

$x\mapsto\sin x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، أي أنها مستمرة على المجال $I=[0;\pi]$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاً محصورًا بين 0 وَ π

كما يبينه التمثيل البياني للدالة f .

إذن : المعادلة $\frac{1}{2}\sin x+2=x$ تقبل على الأقل حلا في المجال $I=[0;\pi]$.

حل التمرين 56 ص30 ج1 :

لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ ، وجدول تغيراتها كالآتي :

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

- إثبات أن المنحنى الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين :

لدينا الدالة f مستمرة على $]-3;+\infty[$ ، أي أنها مستمرة على المجال $]-3;0]$ و مستمرة أيضًا على $[0;2]$.

ولدينا كذلك حسب جدول التغيرات :

لمّا $x\in]-3;0]$ ، الدالة $f(x)\in[-2;+\infty[$.

لمّا $x\in[0;2]$ ، الدالة $f(x)\in[-2;4[$.

منحنى الدالة f يقطع حامل محور الفواصل معناه $f(x)=0$ (الترتيب معدوم) ،

إذن $0 \in [-2;+\infty[$ ، و $0 \in [-2;4[$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد $x_0 \in]-3;0]$ يحقق $f(x_0)=0$ ، ويوجد $x_1 \in [0;2]$ يحقق $f(x_1)=0$ ،

إذن النقط ذات الإحداثيات $A(x_0;0)$ ، و $B(x_1;0)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f) وترتيبها معدوم .

إذن: هذه النقط تنتمي إلى محور الفواصل .

ومنه حامل محور الفواصل يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين A و B فواصلهما على الترتيب $-3 < x_0 \le 0$ ، و $0 \le x_1 \le 2$.

حل التمرين 57 ص30 ج1 :

لدينا جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{13}{6}$ ↘	$-\frac{7}{3}$ ↗	$+\infty$

- البرهان على أن المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$:

$f(x)+2=0$ معناه $f(x)=-2$

حسب جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ لدينا :

لمّا $x \in]-\infty;-1]$ ، الدالة $f(x) \in \left]-\infty;\frac{13}{6}\right]$.

لمّا $x \in [-1;2]$ ، الدالة $f(x) \in \left[-\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right]$.

لمّا $x \in [2;+\infty[$ ، الدالة $f(x) \in \left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$.

نعلم أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$ ، ولدينا العدد -2 عنصر من المجالات $\left]-\infty;\frac{13}{6}\right]$ ، و $\left[-\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right]$ ، و $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right[$ كما هو موضح في جدول التغيرات أعلاه ،

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=-2$ تقبل حلاً على الأقل في كل مجال من المجالات $]-\infty;-1]$ ، و $[-1;2]$ ، و $[2;+\infty[$ ، أي أنها تقبل على الأقل ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$.

إذن: المعادلة $f(x)+2=0$ تقبل ثلاثة حلول فقط في $\mathbb{R}$ ، لأنها معادلة من الدرجة الثالثة ، ونعلم أن المعادلات من الدرجة الثالثة لها ثلاث حلول فقط .

7- الدول المستمرة و الرتيبة تمامًا :

حل التمرين 58 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2]$ بـ : $f(x)=2x^3-3x^2-1$:

1) حساب $f'(x)$ ، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$ معناه $6x(x-1)=0$ ، ومنه $6x=0$ أي $x=0$ ، وَ $x-1=0$ أي $x=1$.

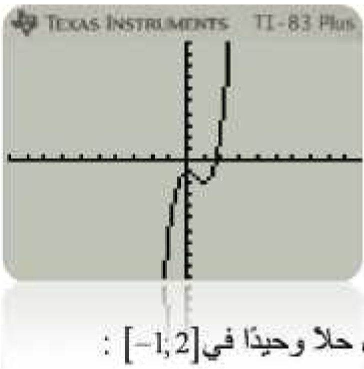
$f'(x)<0$ معناه $x\in]0;1[$ ومنه الدالة f متناقصة على المجال $[0;1]$.

$f'(x)>0$ معناه $x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

- جدول التغيرات :

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↗	-1	↘	-2	↗	3

2) الرسم على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f باستعمال نافذة مناسبة :



3) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[-1;2]$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لمّا $x\in[1;2]$ فإن $f(x)\in[-2;3]$.

وبما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-2;3]$ ، و الدالة f مستمرة و متزايدة **تمامًا** على المجال $[1;2]$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً **وحيدًا** α حيث $1<\alpha<2$.

حل التمرين 59 ص30 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$:

1) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=-6x^2+6x-1$

$f'(x)=0$ معناه $-6x^2+6x-1=0$ ، لدينا المميز $\Delta=b^2-4ac=36-24=12$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{12}}{-12}=0,8$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{12}}{-12}=0,2$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0,2[\cup]0,8;+\infty[$ ومنه الدالة f متناقصة على هذا المجال .

$f'(x)>0$ معناه $x\in]0,2;0,8[$ ومنه الدالة f متزايدة على المجال $]0,2;0,8[$.

- جدول التغيرات :

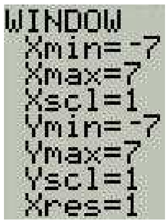
x	$-\infty$		$0,2$		$0,8$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$4,9$	↗	$5,1$	↘	$-\infty$

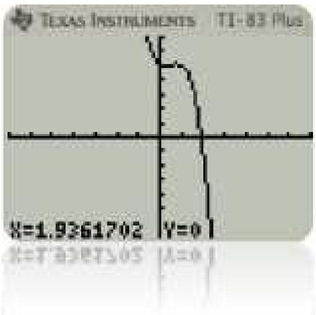
2) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α على $\mathbb{R}$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لمّا $x\in[0,8;+\infty[$ فإن $f(x)\in]-\infty;5,1]$.

وبما أن العدد 0 عنصر من المجال $]-\infty;5,1]$ ، و الدالة f مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $[0,8;+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α .

3) إيجاد باستعمال حاسبة بيانية قيمة مقربة إلى 10^{-2} للحل α : $f(x)=0$ معناه نقطة التقاطع مع حامل محور الفواصل أي $y=0$ كما تظهر على شاشة الحاسبة البيانية $x=1.93$.





حل التمرين 60 ص31 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ بـ : $f(x)=x^4-x^2+1$:

1) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا $f'(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$

$f'(x)=0$ معناه $2x(2x^2-1)=0$ ، ومنه $2x=0$ أي $x=0$ ، وَ $(2x^2-1)=0$ أي $x^2=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{\frac{1}{2}}=0,7$ ، وَ $x=-\sqrt{\frac{1}{2}}=-0,7$ ،

ندرس إشارة المشتق :

x	$-\infty$		$-0,7$		0		$0,7$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
الجداء		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

لدينا $D_f=[1;2]$ ، ومنه و حسب جدول إشارة المشتق ، الدّالة f متزايدة تمامًا على المجال $[1;2]$

- جدول التغيرات :

x	2 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 ↗ 13

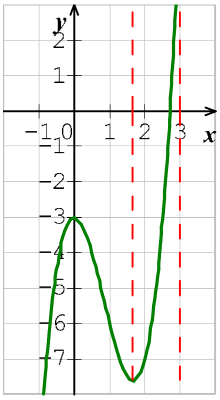
2) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدًا α في المجال $]1;2[$:

حسب جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لمّا $x\in]1;2[$ فإن $f(x)\in[1;13]$.

وبما أن العدد 3 عنصر من المجال $[1;13]$ ، و الدالة f مستمرة و متزايدة **تمامًا** على المجال $]1;2[$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا **وحيدًا** α .

3) القيمة المقربة إلى 10^{-2} للحل α هي : $1,41$.

حل التمرين 61 ص31 ج1 :



- إثبات أن المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$:

نضع $f(x)=2x^3-5x^2-3$ ، ومنه $f'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$

$f'(x)=0$ معناه $2x(3x-5)=0$ ، ومنه $2x=0$ معناه $x=0$ ،

و $3x-5=0$ ، أي $x=\frac{5}{3}$

إذن لمّا $f'(x)<0$ ، $x\in\left]0;\frac{5}{3}\right[$ ، الدالة f متناقصة تمامًا على هذا المجال .

و لمّا $f'(x)>0$ ، $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ، الدالة f متزايدة تمامًا على هذا المجال .

لدينا المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ محتوى في $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$ ، ولدينا الدالة f متزايدة تمامًا و مستمرة على هذا المجال

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

إذن : المعادلة $2x^3-5x^2-3=0$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$.

حل التمرين 62 ص31 ج1 :

- إثبات أن المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$:

نضع $f(x)=\frac{1}{x+2}-2\cos x$ ، ومنه $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}+2\sin x$

لدينا من أجل كل x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ ، $f'(x)<0$ لأن $\sin x$ سالب على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

ومنه الدالة $f(x)$ متناقصة تمامًا على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ و مستمرة عليه .

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

إذن : المعادلة $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

حل التمرين 63 ص31 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;\pi]$ بـ : $f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$:

- إثبات أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$:

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0;\pi]$ و دالتها المشتقة هي :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(-\sin x)(\cos^2 x)-3(-\sin x) \\ &= -3\sin x(\cos^2 x-1) \\ &= -3\sin x(-\sin^2 x) \\ &= (3\sin x)(\sin^2 x) \end{aligned}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ ، أي $f'(x)>0$ ، لأن $\sin x$ موجب على المجال $]0;\pi[$

ومنه جدول التغيرات :

x	0		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$ $\sqrt{2}$	4

وجدنا أن الدالة f مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[0;\pi]$ ، ومنه لمّا $x\in[0;\pi]$ فإن $f(x)\in[0;4]$
و العدد $\sqrt{2}$ عنصر من المجال $[0;4]$.
إذن: المعادلة $f(x)=\sqrt{2}$ تقبل حلاً وحيدًا α حيث $\alpha\in]0;\pi[$ ، أي أنه يوجد $\alpha\in]0;\pi[$ حيث $f(\alpha)=\sqrt{2}$.

حل التمرين 64 ص31ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-x^3+3x^2-1$:

1) دراسة نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3+3x^2-1\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3\right]=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3+3x^2-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3\right]=-\infty$.

2) أ) حساب f' مشتقة الدّالة f ثم دراسة إشارتها :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=-3x^2+6x=3x(2-x)$

$f'(x)=0$ معناه $3x(2-x)=0$ ، ومنه $3x=0$ أي $x=0$ ، و $2-x=0$ أي $x=2$

$f'(x)<0$ معناه $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ ومنه الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

$f'(x)>0$ معناه $x\in]0;2[$ ومنه الدالة f متزايدة تمامًا على المجال $]0;2[$.

ب) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

3) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على كل مجال من المجالات $[-1;0]$ ، $[0;1]$ ، $[2;3]$:

أولا نحسب $f(-1)$ ، و $f(1)$ ، و $f(3)$:

$f(-1)=-(-1)^3+3(-1)^2-1=1+3-1=3$

$f(1)=-(1)^3+3(1)^2-1=-1+3-1=1$

$f(3)=-(3)^3+3(3)^2-1=-27+27-1=-1$

- لدينا الدالة f مستمرة على المجال $[-1;0]$ و متناقصة تمامًا عليه و $f(-1)\times f(0)<0$
ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[-1;0]$.
- و لدينا الدالة f مستمرة على المجال $[0;1]$ و متزايدة تمامًا عليه و $f(0)\times f(1)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[0;1]$.

- و لدينا كذلك الدالة f مستمرة على المجال $[2;3]$ و متناقصة تمامًا عليه و $f(2)\times f(3)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا على المجال $[2;3]$.

حل التمرين 65 ص31 ج1 :

f دالة معرفة على $[0;\pi]$ بـ : $f(x)=2+\frac{1}{2}\sin x$:

- إثبات أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$:

نضع دالة g تكون معرفة على المجال $[0;\pi]$ بـ : $g(x)=2+\frac{1}{2}\sin x-x$

لندرس تغيرات هذه الدالة على المجال $[0;\pi]$:

$g(0)=2+\frac{1}{2}\sin(0)-0=2$ ، لأن $\sin(0)=0$.

