تمارين محلولة في الإحتمالات

التمرين الأول : باك علوم تجريبية[2018][م1]

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كرات بيضاء مرقمة بـ: 1 ، 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2 ، 3 ، 3 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من هذا الصندوق .

نعتبر الحادثتين A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ".

و B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " .

1) أ ـ أحسب: $P(A)$ و $P(B)$ إحتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

بـ ـ بيّن أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

تصحيح مقترح :

عدد السحبات الممكنة هو: $C_{10}^3=\frac{10!}{3!\times 7!}=120$.

1) أ ـ حساب الإحتمالات :

A : " الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ألوان العلم الوطني ". أي الحصول على ثلاثة ألوان الأبيض و الأحمر و الأخضر .

$$P(A)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

B : " الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم " . $P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3}{120}=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$

بـ ـ تبيان أن: $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$: $P(A\cap B)$ هو إحتمال سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم و من ألوان مختلفة .

$$P(A\cap B)=\frac{C_2^1\times C_2^1\times C_1^1+C_1^1\times C_1^1\times C_2^1}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$$

حساب الإحتمال الشرطي $P_A(B)$: $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{6}$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{36}{120}+\frac{14}{120}-\frac{6}{120}=\frac{44}{120}=\frac{11}{30}$$.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا . لدينا : $X\in\{0;1;2;3\}$.

$P(X=0)=\frac{C_5^3}{120}=\frac{10}{120}$ ، $P(X=1)=\frac{C_5^1\times C_5^2}{126}=\frac{50}{120}$ ، $P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_5^1}{126}=\frac{50}{120}$

$P(X=3)=\frac{C_5^3}{126}=\frac{10}{120}$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

بـ ـ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$.

إعداد : بخاخشة خالد

التمرين الثاني : باك تقني رياضي [2018] [م2]

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

I) 1) أحسب إحتمال الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون " .

2) أحسب إحتمال الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون " .

II) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث α عدد طبيعي معطى و DA تعني دينار جزائري).

فإذا سحب كريتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، و إذا سحب كريتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ،

و إذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه . و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

1) برر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$ ثم عرف قانون إحتماله .

2) بين أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X بدلالة α هو : $E(X)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$.

ثم جد أكبر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

تصحيح مقترح :

كيس به 7 كريات متماثلة ، لانفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و4 خضراء . نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين من الكيس .

عدد السحبات الممكنة هو: $C_7^2=\dfrac{7!}{2!\times 5!}=21$.

I) حساب الإحتمالات :

1) الحادثة A : " سحب كريتين مختلفتين في اللون " .
$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_4^1}{21}=\frac{3\times 4}{21}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

2) الحادثة B : " سحب كريتين من نفس اللون " .
$$P(B)=1-P(A)=\frac{3}{7}$$

II) X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α :

1) تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : $\{100-\alpha, 50-\alpha, -\alpha\}$

اللاعب يدفع αDA ويسحب كريتين في آن واحد .

الحصول على كريتين خضراوين ، الحصول على كريتين بيضاوين ، الحصول على كرة بيضاء وكرة خضراء .

الحصول على كريتين بيضاوين يربح $100DA$ ومنه $X=100-\alpha$.

الحصول على كريتين مختلفتين يربح $50DA$ ومنه $X=50-\alpha$.

الحصول على كريتين خضراوين يخسر ما دفعه ومنه $X=-\alpha$.

لدينا : $P(X=100-\alpha)=\dfrac{C_3^2}{21}=\dfrac{3}{21}$ ، $P(X=50-\alpha)=P(A)=\dfrac{12}{21}$ ، $P(X=-\alpha)=\dfrac{C_4^2}{21}=\dfrac{6}{21}$

قانون الإحتمال :

X	$100-\alpha$	$50-\alpha$	$-\alpha$
$P(X=x_i)$	$\dfrac{3}{21}$	$\dfrac{12}{21}$	$\dfrac{6}{21}$

2) إثبات أن الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X هو : $E(X)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$.

لدينا : $E(X)=(100-\alpha)\left(\dfrac{3}{21}\right)+(50-\alpha)\left(\dfrac{12}{21}\right)+(-\alpha)\left(\dfrac{6}{21}\right)$

و منه : $E(X)=\dfrac{300-3\alpha+600-12\alpha-6\alpha}{21}=\dfrac{-21\alpha+900}{21}$ أي : $E(X)=-\alpha+\dfrac{300}{7}$.