$g(\pi)=2+\frac{1}{2}\sin(\pi)-0=2-\pi$ لأن $\sin(\pi)=0$.

لدينا من أجل كل x من $[0;\pi]$ ، $g'(x)=\frac{1}{2}\cos x-1$

- إشارة $g'(x)$:

لدينا $-1\leq\cos x\leq 1$ ، ومنه بالقسمة على العدد 2 نجد $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\cos x\leq\frac{1}{2}$ ، وبإضافة العدد -1 إلى أطراف المتباينة نجد

$-\frac{1}{2}-1\leq\frac{1}{2}\cos x-1\leq\frac{1}{2}-1$.

إذن $-\frac{3}{2}\leq g'(x)\leq-\frac{1}{2}$ ، أي أن $g'(x)<0$

- جدول تغيرات $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$:

x	0 $\qquad\qquad$ π
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	2 $\searrow$ $2-\pi$

من جدول تغيرات $g(x)$ على المجال $[0;\pi]$ نستنتج أنّ الدالة g مستمرة على المجال $[0;\pi]$ ومتناقصة تمامًا عليه و $f(0)\times f(\pi)<0$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ ، حيث $g(\alpha)=0$.

أي أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ حيث $2+\frac{1}{2}\sin(\alpha)-\alpha=0$

ومنه $2+\frac{1}{2}\sin(\alpha)=\alpha$.

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha)=\alpha$.

حل التمرين 66 ص31 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)^2$:

1) إثبات أنّ الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$:

لدينا من أجل كل x من $]0;2[$ ، $f'(x)=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ومنه $2\sqrt{x}\ge 0$ ، أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\sqrt{x}-\sqrt{2}$.

لدينا $0<x<2$ ، ومنه $0<\sqrt{x}<\sqrt{2}$ ، يكافئ $0-\sqrt{2}<\sqrt{x}-\sqrt{2}<\sqrt{2}-\sqrt{2}$

أي أن $-\sqrt{2}<\sqrt{x}-\sqrt{2}<0$ ومنه $f'(x)<0$.

إذن: الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $]0;2[$.

2) لتكن الدالة g المعرفة على $D=[0;2]$ بـ: $g(x)=f(x)-x$:

- إثبات أن الدالة g متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$:

لدينا الدالة f متناقصة تمامًا على المجال $]0;2[$ ، ولدينا الدالة $x\mapsto -x$ متناقصة تمامًا على المجال D

إذن: الدالة g متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$ ، لأنها مجموع دالتين متناقصتين تمامًا .

- حساب $g(0)$ وَ $g(2)$ ، ثم الإستنتاج أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدًا في المجال D :

$g(0)=\left(\sqrt{0}-\sqrt{0}\right)^2-0=2$ ، $g(2)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2-2=-2$

لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $D=[0;2]$ ، لأنها دالة كثير حدود

ولدينا $g(0)\times g(2)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $D=[0;2]$

المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ، معناه $f(x)-x=0$ تقبل حل وحيد

إذن: نستنتج أن $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدًا في المجال $D=[0;2]$.

حل التمرين 67 ص31 ج1 :

نعتبر الدالتين $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ ، وَ $g:x\mapsto -x^3$:

- إثبات أن المنحنيين (C_f) وَ (C_g) الممثلين للدالتين f وَ g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 ، حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$:

لتكن h دالة حيث $g:x\mapsto f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}+x^3$

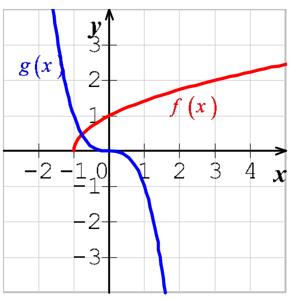
لدينا من أجل كل x من $[-1;+\infty[$ ، $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2$

ومنه $3x^2\ge 0$ وَ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$ ، أي أن $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2>0$ ، ومنه $h'(x)>0$

أي أن الدالة h متزايدة تمامًا على المجال $]-1;+\infty[$.

ومنه جدول التغيرات للدالة h على المجال $]-1;+\infty[$:

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$+$
$h(x)$	-1 ↗ $+\infty$



من جدول التغيرات نستنتج أنه لمّا $x\in[-1;+\infty[$ فإن $h(x)\in[-1;+\infty[$

بما أنّ العدد 0 عنصر من المجال $[-1;+\infty[$ ، والدالة h مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[-1;+\infty[$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على الأقل على المجال $[-1;+\infty[$ ولأن الدالة h متزايدة تمامًا فإن هذا الحل وحيد .

- ولدينا كذلك $h\left(-\frac{7}{8}\right)=\sqrt{-\frac{7}{8}+1}+\left(-\frac{7}{8}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{8}}-\left(\frac{7}{8}\right)^3<0$

و $h\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{-\frac{3}{4}+1}+\left(-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{2}-\frac{27}{64}=\frac{32-27}{64}=\frac{5}{64}>0$

- وجدنا أن $h\left(-\frac{7}{8}\right)\times h\left(-\frac{3}{4}\right)<0$ ، ونعلم أن الدالة h مستمرة على $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ (دالة كثير حدود)

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على المجال $\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ ،

أي أنه يوجد عدد $\alpha\in\left[-\frac{7}{8};-\frac{3}{4}\right]$ حيث $h(\alpha)=0$ ، إذن $f(\alpha)=g(\alpha)$ لأن $h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)$

ومنه النقطة ذات الفاصلة α مشتركة بين المنحنيين (C_f) وَ (C_g) ، وهي وحيدة .

(التمثيل البياني أعلاه يبين ذلك) .

تمارين للتعمق :

2- نهاية منتهية أو غير منتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

حل التمرين 68 ص31 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]3;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$:

1) إيجاد عدد حقيقي A حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]0,99;1,01[$:

لدينا $0,99<f(x)<1,01$ ومنه $0,99<\frac{x+1}{x-3}<1,01$ يكافئ $\frac{x-3}{x-3}\times 0,99<\frac{x+1}{x-3}<1,01\times\frac{x-3}{x-3}$ ،

أي $(x-3)\times 0,99<x+1<1,01\times(x-3)$ ، ومنه $0,99x-2,97<x+1<1,01x-3,03$ ،

بإضافة العدد -1 إلى أطراف المتباينة نجد $0,99x-3,97<x<1,01x-4,03$

ومنه لدينا $x-1,01x+4,03<0$ وَ $-x+0,99x-3,97<0$ ، ومنه $0,01x<-4,03$ و $-0,01x<3,97$

إذن : $x<-\frac{4,03}{0,01}$ وَ $x>\frac{3,97}{0,01}$

أي أن $A=397$ ، لأن -403 لا تنتمي إلى مجال تعريف الدالة f .

2) إثبات أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f :

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x+1}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x}{x}\right]=1$ ، ومنه المستقيم $(\Delta):y=1$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$.

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

نحسب الفرق $f(x)-1=\frac{x+1}{x-3}-1=\frac{x+1-x+3}{x-3}=\frac{4}{x-3}$

ومنه $\frac{4}{x-3}>0$ لأن $D_f=]3;+\infty[$ ، أي أن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم $(\Delta):y=1$ في مجال تعريف الدالة f .

حل التمرين 69 ص31ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^4+2x^3+1$:

- إيجاد عدد حقيقي $A>0$ ، حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، و لدينا $f(x)>10^6$ ومنه من أجل x كبير بالقدر الكافي ، فإن $f(x)>10^6$

وعليه يمكن أخذ العدد A أكبر ما يمكن ، حيث إذا كان $x>A$ فإن $f(x)>10^6$. وسيكون A حتمًا أكبر من الصفر .

حل التمرين 70 ص31ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$:

1) دراسة نهاية الدالة f عند 1 :

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1}\left[\frac{x}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2) إيجاد مجال I مركزه 1 حيث من أجل كل x من I ، $f(x)>10^6$:

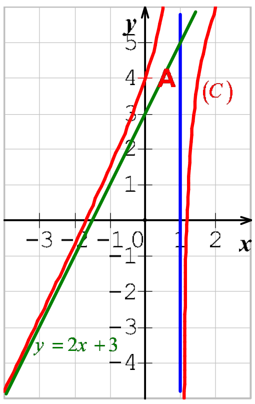
لدينا $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، و لدينا $f(x)>10^6$ ومنه من أجل كل قيمة x أقرب ما يمكن من العدد 1 ، فإن $f(x)>10^6$

وعليه يمكن تعيين المجال I بالقيم القريبة جدًا من العدد 1 ، حيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)>10^6$.

3- نهاية منتهية أو غير منتهية عند عدد حقيقي :

حل التمرين 71 ص32ج1 :

لتكن الدالة f حيث $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+d}$ ، و (C) تمثيلها البياني :



- تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d :

لدينا (C) يقبل مستقيمًا مقاربًا معادلته $x=1$ ، ومستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=2x+3$ عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ويشمل النقطة $A(0;4)$.

- أولاً النقطة $A(0;4)$ تنتمي إلى (C) معناه $f(0)=4$

وبالتعويض في عبارة $f(x)$ نجد $a(0)+b+\dfrac{c}{(0)+d}=4$ ،

ومنه $b+\dfrac{c}{d}=4$..........................(1) ، حيث $d\neq0$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C) إذا و فقط إذا كان $\lim_{x\to1} f(x)=\pm\infty$

أي أنه في عبارة الدالة f ، $\lim_{x\to1} f(x)=x+d=0$ ، أي أن $d=-1$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $y=2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$ وَ $+\infty$ إذا كان $ax+b=2x+3$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، بالمطابقة نجد $a=2$ ، و $b=3$

ومنه تصبح المعادلة (1) : $3+\frac{c}{-1}=4$ ، ومنه $3-c=4$ أي أن $c=-1$.

إذن: $a=2$ ، $b=3$ ، $c=-1$ ، وَ $d=-1$.

حل التمرين 72 ص32 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$:

1) تعيين a ، b ، c ، وَ d ، بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$:

لدينا : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax+b(x+1)^2+cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax+b\left(x^2+2x+1\right)+cx+d}{(x+1)^2}$

$$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+cx+d}{(x+1)^2}=\frac{ax^3(2a+b)x^2+(a+2b+c)x+(b+d)}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ نجد $a=1$ ، وَ $\begin{cases}2a+b=3\\ a+2b+c=6\\ b+d=3\end{cases}$ ، ومنه $b=3-2=1$

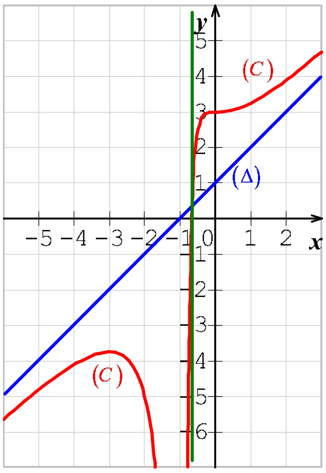
وَ $1+2+c=6$

أي $c=6-3=3$ ، وَ $1+d=3$ ومنه $d=2$

إذن: $a=1$ ، $b=1$ ، $c=3$ ، وَ $d=2$ ، أي أن $f(x)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}$.

2) استنتاج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x+2}{(x+1)^2}\right]$



$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3}{x}\right]=0$$

ومنه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$ وَ $+\infty$

3) تحديد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا $f(x)-(x+1)=x+1+\frac{3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ ،

ومنه المقام $(x+1)^2>0$ ، وَ في البسط $x=-\frac{2}{3}$ ، أي أن (C) يقطع (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=-\frac{2}{3}$ ، لأنه لمّا $x=-\frac{2}{3}$ ، $f(x)-(x+1)=0$

ومنه لمّا $x\in\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ ، المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .

و لمّا $x\in\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[$ ، المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ) . (كما يبينه التمثيل البياني أعلاه) .

حل التمرين 73 ص32ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$:

1) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}=\left[\sqrt{x^2+4x+5}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty .$$

ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}\right]=0$$

2) استنتاج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمًا مقاربًا مائلا (Δ) عند $+\infty$:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

3) أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}=\left[\sqrt{x^2+4x+5}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2}\right]=+\infty$$

ب) إثبات أنه يوجد عددان حقيقيان α و β ، بحيث $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ ، و $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$:

لدين من أجل كل $x\neq 0$ ،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right]=-1$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ ، أي أن $\boxed{\alpha=-1}$.

• لدينا $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]=\beta$ ، ومنه $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\beta$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+4x+5}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x+5}-x}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\frac{-4}{2}=-2$$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x]=-2$ ، أي أن $\boxed{\beta=-2}$

ج) وجدنا أن $\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=-2$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)+x+2=0$ يكافئ $\lim_{x\to-\infty}f(x)-(-x-2)=0$

ومنه المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=-x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$.

حل التمرين 74 ص32ج1 :

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^+$ على الترتيب بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ و $g(x)=\sqrt{x^2+4x}$:

1) حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty$.

2) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$ و $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-x^2-x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+4x}+x+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{4x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}}+x+\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{4x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{4x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1+\frac{1}{2x}}=\frac{3}{2}$$

- التخمين حول السلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$:

أولاً لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$ ، ومنه المنحنى الممثل للدالة f يقبل عند $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ ، أي أنه في جوار $+\infty$ ، المنحنى الممثل للدالة f يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ في جوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{3}{2}$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}\right]=0$ ، يكافئ $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]=0$ ، أي أن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه المنحنى الممثل للدالة g يقبل عند $+\infty$ مستقيمًا مقاربًا مائلاً معادلته $y=x+2$ ، أي أنه في جوار $+\infty$ ، المنحنى الممثل للدالة g يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ في جوار $+\infty$ ، ولا يقترب من المستقيم ذو المعادلة $y=x+\frac{1}{2}$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\neq 0$.

3) وجدنا سابقًا $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x+2)\right]=0$ ، ومنه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$.

حل التمرين 75 ص32 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ ، و (C) تمثيلها البياني في معلم :

1) إثبات أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

معناه

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+1+\sqrt{x^2+4x}\right)-(2x+3)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x}\right)-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right)\times\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+4x-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}\right]=0$$

إذن : نستنتج أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2) دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ) :

لندرس إشارة الفرق $f(x)-(2x+3)$ على $[0;+\infty[$:

$$f(x)-(2x+3)=x+1+\sqrt{x^2+4x}-(2x+3)=\sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$

حتى يكون $\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\geq 0$ يجب أن يكون $x^2+4x-(x+2)^2\geq 0$ أي

$x^2+4x-x^2-4x-4\geq 0$ ، يكافئ: $-4\geq 0$ ، وهذا مستحيل .

ومنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$ فإن $f(x)-(2x+3)<0$ ،

إذن : المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم Δ من أجل كل x من $[0;+\infty[$.

حل التمرين 76 ص32 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) تعيين D مجموعة تعريف الدالة f :

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $|x^2-1|\geq 0$ ، أي أن $D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

2) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

لدينا $|x^2-1|\geq 0$ ، ومنه $x=1$ وَ $x=-1$

أي أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1} : x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ -\frac{1}{2}x+\sqrt{-x^2+1} : x\in]-1;1[\end{cases}$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$$

وَ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$$

3) حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]$ وَ $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\times\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=0$$

4) الاستنتاج :

- لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{3}{2}x\right]=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)\right]=0$

إذن نستنتج أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$.

- ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=0$ ومنه نستنتج أن المستقيم Δ' ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

5) تحديد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من المستقيمين Δ وَ Δ' :

- أولا بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)$:

$$f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}+\frac{3}{2}x=\sqrt{|x^2-1|}+x$$

ومنه $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)\geq 0$ تكافئ $\sqrt{|x^2-1|}+x\geq 0$ ، أي أن (1)...............$\sqrt{|x^2-1|}\geq -x$ ،

- إذن إذا كان $x>0$ فإن المتراجحة (1) محققة ، ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .
- وإذا كان $x\leq 0$ فإن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2\geq(-x)^2$ ، ومنه $|x^2-1|\geq x^2$

إذن $x^2-1\geq x^2$ لمّا $x\leq -1$ ، أي $-1\geq 0$ وهذا مستحيل

وَ $-x^2+1\geq x^2$ لمّا $-1\leq x\leq 0$ ، أي $2x^2\leq 1$ ، ومنه $x^2\leq\frac{1}{2}$ ، أي أنّ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

وهذا يكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0$

- إذن لمّا $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 0$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)>0$ ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .

ولمّا $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)=0$ ، ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ولمّا $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x\right)<0$ ، ومنه المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

- ثانيًا ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)$:

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}x+\sqrt{|x^2-1|}-\frac{1}{2}x=\sqrt{|x^2-1|}-x$$

ومنه $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)\geq 0$ تكافئ $\sqrt{|x^2-1|}-x\geq 0$ ، أي أن $\sqrt{|x^2-1|}\geq x$ ....(2) ،

- إذن إذا كان $x<0$ فإن المتراجحة (2) محققة ، ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ') .
- وإذا كان $x\geq 0$ فإن المتراجحة (2) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2\geq x^2$ ، ومنه $|x^2-1|\geq x^2$

إذن $x^2-1\geq x^2$ لمّا $x\geq 1$ ، أي $-1\geq 0$ و هذا مستحيل .

ولدينا سابقا $x^2\leq\frac{1}{2}$ ، أي أنه لمّا $0\leq x\leq 1$ ، $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ و هذا يكافئ $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

- إذن لمّا $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)>0$ ومنه المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ') .

ولمّا $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)=0$ ، ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (Δ') .

ولمّا $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{2}x\right)<0$ ، ومنه المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ') .

المنحنيات المتقاربة :

حل التمرين 77 ص32 و33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\right]=+\infty$$

2) أ) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$:

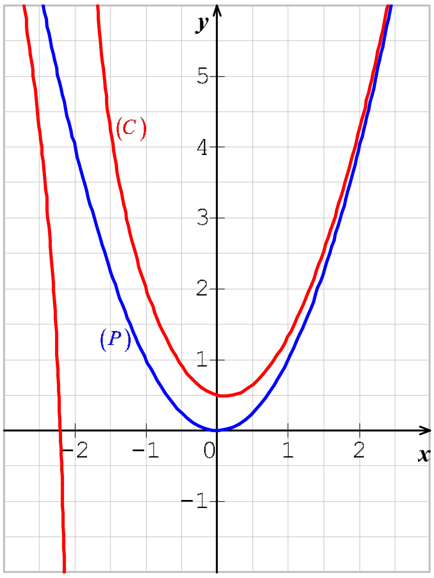
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}-x^2\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+1-x^2(x+2)}{x+2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x+2}\right]=0$$

ب) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=0$ ، هذا معناه هندسيًا أنه : كلمـا اقتربت الفاصلة x من $+\infty$ ، اقترب العدد $f(x)$ من x^2 ، أي أن نقط المنحنى (C) متقاربة من نقط المنحنى (P) الممثل للدالة x^2 .

ونقول في هذه الحالة أن المنحنيين (C) وَ (P) متقاربان عند $+\infty$.

ج) رســـــم المنحنيين (C) وَ (P) :

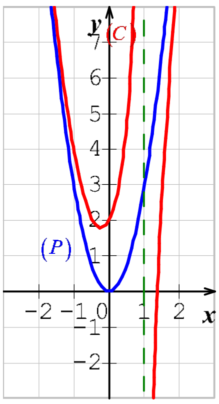


حل التمرين 78 ص 33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x-1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) البحث عن منحنٍ (P) مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

نحسب نهاية $f(x)$ عند $+\infty$:



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}\right]=+\infty \text{ ، لأنّ } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

نلاحظ أنه يوجد منحن (P) مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$ ، للتأكد نحسب :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

من حساب النهايتين السابقتين نستنتج أنّ المنحنى (C) يقترب من المنحنى (P) ذو المعادلة $y=3x^2$ عند $+\infty$.

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين (C) وَ (P) :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(3x^2\right)$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-\left(3x^2\right)=3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)=-\frac{2}{x-1}$$

ومنه لمّا $x<1$ ، $f(x)-\left(3x^2\right)>0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع فوق (P) على المجال $]-\infty;1[$

ولمّا $x>1$ ، $f(x)-\left(3x^2\right)<0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع أسفل (P) على المجال $]1;+\infty[$

2) إثبات أن المنحنيين (C) وَ (P) متقاربان عند $-\infty$:

لدينا الدالة f معرفة على المجال $]-\infty;1[$ ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و لدينا أيضًا

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[3x^2-\frac{2}{x-1}-\left(3x^2\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2}{x-1}\right]=0$$

إذن : المنحنيين (C) وَ (P) متقاربان عند $-\infty$ ، (والتمثيل البياني أعلاه يبين ذلك) .

حل التمرين 79 ص 33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

- البحث عن منحنٍ (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=0$$

نستنتج أن المنحنى (P) الممثل للدالة مقلوب $x\mapsto\frac{1}{x}$ (دالة مرجعية) مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين (C) وَ (P) :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(3x^2\right)$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+1}$$

ومنه لمّا $x<0$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{x}\right)<0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع أسفل (P) على المجال $]-\infty;0[$

ولمّا $x>1$ ، $f(x)-\left(\frac{1}{x}\right)>0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع فوق (P) على المجال $]0;+\infty[$.

حل التمرين 80 ص 33 ج1 :

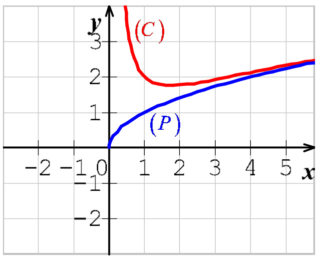
f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

- البحث عن منحنٍ (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1+\left(x\sqrt{x}\right)\left(-\sqrt{x}\right)}{x\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x\sqrt{x}}\right]=0$$



نستنتج أن المنحنى (P) الممثل للدالة جذر $x\mapsto\sqrt{x}$ (دالة مرجعية) مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

- تحديد الوضعية النسبية للمنحنيين (C) وَ (P) :

معناه ندرس إشارة الفرق $f(x)-\left(\sqrt{x}\right)$:

$f(x)-\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{1}{x\sqrt{x}}>0$ ، لأن $x\mapsto\sqrt{x}$ معرفة من أجل $x\geq 0$

ومنه لمّا $x>0$ ، $f(x)-(\sqrt{x})>0$ ، أي أن المنحنى (C) يقع فوق (P) على المجال $]0;+\infty[$.

تمارين للتعمق :

3- تتمات على النهايات :

حل التمرين 81 ص33 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$:

1) إيجاد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b ، وَ c حيث من أجل كل x من D : $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)}+\dfrac{c}{(x-4)}$

لدينا $f(x)=a+\dfrac{b}{(x+1)}+\dfrac{c}{(x-4)}=\dfrac{a[(x+1)(x-4)]+b(x-4)+c(x+1)}{(x+1)(x-4)}$

$=\dfrac{ax^2 3ax-4a+bx-4b+cx+c}{x^2-3x-4}=\dfrac{ax^2+(b+c-3a)x-4a-4b+c}{x^2-3x-4}$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x^2-3x-4}$ من أجل كل x من $D_f=\mathbb{R}-\{-1;4\}$ نجد

$\begin{cases}a=3\\ b+c-3a=2\\ -4a-4b+c=0\end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases}b+c=2+9=11\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ -4b+c=12\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\end{cases}$

بطرح المعادلة (2) من (1) نجد : $b+c-(-4b+c)=11-12$ ، ومنه $5b=-1$ أي أن $b=-\dfrac{1}{5}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد $-\dfrac{1}{5}+c=11$ ومنه $c=\dfrac{1}{5}+11$ أي أن $c=\dfrac{56}{5}$

إذن: $a=3$ ، $b=-\dfrac{1}{5}$ ، وَ $c=\dfrac{56}{5}$. أي أن $f(x)=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}$

2) دراسة نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;4\}=]-\infty;-1[\cup]-1;4[\cup]4;+\infty[$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3$ ، لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=0$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{0^-}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(-1-4)}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{0^+}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(-1-4)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}4}f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}4}\left[3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right]=3-\dfrac{\frac{1}{5}}{(4+1)}+\dfrac{\frac{56}{5}}{0^-}=-\infty$.

$$\cdot\ \lim_{x \xrightarrow{>} 4} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 4}\left[3 - \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)} + \frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3 - \frac{\frac{1}{5}}{(4+1)} + \frac{\frac{56}{5}}{0^+} = +\infty$$

$$\cdot\ \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{1}{5}}{(x+1)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 0 \text{ لأن } ، \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[3 - \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)} + \frac{\frac{56}{5}}{(x-4)}\right] = 3$$

حل التمرين 82 ص33 ج1 :

تعيين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة f ثم حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x^2+2x-3 \neq 0$ ومنه $(x+3)(x-1) \neq 0$ أي أن $x+3 \neq 0$

ومنه $x \neq -3$ ، و $x-1 \neq 0$ ومنه $x \neq 1$.

إذن: $D_f = \mathbb{R} - \{-3;1\} =]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$.

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

$$\cdot\ \lim_{x \xrightarrow{<} -3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\cdot\ \lim_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -3}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\cdot\ \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\cdot\ \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\cdot\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$$

2) $f(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^2}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $(x+1)^2 > 0$ أي أن $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

- حساب النهايات التالية :

$$\cdot\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0$$

$$\cdot\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{(x+1)^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}\right] = 0$$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x^2+x-2\neq 0$ ومنه $(x-1)(x+2)\neq 0$ أي أن $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ ، وَ $x+2\neq 0$ ومنه $x\neq -2$ ، ولدينا في البسط $x^2+x+1\in\mathbb{R}$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;1\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;+\infty[$.

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 \ .$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-2} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-2}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^+}=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^-}=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^-}=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\frac{3}{0^+}=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2}\right]=1 \ .$$

5) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-4}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x-1\neq 0$ ومنه $x\neq 1$ وَ $x^2-4\neq 0$ ومنه $x^2\neq 4$ أي أن $x\neq -2$ وَ $x\neq 2$

إذن: $D_f=\mathbb{R}-\{-2;1;2\}=]-\infty;-2[\cup]-2;1[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$.

- حساب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=0-0=0 \ .$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-2} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{-3}-\frac{1}{0^+}=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}-2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{-3}-\frac{1}{0^-}=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{0^-}-\frac{1}{-3}=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}1}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{0^+}-\frac{1}{-3}=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{1}-\frac{1}{0^-}=+\infty \ .$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}2}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=\frac{2}{1}-\frac{1}{0^+}=-\infty \ .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-4}\right]=0-0=0 \ .$$

(6 $f(x)=\dfrac{(x+2)^3-8}{x}$:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، المقام $x\neq 0$ ومنه $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

- حساب النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x+2)^3-8}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+2)^3-8}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{(x+2)^3-2^3}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{((x+2)-2)\left((x+2)^2+2(x+2)+4\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x\left(x^2+4x+4+2x+4+4\right)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x\left(x^2+6x+12\right)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[x^2+6x+12\right]$$

$$=12$$

قاعدة:

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

حل التمرين 83 ص33 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال المرافق :

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\times\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right]=\frac{2}{+\infty}=0$$

- $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\sqrt{x+1}+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x+1-1}{x\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{x\sqrt{x+1}+1}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right]=+\infty$$

- $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\right]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-\sqrt{x+2}\times\frac{x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+\sqrt{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4-x+2}{x^2+\sqrt{x+2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

■ $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\times\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-x}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

■ $\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+3}\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+3}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+3}\times\left(\frac{x-\sqrt{x^2+3}}{x-\sqrt{x^2+3}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2+3}{x-\sqrt{x^2+3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x-\sqrt{x^2+3}}\right]=\frac{3}{(-\infty)-(+\infty)}=\frac{3}{-\infty}=0$$

■ $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\right]$ ، حيث $a>0$ ، و $b>0$:

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}\times\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+b^2}+a}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2+a^2-a^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+a\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+a\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+b^2+a\sqrt{x^2+b^2}-b\sqrt{x^2+b^2}-ba}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{b^2}{x^2}+\frac{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}-\frac{ba}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\frac{b^2}{x^2}+\frac{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}{x^2}-\frac{ba}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}1+\frac{x^2}{b^2}+\frac{x^2}{(a-b)\sqrt{x^2+b^2}}-\frac{x^2}{ba}=1+0+0-0=1$$

حل التمرين 84 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال تعريف العدد المشتق :

• $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x+1}$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1}}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(0)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$ ، أي أن $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=f'(0)=\frac{1}{2}$.

- $\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2+1}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 1 و عددها المشتق هو :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right]\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ومنه $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\right]=f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sqrt{x^2+2x}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}-0}{x-0}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=\frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ ، ومنه $f'(0)=\frac{0+1}{\sqrt{0^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1}}=1$

<u>إذن :</u> $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right]=f'(0)=1$

- $\lim_{x\to3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto x\sqrt{x+1}-6$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو : $f'(3)=\lim_{x\to3}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6-0}{x-3}\right]=\lim_{x\to3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{3(3)+2}{2\sqrt{3+1}}=\frac{11}{4}$

إذن: $\lim_{x\to3}\left[\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}\right]=f'(3)=\frac{11}{4}$.

حل التمرين 85 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال تعريف العدد المشتق :

- $\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto\sin x$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو :

$$f'(0)=\lim_{x\to3}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x-\sin(0)}{x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x-0}{x}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

ولدينا $f'(x)=\cos x$ ، ومنه $f'(0)=\cos(0)=1$ ، إذن: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)=1$.

▪ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto 1-\cos x$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 0 و عددها المشتق هو : $f'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x-(1-\cos(0))}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\cos x+1}{x}\right]$

ولدينا $f'(x)=\sin x$ ، ومنه $f'(0)=\sin(0)=0$ ، إذن: $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]=f'(0)=0$.

▪ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$:

نضع دالة f حيث $f:x\mapsto \cos x$ ، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند $\frac{\pi}{2}$ و عددها المشتق هو :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]$$

ولدينا $f'(x)=-\sin x$ ، ومنه $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ، إذن: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right]=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

حل التمرين 86 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال النهايتين $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1$ ، وَ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]=1$:

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[3\frac{\sin x}{x}\right]=3\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=3\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{x}\right]=3$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[3\frac{\tan x}{x}\right]=3\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=3\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan 3x}{x}\right]=3$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{2}\times\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{3}{2}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\right)=\frac{3}{2}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 3x}{2x}\right]=\frac{3}{2}$.

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]$:

لدينا $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{4}\times\frac{\tan x}{x}\right]=\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]\right)=\frac{1}{4}\times 1$ ، ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{4x}\right]=\frac{1}{4}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin ax}{bx}\right]$:

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin ax}{bx}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{b}\times\dfrac{\sin x}{x}\right]=\dfrac{a}{b}\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]\right)=\dfrac{a}{b}\times 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin ax}{bx}\right]=\dfrac{a}{b}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan ax}{bx}\right]$:

لدينا $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan ax}{bx}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{b}\times\dfrac{\tan x}{x}\right]=\dfrac{a}{b}\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan x}{x}\right]\right)=\dfrac{a}{b}\times 1$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\tan ax}{bx}\right]=\dfrac{a}{b}$.

حل التمرين 87 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]$:

نضع دالة f حيث $f: x\mapsto\sqrt{1-8x}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند -1 و عددها المشتق هو : $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{\sqrt{1-8x}-\sqrt{9}}{x+1}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]$

ولدينا $f'(x)=\dfrac{-8}{2\sqrt{1-8x}}=\dfrac{-4}{\sqrt{1-8x}}$ ، ومنه $f'(-1)=\dfrac{-4}{\sqrt{1-8(-1)}}=\dfrac{-4}{\sqrt{9}}=-\dfrac{4}{3}$

إذن: $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{\sqrt{1-8x}-3}{x+1}\right]=f'(-1)=-\dfrac{4}{3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f: x\mapsto\sqrt{x^2-9}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو : $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-9}}{x-3}\right]=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ومنه $f'(3)=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}\right]=f'(3)=+\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f: x\mapsto\sqrt{x^2-9}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند -3 و عددها المشتق هو : $f'(-3)=\lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right]=\lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{9-9}}{x+3}\right]=\lim\limits_{x\to -3^-}\left[\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]$

ولدينا $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$ ، ومنه $f'(-3)=\dfrac{-3}{\sqrt{x^2-9}}$

إذن: $\lim_{x\to -3^-}\left[\frac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}\right]=f'(-3)=+\infty$.

4) $\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]$:

نضع دالة f حيث $f: x\mapsto\sqrt{x+1}$، ومنه الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق عند 3 و عددها المشتق هو

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\left[\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3+1}}{x-3}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]$$

ولدينا $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

إذن: $\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right]=f'(3)=\frac{1}{4}$.

5) $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]$:

نضع دالة $g(x)=\sqrt{x}-2$ و دالة أخرى $h(x)=x^2-5x+4$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

لدينا العدد المشتق عند 4 للدالة $g(x)=\sqrt{x}-2$ هو:

$$g'(4)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{g(x)-g(4)}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{4}+2}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 4 للدالة $h(x)=x^2-5x+4$ هو:

$$h'(4)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{h(x)-h(4)}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x^2-5x+4-\left(4^2-5(4)+4\right)}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x^2-5x+4}{x-4}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند 4 فإن : $\lim_{x\to 4}f(x)=\frac{g'(4)}{h'(4)}$ حيث $h'(4)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{\cancel{x-4}}\times\frac{\cancel{x-4}}{x^2-5x+4}\right]=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}}{\frac{x^2-5x+4}{x-4}}\right]$.

ولدينا كذلك $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، وَ $h'(x)=2x-5$

ومنه $g'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ وَ $h'(4)=2(4)-5=3$ ، أي أن $\lim_{x\to 4}f(x)=\frac{g'(4)}{h'(4)}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$.

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\right]=\frac{1}{12}$.

6) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]$:

نضع دالة $g(x)=x+\sqrt{x}$ و دالة أخرى $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$

لدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $g(x)=x+\sqrt{x}$ هو:

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}-0-\sqrt{0}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\sqrt{x}}{x}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ هو:

$$h'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x-\sqrt{0^2+0}-0}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g و h قابلتان للاشتقاق عند 4 فإن : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}$ حيث $h'(0)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}}\right]$

ولدينا كذلك $g'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ، و $h'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1$

ومنه $g'(0)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{0}}=1$ و $h'(x)=\dfrac{2(0)+1}{2\sqrt{0^2+0}}-1=-1$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{g'(0)}{h'(0)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

إذن: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}\right]=-1$.

حل التمرين 88 ص34 ج1 :

حساب النهاية التالية باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ لكل من الدالتين $x\mapsto \sin 3x$ و $x\mapsto 2\cos x-1$:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]$:

نضع دالة $g(x)=\sin 3x$ و دالة أخرى $h(x)=2\cos x-1$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

لدينا العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ للدالة $g(x)=\sin 3x$ هو:

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-\sin 3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-\sin\pi}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x-0}{x-\frac{\pi}{3}}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند $\dfrac{\pi}{3}$ للدالة $h(x)=2\cos x-1$ هو:

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1-2\left(\frac{1}{2}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g و h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{3}$ فإن : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ حيث $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{\cancel{x-\frac{\pi}{3}}}\times\frac{\cancel{x-\frac{\pi}{3}}}{2\cos x-1}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\frac{\sin 3x}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}}\right]$.

ولدينا كذلك $g'(x)=3\cos 3x$ و $h'(x)=-2\sin x$

ومنه $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cos\pi=3(-1)=-3$ و $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

أي أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{-3}{-\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

إذن: $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}\right]=\sqrt{3}$.

حل التمرين 89 ص34 ج1 :

حساب النهاية التالية باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من الدالتين $x\mapsto \tan x$ و $x\mapsto 2\cos x-\sqrt{2}$:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]$:

نضع دالة $g(x)=\tan x-1$ و دالة أخرى $h(x)=2\cos x-\sqrt{2}$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$

أي أن: $f(x)=\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

لدينا العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ للدالة $g(x)=\tan x-1$ هو:

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{g(x)-g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1-\tan\frac{\pi}{4}+1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1-1+1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ للدالة $h(x)=2\cos x-\sqrt{2}$ هو:

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g و h قابلتان للاشتقاق عند $\frac{\pi}{4}$ فإن : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ حيث $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{\cancel{x-\frac{\pi}{4}}}\times\frac{\cancel{x-\frac{\pi}{4}}}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}}{\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{x-\frac{\pi}{4}}}\right]$.

ولدينا كذلك $g'(x)=1+\tan^2 x$ و $h'(x)=-2\sin x$

ومنه $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1^2=2$ و $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

أي أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)=\frac{g'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

<u>إذن:</u> $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right]=\sqrt{2}$.

<u>حل التمرين 90 ص34 ج1 :</u>

- إثبات أنّ : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=2\sqrt{2}$:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\times\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1^2-\cos^2 x}}\right]$$

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{(\sin 2x)\sqrt{1+\cos x}}{|\sin x|}\right]$$

لأنه $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ، أي أن $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

ومنه نجد $=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2\times\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin x}{x}}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[2\times\frac{1\times\sqrt{1+\cos x}}{1}\right]$

$=2\sqrt{1+\cos(0)}=2\sqrt{2}$

لأن $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1$ ، <u>إذن :</u> $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]=2\sqrt{2}$

- إثبات أنّ : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=2$:

نضع $Y=x-\frac{\pi}{2}$ ، ومنه $x=Y+\frac{\pi}{2}$ ، أي أنه لمّا $x\to\frac{\pi}{2}$ فإن $Y\to 0$.

ومنه نجد $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\pi-2x)\tan x\right]=\lim_{Y\to 0}\left[\left(\pi-2\left(Y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\tan\left(Y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$=\lim_{Y\to 0}\left[(-2Y)\tan Y+\tan\frac{\pi}{2}\right]=\lim_{Y\to 0}\left[(-2Y)\tan Y\right]$$

ومنه $2 = \lim_{Y \to 0}\left[\frac{2}{\frac{\tan Y}{Y}}\right] = \lim_{Y \to 0}\left[\frac{\frac{2Y}{Y}}{\frac{\tan Y}{Y}}\right] = \lim_{Y \to 0}\left[\frac{-2Y}{-\tan Y}\right] =$

لأن $\lim_{Y \to 0}\left[\frac{\tan Y}{Y}\right] = 1$ ولمّا $x \to \frac{\pi}{2}$ فإن $Y \to 0$

<u>إذن :</u> $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}}\left[(\pi - 2x)\tan x\right] = 2$

- إثبات أنّ : $\lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right] = 2$:

نضع دالة $g(x) = \sin x$ و دالة أخرى $h(x) = \sqrt{x+1}-1$ ، ومنه لدينا الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$:

أي أن: $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}$

لدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $g(x) = \sin x$ هو:

$$g'(0) = \lim_{x \to 0}\left[\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x - \sin(0)}{x}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

ولدينا العدد المشتق عند 0 للدالة $h(x) = \sqrt{x+1}-1$ هو:

$$h'(0) = \lim_{x \to 0}\left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1-\sqrt{0+1}+1}{x}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]$$

إذن: وبما أن الدالتان g وَ h قابلتان للاشتقاق عند 0 فإن : $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{g'(0)}{h'(0)}$ حيث $h'(0) \neq 0$.

لأنه لدينا : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right] = \lim_{x \to 0}\left[\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}\right]$.

ولدينا كذلك $g'(x) = \cos x$ وَ $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

ومنه $g'(0) = \cos 0 = 1$ وَ $h'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$

أي أن $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{g'(0)}{h'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$.

<u>إذن:</u> $\lim_{x \to 0}\left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}\right] = 2$.

تمارين للتعمق :

4- نهاية دالة مركبة ـ النهايات بالمقارنة :

حل التمرين 91 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال نهاية مركب دالتين :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}\right]$:

نضع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}$ ، و $X=\dfrac{x-1}{2x-4}$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{2x}\right]=\dfrac{1}{2}$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to\frac{1}{2}}f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x-1}{2x-4}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]$:

نضع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ ، و $X=\dfrac{x}{x^2-1}$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to0}f(x)=\sqrt{0}=0$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}\right]=0$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2-x+3}\right]$:

نضع $f(x)=\sqrt{9x^2-x+3}$ ، و $X=9x^2-x+3$ ، و منه $f(x)=\sqrt{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}X=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[9x^2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2\right]=+\infty$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to+\infty}f(x)=\sqrt{+\infty}=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{9x^2-x+3}\right]=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]$:

نضع $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ، و $X=\sqrt{x}$ ، و منه $f(x)=\dfrac{1+X}{X}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}X=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]=\sqrt{+\infty}=+\infty$ ، ومنه $\lim\limits_{X\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left[\dfrac{1+X}{X}\right]=\lim\limits_{X\to+\infty}\left[\dfrac{X}{X}\right]=1$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]=1$.

حل التمرين 92 ص34 ج1 :

حساب النهايات التالية باستعمال نهاية مركب دالتين :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$:

نضع $f(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ، وَ $g(x)=\frac{1}{x}$ ، و منه $f(x)=\cos(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\cos 0=1$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1$.

2) $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]$:

نضع $f(x)=\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ ، وَ $g(x)=x-\pi$ ، و منه $f(x)=\frac{\sin(g(x))}{g(x)}$

نعلم أنّ $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(g(x))}{g(x)}\right]=1$ ، ومنه $\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]=1$

إذن: $\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\right]=1$.

3) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)\right]$:

نضع $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)$ ، وَ $g(x)=\frac{\pi x+3}{1+x}$ ، و منه $f(x)=\sin(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi x}{x}\right]=\pi$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sin\pi=0$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+3}{1+x}\right)\right]=0$.

4) $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)\right]$:

نضع $f(x)=\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)$ ، وَ $g(x)=\frac{\pi x+1}{2x}$ ، و منه $f(x)=\sin(g(x))$

إذن لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi x}{2x}\right]=\frac{\pi}{2}$ ، ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\left(\frac{\pi x+1}{2x}\right)\right]=1$.

5) $\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}\right]$:

نضع $f(x)=\frac{\tan x}{\tan^2 x+1}$ ، وَ $g(x)=\tan x$ ، و منه $f(x)=\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}$

إذن لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} g(x) = +\infty$ ، ومنه

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\frac{g(x)}{(g(x))^2+1}\right] = \lim_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{1}{+\infty} = 0$$

إذن: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}\right] = 0$.

6) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right)\right]$:

نضع $f(x) = \cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right)$ ، وَ $g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi$ ، و منه $f(x) = \cos(g(x))$

إذن لدينا $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right] = 0$ ، ومنه $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \cos 0 = 1$

إذن: $\lim\limits_{x \to 0} \left[\cos\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \times 2\pi\right)\right] = 1$.

حل التمرين 93 ص34 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$:

1) إثبات أنه إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$:

لدينا $x > 1$ ، ومنه و بإضافة x إلى طرفي المتباينة نجد $2x > x + 1$ ، وبجذر الطرفين نجد $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$ ، وبقلب المتباينة نجد $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ، أي أن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

إذن: لمّا $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

2) استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

لدينا من أجل $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ ، وبضرب طرفي المتباينة في العدد $2x$ نجد :

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ ، أيّ أنّ $f(x) > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ لمّا $x > 1$.

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x}{\sqrt{2x}}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x}{\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x\sqrt{2x}}{2x}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{2x}\right] = +\infty$.

ومنه و حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

حل التمرين 94 ص34 ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن $0 \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

لدينا $\sqrt{x+1} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \frac{2(\sqrt{x})^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، ومنه $\sqrt{x+1} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} \geq 0$

من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$

أي أنّ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq 0$ ومنه $0\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) استنتاج $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$:

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $0\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=0$.

ومنه و حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$.

حل التمرين 95 ص34ج1 :

- إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$:

نعلم أن $\begin{cases}-1\leq\sin x\leq 1..............(1)\\-1\leq\cos x\leq 1..............(2)\end{cases}$ ، وبجمع (1) وَ (2) نجد $-1-1\leq\cos x+\sin x\leq 1+1$

إذن: $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$

- استنتاج $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\right]$:

لدينا $-2\leq\cos x+\sin x\leq 2$ ، بضرب أطراف المتباينة في $\frac{1}{x^2}$ نجد $\frac{-2}{x^2}\leq\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\leq\frac{2}{x^2}$

- بما أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-2}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2}\right]=0$ فإنه حسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cos x+\sin x}{x^2}\right]=0$.

حل التمرين 96 ص35ج1 :

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ فإن $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$:

لدينا $x\geq 1$ هذا معناه $\left.\begin{matrix}x-1\geq 0\\x+1>0\end{matrix}\right\}$ ، و لدينا $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}=\frac{2x-x-1}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2(x+1)}$ ، ومنه $\frac{x-1}{2(x+1)}\geq 0$

أي أنّ $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\geq 0$ ومنه $\frac{x}{x+1}\geq\frac{1}{2}$..................$(1)$.

ولدينا كذلك $\frac{x}{x+1}-1=\frac{x-x-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$ وَ $x+1>0$ ، أي أنّ $\frac{-1}{x+1}<0$ ومنه $\frac{-1}{x+1}<1$........(2)

من (1) وَ(2) نستنتج أنّ $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$.

2) استنتاج النهايتين التاليتين :

أ) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right]$:

لدينا $\frac{1}{2}\leq\frac{x}{x+1}\leq 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\sqrt{x}$ نجد $\frac{\sqrt{x}}{2}\leq\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\leq\sqrt{x}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\right]=+\infty$ ، ومنه و حسب نظرية الحصر فإن

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right]=+\infty$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\right]$:

لدينا $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x}{x+1}\le 1$ ، وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ نجد $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\le\dfrac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]=0$ ، ومنه و حسب نظرية الحصر فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\right]=0$.

حل التمرين 97 ص35 ج1 :

حساب النهايتين التاليتين باستعمال نهاية حصر دالتين :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2+4(-1)^x}{x}\right]$:

لدينا $|(-1)^x|=1$ ، ومنه $(-1)^x\ge -1$ ، وبضرب طرفي المتباينة في العدد 4 نجد $4(-1)^x\ge -4$

وبإضافة 2 إلى طرفي المتباينة نجد $2+4(-1)^x\ge -2$ ، وبضربها مرة أخرى في العدد $\dfrac{1}{x}$ نجد

$$\frac{2+4(-1)^x}{x}\ge\frac{-2}{x}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-2}{x}\right]=0$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2+4(-1)^x}{x}\right]=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x+\cos x}{x-1}\right]$:

نعلم أن $-1\le\cos x\le 1$ ، بإضافة $3x$ إلى أطراف المتباينة نجد $3x-1\le 3x+\cos x\le 1+3x$ ،

وبضرب أطراف المتباينة في العدد $\dfrac{1}{x-1}$ نجد $\dfrac{3x-1}{x-1}\le\dfrac{3x+\cos x}{x-1}\le\dfrac{1+3x}{x-1}$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1+3x}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x-1}{x-1}\right]=3$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{3x+\cos x}{x-1}\right]=3$.

حل التمرين 98 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{4x^2+5}$ وَ $2x$ من أجل كل $x>0$:

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $\sqrt{4x^2+5}-2x>0$ ، وبإضافة العدد $2x$ إلى طرفي المتباينة نجد

$\sqrt{4x^2+5}-2x+2x>2x$ ، ومنه $\sqrt{4x^2+5}>2x$.

<u>إذن :</u> $\sqrt{4x^2+5}$ أكبر تمامًا من $2x$.

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+5}-x\right]$:

لدينا $\sqrt{4x^2+5}>2x$ ، ومنه وبإضافة العدد $-x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{4x^2+5}-x>x$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]=+\infty$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+5}-x\right]=+\infty$.

حل التمرين 99 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{2x^2-1}$ وَ $2x$ من أجل كل $x>1$:

لدينا من أجل كل $x>1$ ، $\sqrt{2x^2-1}-2x<0$ ، وبإضافة العدد $2x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2-1}-2x+2x<2x$ ، ومنه $\sqrt{2x^2-1}<2x$.

إذن : $\sqrt{2x^2-1}$ أصغر تمامًا من $2x$.

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2-1}-3x\right]$:

لدينا $\sqrt{2x^2-1}<2x$ ، ومنه وبإضافة العدد $-3x$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2-1}-3x<-x$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[-x]=-\infty$ ، ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2-1}-3x\right]=-\infty$.

حل التمرين 100 ص35 ج1 :

- المقارنة بين $\sqrt{2x^2+x+1}$ وَ $x\sqrt{2}$ من أجل كل $x>0$:

لدينا من أجل كل $x>0$ ، $\sqrt{2x^2+x+1}-x\sqrt{2}>0$ ، وبإضافة العدد $x\sqrt{2}$ إلى طرفي المتباينة نجد $\sqrt{2x^2+x+1}-x\sqrt{2}+x\sqrt{2}>x\sqrt{2}$ ، ومنه $\sqrt{2x^2+x+1}>x\sqrt{2}$.

إذن : $\sqrt{2x^2+x+1}$ أكبر تمامًا من $x\sqrt{2}$.

- استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]$:

لدينا $\sqrt{2x^2+x+1}>x\sqrt{2}$ ، ومنه وبإضافة العدد $-x$ إلى طرفي المتباينة نجد

$$\sqrt{2x^2+x+1}-x>x\sqrt{2}-x$$

ولدينا
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2}-x\times\frac{x\sqrt{2}+x}{x\sqrt{2}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-x^2}{x\sqrt{2}+x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x\sqrt{2}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x(x)}{x\left(\sqrt{2}+1\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{2}+1}\right]=+\infty$$

ومنه وحسب نظرية الحصر نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{2x^2+x+1}-x\right]=+\infty$.

حل التمرين 101 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$:

1) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$:

الدالة f معرفة من أجل $x-\sqrt{x^2+1}\neq 0$ ، ومنه $D_f=\mathbb{R}$ لأنه من أجل كل عدد حقيقي $x-\sqrt{x^2+1}<0$

لدينا
$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}+2x=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-x^2-1}+2x$$
$$=-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+2x=2x-x-\sqrt{x^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x-\sqrt{x^2+1}<0$ ، ومنه $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}+2x<0$

أي أنّ $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$.

2) استنتاج أنّ $f(x)\leq -4x^2$ من أجل كل $x>0$:

نعلم أنّ $-1\leq \sin x\leq 1$ ، ومنه وبإضافة 1 إلى أطراف المتباينة نجد $0\leq 1+\sin x\leq 2$ وبضرب x في أطراف المتباينة نجد $0\leq x(1+\sin x)\leq 2x$ حيث $x>0$.

ولدينا $\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$ ومنه وبضرب المتباينتين طرف في طرف نجد $\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}\leq -4x^2$

إذن : $f(x)\leq -4x^2$

- لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[-4x^2\right]=-\infty$ ومنه وحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

تمارين للتعمق :

5- الاستمرارية :

حل التمرين 102 ص35ج1 :

دراسة استمرارية الدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين التاليتين :

1) $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ عند $x_0=0$:

لدينا
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\times\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=\frac{0}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

وجدنا أنّ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ، و لدينا $f(0)=0$ ، ومنه $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

<u>إذن:</u> الدالة f مستمرة عند 0 .

2) $\begin{cases} f(x)=\frac{|x|}{x}\times\sqrt{|x|};x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ عند $x_0=0$:

لدينا حالتين لنهاية $f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[\frac{-x}{x}\sqrt{-x}\right]=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[-\sqrt{-x}\right]=0 \\ \lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{x}{x}\sqrt{x}\right]=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[\sqrt{x}\right]=0 \end{cases}$$ ، ومنه $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

وجدنا أنّ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ ، و لدينا $f(0)=2$ ، ومنه $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$.

<u>إذن:</u> الدالة f غير مستمرة عند 0 .

حل التمرين 103 ص35 ج1 :

إثبات أنّ الدالة f التالية المعرفة على $\mathbb{R}$ مستمرة على $\mathbb{R}$:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ;x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & ;x\le 0 \end{cases}$$

لدينا من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ ، لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

نضع $g:x\mapsto -\sqrt{x+1}$ ومنه الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق عند 0 وعددها المشتق هو :

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+\sqrt{1}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\sqrt{x+1}+1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\right]$$

ولدينا $g'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ ، ومنه $g'(0)=-\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=-\dfrac{1}{2}$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\right]=g'(0)=-\dfrac{1}{2}$

<u>إذن:</u> $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

و لدينا من أجل $x\in]-\infty;0]$ ، $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x^2}{x-2}\right]=\frac{1-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

وجدنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ في كلتا الحالتين ، و لدينا $f(0)=-\dfrac{1}{2}$

<u>إذن:</u> الدالة f مستمرة عند 0 ، أي أنها مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل التمرين 104 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ;x\ne 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

تعيين قيمة العدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$:

لدينا
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x}\times\frac{x+2+\sqrt{4+x^2}}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+2)^2-(4+x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+4x+4-(4+x^2)}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4x}{x\left(x+2+\sqrt{4+x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{x+2+\sqrt{4+x^2}}\right]$$

$$=\frac{4}{0+2+\sqrt{4+0}}=\frac{4}{4}=1$$

نعلم أنه حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ، ومنه $f(0)=1$ ، أي أنّ $\alpha=1$.

حل التمرين 105 ص35 ج1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x-a & ;x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x^2-a+b}{x} & ;x\leq 2 \end{cases}$ ، حيث a وَ b عددان حقيقيان ثابتان :

- تعيين علاقة بين a وَ b حتى تكون f مستمرة عند 2 :

لدينا $f(2)=\dfrac{2(2)^2-a+b}{2}=\dfrac{8-a+b}{2}$

ولدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2}\left[\dfrac{2x^2-a+b}{x}\right]=\dfrac{2(2)^2-a+b}{2}=\dfrac{8-a+b}{2} \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2}\left[x^2-2x-a\right]=2(2)^2+2(2)-a=8-a \end{cases}$

نعلم أنه حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 يجب أن تكون $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x)=f(2)$

أي أنّ : $\dfrac{8-a+b}{2}=8-a$ ، ومنه $8-a+b=16-2a$ ، يكافئ $2a-a+b=16-8$

إذن العلاقة المطلوبة بين a وَ b حتى تكون f مستمرة عند 2 هي : $a+b=8$.

تمارين للتعمق :

6- مبرهنة القيم المتوسطة – الدوال المستمرة و الرتيبة تمامًا :

حل التمرين 106 ص35 ج1 :

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث $f(a)<ab$ ، وَ $f(b)>b^2$:

❖ إثبات أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=bc$:

نعلم حسب مبرهنة القيم المتوسطة أنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإنه يوجد عدد حقيقي c محصور بين a و b حيث $f(c)=k$، أي أنّ $a<c<b$ ، وبضرب أطراف المتراجحة في b نجد $ab<bc<b^2$ ، ومنه $f(b)<bc<f(a)$ ، أي أنّ $bc=k$

إذن: $f(c)=bc$.

هندسيًا هذه الدالة f ممثلة لمستقيم معادلته $y=bx$ في معلم متعامد و متجانس ، حيث يكون لدينا $f(a)=ab$ وَ $f(b)=b^2$ ، وَ $f(c)=bc$ حيث $c\in[a;b]$ ، هذا معناه أنّ $f(b)<f(c)<f(a)$ ومنه $ab<bc<b^2$ ، و بالقسمة على b نجد $a<c<b$ ، أي أنّ c ينتمي إلى $[a;b]$.

حل التمرين 107 ص 35 وَ 36 ج1 :

f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ ، وَ $f(1)=1$:

❖ إثبات أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث $f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$:

نعلم حسب مبرهنة القيم المتوسطة أنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(0)$ وَ $f(1)$ فإنه يوجد عدد حقيقي c محصور بين 0 وَ 1 حيث $f(c)=k$، أي أنّ $0<c<1$ ، وبضرب أطراف المتراجحة في -1 نجد $0>-c>-1$ ، ومنه وبإضافة العدد 1 إلى أطراف المتباينة نجد $1>1-c>0$

و بضرب المتباينة مرة أخرى في العدد الموجب $\frac{1}{1+c}$ نجد $0 < \frac{1-c}{1+c} < \frac{1}{1+c}$ ، أي أنّ

$f(0) < \frac{1-c}{1+c} < f\left(\frac{1}{1+c}\right)$ ، ولدينا $f\left(\frac{1}{1+c}\right) < f(1)$ ، ومنه $f(0) < \frac{1-c}{1+c} < f(1)$ ، أي أنّ $k = \frac{1-c}{1+c}$

<u>إذن:</u> $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$.

حل التمرين 108 ص36 ج1 :

f دالة مستمرة على المجال $I = [0;1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من I ، $f(x) \in I$:

- ❖ إثبات أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث $f(\alpha) = \alpha$:

نضع دالة g معرفة و مستمرة على I ، حيث $g(x) = f(x) - x$ ، و منه لدينا

$g(0) = f(0) - 0 = f(0)$..............(1) ، وَ $g(1) = f(1) - 1$...............(2)

نعلم أنّ $f(x) \in I$ ، ومنه $0 \le f(x) \le 1$ أي أنّ $0 \le f(0) \le 1$ وَ $0 \le f(1) \le 1$

بالتعويض بما لدينا في المعادلة (1) نجد $0 \le f(0)$ ، ومنه $f(0) \ge 0$ ، أي أن $g(0) \ge 0$

و بالتعويض بما لدينا في المعادلة (2) نجد $f(1) - 1 \le 0$ ، ومنه $g(1) \le 0$

بما أنّ الدالة g مستمرة على المجال $[0;1]$ ، وَ $g(0) \times g(1) \le 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ،

يوجد على الأقل عدد حقيقي α من $[0;1]$ ، حيث $f(\alpha) = 0$ ، ومنه $f(\alpha) - \alpha = 0$

<u>إذن :</u> $f(\alpha) = \alpha$.

حل التمرين 109 ص36 ج1 :

1) <u>التخمين :</u> من الشكل المعطى يمكن التخمين بأنه يوجد حل وحيد للمعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ،

لأن على المجال $I = [-\pi;0]$ يوجد تقاطع وحيد للمنحنى (C) الممثل للدالة $x \mapsto \cos x$ و المستقيم

(D) الممثل للدالة $x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

2) f دالة معرفة على المجال $I = [-\pi;0]$ كما يلي: $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$:

أ) التحقق من أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على I :

الدالة f هي دالة مركبة من دالتين قابلتين للاشتقاق على $I = [-\pi;0]$ ، وهما $x \mapsto \cos x$ ، وَ

$x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ، أي أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق على I ودالتها المشتقة هي $f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ب) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا من أجل كل x من المجال $[-\pi;0]$ الدالة المشتقة $f'(x) \ge 0$ ، لأنّ $\sin x \le 0$ على هذا المجال

ومنه $-\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$ ، أي أنّ $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وهذا محقق من أجل كل x من المجال $[-\pi;0]$

أي أنّ الدالة f متزايدة تمامًا على المجال $[-\pi;0]$ ، ومنه جدول التغيرات :

x	$-\pi$	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-1-\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗	1

3) <u>الاستنتاج :</u>

من جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi;0]$ لدينا $f(-\pi)\times f(0)<0$

ونعلم كذلك أنّ الدالة f مستمرة و متزايدة تمامًا على المجال $[-\pi;0]$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $[-\pi;0]$.

$f(x)=0$ معناه $\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=0$ ، ومنه $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$

<u>إذن:</u> نستنتج أنّ المعادلة $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلاً وحيدًا α في المجال $I=[-\pi;0]$.

<u>حل التمرين 110 ص36 ج1 :</u>

n عدد طبيعي غير معدوم :

1) إثبات أنّ المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلاً محصورًا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 :

نضع دالة f حيث $f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ و $D_f=\mathbb{R}$

ومنه لدينا الدالة المشتقة هي : $f'(x)=(n+1)x^n-2nx^{n-1}$ ، أي $f'(x)=x^{n-1}\left[(n+1)x-2n\right]$

إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $(n+1)x-2n$ لأنّ $x^{n-1}>0$ من أجل كل $x>0$

أي أنّ $f'(x)>0$ على المجال $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$. ومنه الدالة f متزايدة تمامًا على هذا المجال .

ومنه جدول التغيرات :

x	1		$\frac{2n}{n+1}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{2n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	1

من جدول التغيرات لدينا $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)\times f(2)<0$ ، لأنه $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$ من أجل كل $x\in\left[1;\frac{2n}{n+1}\right]$

ونعلم كذلك أنّ الدالة f مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $\left[\frac{2n}{n+1};2\right]$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً محصورًا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

<u>إذن:</u> المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلاً محصورًا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

2) إثبات أنّ المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$:

يمكننا كتابة المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ على الشكل $x^{7+1}-2x^7+1=0$ ، ومنه فهذه المعادلة حالة خاصة من معادلة السؤال رقم 1) ، حيث هنا $n=7$

<u>إذن:</u> نعم المعادلة $x^8-2x^7+1=0$

تقبل حلا في $\mathbb{R}$ ، يكون هذا الحل

محصور في المجال $\left]\frac{2n}{n+1};2\right]$

أي محصور بين $\frac{14}{8}$ و 2 .

مسائــل:

حل المسألة 111 ص36 ج1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$:

1) أ) تعيين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1-4+8-4}{0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا من أجل كل x من D_f الدالة المشتقة f' هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-(2(x-1))(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-(2)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-8x^2+8x+8x-8-2x^3+8x^2-16x+8}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

إشارة $f'(x)$:

$f'(x)=0$ معناه $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0$ ، ومنه $\begin{cases} x^2(x-3)=0 \\ \text{و} \\ (x-1)^3\neq 0 \end{cases}$ ، لأن $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

$x^2(x-3)=0$ ، معناه $x^2=0$ ، ومنه $x=0$ ، وَ $(x-3)=0$ ، ومنه $x=3$

أي أنه لمّا $f'(x)=0$ ، $x=\{0،3\}$.

- جدول إشارة $f'(x)$ على D_f :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\parallel$	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	$\parallel$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

- ومنه جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\parallel$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2)

أ) تعيين الأعداد الحقيقية a ، b ، c ، وَ d ، بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$:

لدينا : $f(x) = ax + b + \dfrac{cx+d}{(x-1)^2} = \dfrac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + d}{(x-1)^2} = \dfrac{(ax+b)(x^2-2x+1)+cx+d}{(x-1)^2}$

$$= \frac{ax^3 - 2ax^2 + ax + bx^2 - 2bx + b + cx + d}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b+c)x + (b+d)}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ نجد : $a = 1$ ، وَ $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2(1) = -4 \end{cases}$ ، ومنه $b = -2$

و بالمطابقة كذلك نجد $\begin{cases} a - 2b + c = 8 \\ b + d = -4 \end{cases}$ ، ومنه $\begin{cases} 1 - 2(-2) + c = 8 \\ (-2) + d = -4 \end{cases}$ ، أي أن $c = 3$ وَ $d = -2$

<u>إذن :</u> $a = 1$ ، $b = -2$ ، $c = 3$ ، وَ $d = -2$ ، أي أن $f(x) = x - 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$.

ب) لدينا $f(x) = x - 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ ، و معادلة المستقيم $(D): y = x - 2$:

ومنه $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left[\left(x - 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}\right) - (x-2)\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left[\dfrac{3x-2}{(x-1)^2}\right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left[\dfrac{3}{x}\right] = 0$

إذن : نستنتج أنّ المستقيم $(D): y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى (C_f) في جوار $-\infty$ وَ $+\infty$.

ج) تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) ، حيث النقطة A نقطة تقاطع (C_f) وَ (D) :

لدينا $f(x) - y = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ ، ومنه $(x-1)^2 > 0$ ، وَ $3x - 2 = 0$ ، أي أن $x = \dfrac{2}{3}$ ،

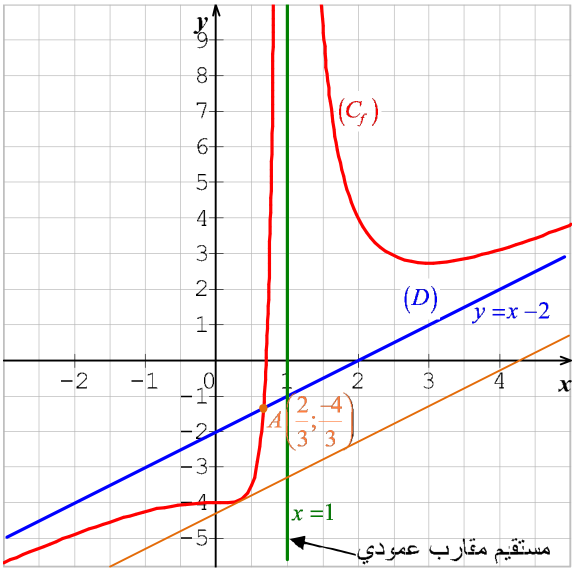
ومنه توجد نقطة تقاطع وحيدة و هي $A\left(\dfrac{2}{3}; f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)$ ، ومنه $A\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{-4}{3}\right)$

إذن : لمّا $x \in \left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ ، $f(x)-y<0$ ، ومنه (C_f) يقع أسفل (D) .

و لمّا $x \in \left]\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$ ، $f(x)-y>0$ ، ومنه (C_f) يقع فوق (D) .

و لمّا $x=\frac{2}{3}$ ، (C_f) يتقاطع مع (D) في نقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$.

3) رسم (C_f) وَ (D) : (حيث تؤخذ الوحدة $1cm$ على (Ox) وَ $0,5cm$ على (Oy)) :



4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α على المجال $]-\infty;1[$:

من جدول التغيرات لدينا الدالة f رتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty;1[$

- نتحقق أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0 < \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=+\infty$ ، وَ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$ ، ومنه $-\infty<0<+\infty$ ، وهذا محقق

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدًا α على المجال $]-\infty;1[$.

- لدينا من منحنى الدالة f ، $\frac{2}{3}<\alpha<1$ ، أي $0,66<\alpha<1$.

5) الاستنتاج **بيانيًا** عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ ، حيث m وسيط حقيقي :

المعادلة $f(x)=x+m$ بيانيًا تعني نقط تقاطع $y=x+m$ مع (C_f)، وبما أنّ m وسيط حقيقي فهو متغير

<u>إذن:</u> لمّا $m \geq 0$ نجد $y=x+m$ وهذه معادلة لمستقيم يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين ويكون موازي للمستقيم المقارب $(D): y=x-2$ ، لأنه لهما نفس الميل (معامل التوجيه) الذي يساوي 1 .

ولمّا $m=-2$ نجد $y=x-2$ وهذه معادلة (D) حيث يقطع (C_f) في نقطة وحيدة هي $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$ ، أي يوجد حل وحيد هو $\frac{2}{3}$.

و لمّا $m<-2$ نجد $y=x-m$ و هذه معادلة لمستقيم يمكن أن يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين ، كما يمكن أن يكون مماسًا للمنحنى (C_f) في نقطة وحيدة . (كما في التمثيل البياني أعلاه) .

ويمكن كذلك أن لا يقطع (C_f) في أي نقطة لمّا تكون m أصغر تمامًا من فاصلة نقطة التماس .

<u>**إذن :**</u> عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ لا يزيد عن حلين مختلفين (هذا بيانيًا) .

- تعيين معادلة للمماس (C_f) : لدينا معادلة المماس هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

لدينا ميل المماس يساوي 1 ، ومنه $f'(x)=1$ أي أنّ $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=1$ ، ومنه $x^2(x-3)=(x-1)^3$

و هذا يكافئ $x^3-3x^2=x^3-3x^2+3x-1$ أي أنّ $3x=1$ ، ومنه $x=\frac{1}{3}$.

لدينا $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{27}-\frac{4}{9}+\frac{8}{3}-4}{\frac{4}{9}}=\frac{1-12+72-108}{27}\times\frac{9}{4}=\frac{-47}{27}\times\frac{9}{4}=\frac{-47}{12}$

ومنه معادلة المماس هي $y=1\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{47}{12}$ أي أنّ $y=x-\frac{17}{4}$.

إذن : $m=-\frac{17}{4}$ ، وهي فاصلة النقطة الوحيدة للتماس بين (C_f) والمماس ، أي المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلا وحيدًا لمّا $m=-\frac{17}{4}$.

ولمّا $m<-\frac{17}{4}$ المعادلة لا تقبل أي حل (يكون المستقيم $y=x+m$ أسفل (C_f)) .

ولمّا $-\frac{17}{4}<m<-2$ المعادلة تقبل حلّين ، (المستقيم $y=x+m$ يقطع (C_f) في نقطتين متمايزتين) .

6) أ) إثبات أنّ فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) التالية : $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$:

فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ معناه حلول المعادلة $f(x)=x+m$:

لدينا $f(x)=x+m$ معناه $\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=x+m$ ، ومنه وبضرب الطرفين في الوسطين نجد $x^3-4x^2+8x-4=x+m(x-1)^2$ ، ومنه $x^3-4x^2+8x-4=(x+m)(x^2-2x+1)$ أي أنّ $x^3-4x^2+8x-4=x^3-2x^2+x+mx^2-2mx+m$ ، ومنه $-2x^2-mx^2+2mx+7x-m-4=0$ أي أنّ $-(m+2)x^2+(2m+7)x-m-4=0$ ، و منه $(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$ وهي المعادلة (E)

أي أنّ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي نفسها حلول المعادلة (E) .

وبما أنّ حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ ، فإن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$

ب) إيجاد حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) :

لدينا مميز (E) هو $\Delta=(2m+7)^2-4((m+2)(m+4))=4m^2+28m+49-4m^2-16m-8m-32=4m+17$

- ومنه لمّا $m=-2$ نجد بالتعويض في المعادلة (E) أنّ $-(-4+7)x+4-2=0$ ، ومنه $-3x=-2$ أي $x=\frac{2}{3}$ ، وهي فاصلة النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$.
- لمّا $-\frac{17}{4}<m<-2$ نجد أن $\Delta>0$ ومنه المعادلة تقبل حلين مختلفين .
- لمّا $m<-\frac{17}{4}$ نجد أنّ $\Delta<0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلول .
- لمّا $m=-\frac{17}{4}$ نجد أنّ $\Delta=0$ و منه المعادلة (E) تقبل حل مضاعف (وحيد) .

- إذن: عدد حلول المعادلة (E) لا يزيد عن حلين مختلفين .

حل المسألة 112 ص36 و 37 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) إثبات أنّ الدالة f فردية :

لدينا من أجل كل x و $-x$ من D_f ، $f(-x)=-x-\frac{x}{\sqrt{(-x)^2-4}}=-\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)=-f(x)$

ومنه نستنتج أنّ الدالة f فردية ، (أي أنّ مبدأ المعلم مركز تناظر المنحنى (C)) .

2) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ ، ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-2} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}-2}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=-2+\frac{-2}{0^+}=-2+(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}2}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=2+\frac{2}{0^+}=2+(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\left(\sqrt{x^2-4}+1\right)}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2-4}+1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

3) إثبات أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

معناه $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-x-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]=0$

أي أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.

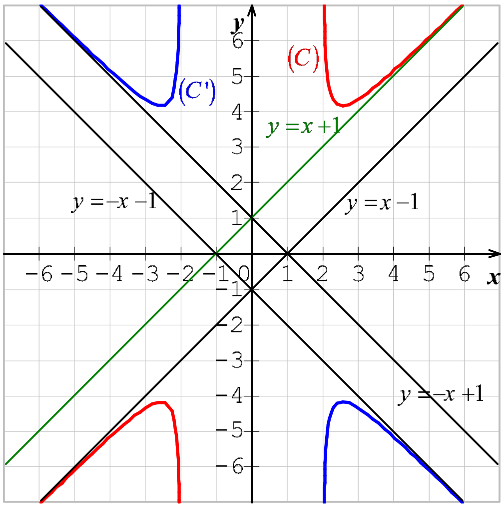
- تحديد وضعية (C) بالنسبة لـ(Δ) : لدينا $f(x)-y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1$

ومنه لمّا $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}-1=0$ نجد $\sqrt{x^2-4}=x$ ، ومنه $x^2-4=x^2$ أي أنّ $-4=0$ و هذا مستحيل

و لدينا كذلك $\sqrt{x^2-4}\neq 0$ أي أنّ $x^2\neq 4$ ، ومنه $x\neq 2$ و $x\neq -2$ أي أن $(C)\cap(\Delta)=\varnothing$

و منه لمّا $x\in]-\infty;-2[$ المنحنى (C) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

ولمّا $x\in]2;+\infty[$ المنحنى (C) يقع فوق المستقيم (Δ) .



4) استنتاج مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$:

لدينا الدالة f فردية ، ومنه فإنها تقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر للمنحنى (C)، وبما أنّ $(\Delta): y=x+1$ مستقيم مقارب لها عند $+\infty$ فإنها تقبل أيضًا المستقيم $(\Delta'): y=x-1$ كمستقيم مقارب مائل عند $-\infty$

لأن $(\Delta'): y=x-1$ هو نظير $(\Delta): y=x+1$ بالنسبة للمبدأ.

5) تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C') ، حيث (C') منحنى الدالة g المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=-f(x)$

هذا معناه أنّ (C') هو نظير (C) بالنسبة لمحور التراتيب ، ومنه فالمستقيمات المقاربة للمنحنى (C') تكون نظيرة للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C)

أي أنّ المستقيمان $(\Gamma): y=-x+1$ وَ $(\Gamma): y=-x-1$ مقاربان للمنحنى (C') .

حل المسألة 113 ص 37 ج1 :

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ : $f(x)=|x+1|+\dfrac{x}{x^2-1}$ ، وَ (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم :

1) أ) كتابة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

لدينا من أجل كل $x \in D_f$ ، $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x+1 \geq 0 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x+1 < 0 \end{cases}$ أي

و هذا يكافئ $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x \geq -1 \\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x < -1 \end{cases}$ ، أي $f(x)=\begin{cases} x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x \in [-1;+\infty[\\ -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & ; x \in]-\infty;-1[\end{cases}$

ب) دراسة نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف :

لدينا $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، ومنه :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x^3+x-x^2+1+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to-\infty}[-x]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left[-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-x+x^2-1+x}{x^2-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}[x]=+\infty$$

2) أ) حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها :

لدينا من أجل كل x من D_f الدالة المشتقة f' هي :

$$f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -1+\dfrac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$ ، أي : $$f'(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} & ;x\in]-1;1[\cup]1;+\infty[\\ -\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right) & ;x\in]-\infty;-1[\end{cases}$$

- إشارة $f'(x)$:

لدينا على المجال $]-\infty;-1[$ ، $f'(x)=-\left(1+\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ ،ومنه $f'(x)<0$.

ولدينا على المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ ، $f'(x)=1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ ،ومنه لمّا $f'(x)\geq 0$ نجد $1-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\geq 0$

ومنه $\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\leq 1$ ،أي $1+x^2\leq(x^2-1)^2$ ،ومنه $1+x^2\leq x^4-2x^2+1$ ، هذا يكافئ $x^4-3x^2\geq 0$

أي أنّ $x^2(x^2-3)\geq 0$ ، ومنه $x^2\geq 0$ أي $x=0$ ، وَ $x^2\geq 3$ أي $x=\sqrt{3}$ وَ $x=-\sqrt{3}$.

إذن لمّا $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\sqrt{3}[$ نجد $f'(x)<0$ ، ومنه الدالة f متناقصة تمامًا على هذا المجال . لأنّ $x=-\sqrt{3}$ لاينتمي إلى المجال $]-1;1[\cup]1;+\infty[$.

و لمّا $x\in]\sqrt{3};+\infty[$ نجد $f'(x)>0$ ، ومنه الدالة f متزايدة تمامًا على هذا المجال .

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$ $+\infty$

3) أ) إثبات أنّ المستقيمين $(\Delta):y=x+1$ وَ $(\Delta'):y=-x-1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ وَ $-\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}-(-x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

ومنه المستقيم $(\Delta'):y=-x-1$ مقارب مائل عند $-\infty$.

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$

ومنه المستقيم $(\Delta):y=x+1$ مقارب مائل عند $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) على المجال $]1;+\infty[$ ، و بالنسبة إلى (Δ') على المجال $]-\infty;-1[$:

لدينا من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، $[f(x)-(\Delta)]=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

ولدينا $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ من أجل كل $x\in]1;+\infty[$ ، ومنه (C) يقع فوق (Δ) على المجال $]1;+\infty[$.

ولدينا كذلك من أجل كل $x \in]-\infty;-1[$ ، $[f(x)-(\Delta')]=-x-1+\dfrac{x}{x^2-1}-(-x-1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

ومن أجل كل $x \in]-\infty;-1[$ لدينا $\dfrac{x}{x^2-1}<0$ ، ومنه (C) يقع فوق (Δ') على المجال $]-\infty;-1[$.

4) إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدًا α على المجال $]-1;1[$:

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنّ $f(x)$ مستمرة و رتيبة تمامًا و تغير اشارتها على المجال $]-\infty;-1[$ ، ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدًا على المجال $]-1;1[$ حيث $f(\alpha)=0$.

إيجاد حصر للعدد α سعته 10^{-1} :

لدينا $\alpha \in]-1;1[$ و $f(0)=1$ ، لأن 0 هو منتصف المجال $]-1;1[$ ، ومنه الدالة f تغيّر إشارتها على المجال $]0;1[$ أي أنّ $\alpha \in]0;1[$.

و $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ ، لأن $\dfrac{1}{2}$ هو منتصف المجال $]0;1[$ ، ومنه الدالة f تغيّر إشارتها على المجال $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

أي أنّ $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2};1\right[$.

<u>إذن :</u> الحل الوحيد α للمعادلة $f(x)=0$ محصور بين $0,5$ و 1 .

<u>حل المسألة 114 ص 37 ج1 :</u>

نعتبر الدالتان f و g المعرفتان على المجموعة $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ و C_f و C_g تمثيلاهما البيانيين على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$:

1) أ) تعيين نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$.

ب) تعيين نهاية الدالة f عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\times\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\right]=\frac{1}{-\infty}=0$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=0$ (أي محور الفواصل) هو مستقيم مقارب أفقي للمنحنى C_f .

ج) إثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y=2x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$:

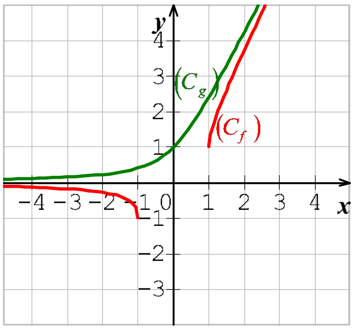
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\Delta)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\times\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$$

<u>إذن :</u> المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2) أ) حساب $f(x)\times g(x)$ ، ثم استنتاج نهايات الدالة g عند $-\infty$ وَ $+\infty$:

$$f(x)\times g(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=x^2-x^2+1=1$$



لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وَ $f(x)\times g(x)=1$ ومنه

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

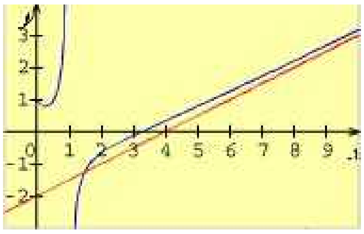
و لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ ، ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$.

ب) التفسير الهندسي لهذه النتيجة هو أنّ المنحنيان C_f وَ C_g متقاربان عند $-\infty$ وَ $+\infty$.

اختيار من متعدد :

حل التمرين 115 ص38 ج1 :

تعيين الإجابة الصحيحة دون تبرير:



في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني (C_f) لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x-1)}$ و المستقيم Δ الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x-2$:

1) أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب لـ (C_f) **(خطأ)**

ب) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ (C_f) **(صحيح)**

ج) (C_f) لا يقبل مستقيمًا مقاربًا أفقيًا و لا عموديًا **(خطأ)**

2) من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2(x-1)}$:

أ) $a=-2$ ، $b=2$ ، $c=-3$ **(خطأ)**

ب) $a=2$ ، $b=-2$ ، $c=-3$ **(خطأ)**

ج) $a=1$ ، $b=2$ ، $c=3$ **(خطأ)**

3) (C_f) يقبل مستقيم مقارب عند $+\infty$ معادلته :

أ) $y=\dfrac{1}{2}x+1$ **(خطأ)** ، ب) $y=\dfrac{1}{2}x+2$ **(خطأ)** ، ج) $y=\dfrac{1}{2}x-2$ **(صحيح)**

4) أ) (C_f) يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ **(صحيح)**

ب) (C_f) يقطع المستقيم المقارب في النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$ **(خطأ)**

ج) (C_f) لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة **(خطأ)**

5) على المجال $[0;1[$ المعادلة $f(x)=1$ تقبل :

أ) حلا واحدا **(خطأ)** ، ب) حلين متمايزين **(صحيح)** ، ج) ثلاثة حلول **(خطأ)**

حل التمرين 116 ص38 ج1 :

f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-5}$:

1) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=-\infty$ **(صحيح)** 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **(خطأ)**

3) من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{5\}$: $f(x)=3x+10+\dfrac{50}{x-5}$ **(صحيح)**

4) المستقيمان اللذان معادلتهما $x=5$ و $y=3x+10$ مقاربان لمنحنى الدالة f **(صحيح)** .

صحيح أم خاطئ :

حل التمرين 117 ص38 ج1 :

لدينا جدول تغيرات دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

و (C_f) منحنى الدالة f الممثل في معلم :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		0		
$f(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

1) المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب لـ(C_f) **(خطأ)** (المستقيم الذي معادلته $x=1$ يقطع (C_f))

2) محور التراتيب مقارب لـ(C_f) **(صحيح)**

3) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع (C_f) في نقطة واحدة **(خطأ)** (هذا المستقيم يقطع (C_f) في 4 نقاط)

4) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في المجال $]0;+\infty[$ **(صحيح)**

5) على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 3$ **(خطأ)** (الصحيح هو على المجال $]-\infty;0[$ ، $f(x)\leq 2$) .

حل التمرين 118 ص38 ج1 :

f دالة مستمرة و متناقصة تمامًا على المجال $[0;+\infty[$ ، إذن :

أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ **(صحيح)** (لأنّ الدالة f متناقصة)

ب) من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)<f(0)$ **(صحيح)**

ج) منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل على الأقل في نقطة **(صحيح)** (لأن 0 ينتمي لمجموعة التعريف)

حل التمرين 119 ص38 ج1 :

(C_f) هو المنحنى الممثل لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ في معلم متعامد و متجانس ، وَ (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=1-x$:

1) إذا كان (Δ) مقارب لـ(C_f) عند $-\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **(خطأ)**

2) إذا كان (Δ) مقارب لـ(C_f) عند $+\infty$ فلا يوجد مستقيم مقارب أفقي لـ(C_f) **(صحيح)**

3) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ فلا يمكن لـ (Δ) أن يكون مقاربًا لـ (C_f) **(صحيح)**

4) إذا كان (Δ) مقاربًا لـ (C_f) عند $+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x=1$ **(صحيح)**

حل التمرين 120 ص38 ج1 :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1$ **(خطأ)** (الصحيح هو $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$)

2) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$ **(خطأ)**

3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=1$ **(صحيح)**

4) $\lim_{x\to0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sin x}{x}\right)=1$ **(صحيح)**