• إيجاد أكبر قيمة للعدد α حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب : حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب يجب أن يكون $E(X)>0$

أي : $-\alpha+\dfrac{300}{7}>0$ ومنه $\alpha<\dfrac{300}{7}$ و منه $\alpha<42{,}85$ ، إذن أكبر قيمة لـ α هي $42DA$.

إعداد : بخاخشة خالد

التمرين الثالث : باك رياضيات[2018][م2]

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3 ، 2 ، 3 و كرية بيضاء مرقمة بـ: -1 .

نسحب عشوائيا 4 كريات في آن واحد .

1) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " .

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

أ- عيّن قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون إحتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

جـ- أحسب إحتمال الحادثة : " $X^2-X>0$ " .

تصحيح مقترح :

عدد السحبات الممكنة هو: $C_9^4=\frac{9!}{4!\times 5!}=126$.

1) حساب الإحتمالات :

A : " الحصول على أربع كريات من نفس اللون " . $P(A)=\frac{C_5^4}{126}=\frac{5}{126}$

B : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " . معناه إما واحدة بيضاء وثلاث من اللونين الآخرين أو الأربع كريات كلها مختلطة بين الأحمر والأخضر . $P(B)=\frac{C_1^1\times C_8^3+C_8^4}{126}=\frac{126}{126}=1$

C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم " . معناه : $\{-3;-1;2;2\}$ أو $\{-3;-1;1;3\}$.

و لدينا 4 كريات مرقمة بـ 2 و كرية مرقمة بـ -1 و كرية مرقمة بـ -3 و كرية مرقمة بـ 3 و كريتان مرقمتان بـ 1 .

و منه : $P(C)=\frac{C_1^1\times C_1^1\times C_4^2+C_1^1\times C_1^1\times C_1^1\times C_1^1}{126}=\frac{6+2}{126}=\frac{8}{126}$

2)أ- X هو عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس .

في الكيس 9 كريات من بينها 3 كريات خضراء و منه عندما نسحب 4 كريات فإما يتبقى 3 كريات خضراء أو كريتين خضراوين أو كرية واحدة خضراء أو لا تتبقى أية كرية خضراء . و منه $X\in\{0;1;2;3\}$.

و لدينا: $P(X=0)=\frac{C_3^3\times C_6^1}{126}=\frac{6}{126}$ ، $P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_6^2}{126}=\frac{45}{126}$ ، $P(X=2)=\frac{C_3^1\times C_6^3}{126}=\frac{60}{126}$

$P(X=3)=\frac{C_6^4}{126}=\frac{15}{126}$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{6}{126}$	$\frac{45}{126}$	$\frac{60}{126}$	$\frac{15}{126}$

ب- حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$: $E(X)=0\times\frac{6}{126}+1\times\frac{60}{126}+2\times\frac{45}{126}+3\times\frac{15}{126}=\frac{5}{3}$.

جـ- حساب إحتمال الحادثة : " $X^2-X>0$ " : $X^2-X>0$ معناه $X(X-1)>0$ أي $X\in\{2;3\}$ ومنه :

$$P(X^2-X>0)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{60}{126}+\frac{15}{126}=\frac{75}{126}=\frac{25}{42}$$

التمرين الرابع : باك رياضيات[2009]

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء .

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد .

أ ـ أحسب إحتمال الحصول على 3 كريات بيضاء .

بـ ـ أحسب إحتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي .

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع) .

أحسب إحتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

تصحيح مقترح :

1) عدد السحبات الممكنة هو: $C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\times 7!}=120$.

أ ـ A : " الكريات الثلاث المسحوبة بيضاء " . $P(A)=\frac{C_4^3}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

بـ ـ B : " الحصول على كرية حمراء على الأقل " . يعني الحصول عى ثلاث كريات حمراء أو كريتين حمراوين و كرية بيضاء أو كرية حمراء و كريتين بيضاوين . $P(B)=\frac{C_6^3}{120}+\frac{C_6^2\times C_4^1}{120}+\frac{C_6^1\times C_4^2}{120}=\frac{20}{120}+\frac{60}{120}+\frac{36}{120}=\frac{116}{120}=\frac{29}{30}$

ملاحظة : الحدث B هو الحدث العكسي لـ A . و منه : $P(B)=1-P(A)=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}$.

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عدد الكريات البيضاء التي يمكن سحبها هي : $3;2;1;0$ و منه $X\in\{0;1;2;3\}$.

- حساب إحتمال الحدث : "$X=0$" أي عدم الحصول على أية كرية بيضاء . $P(X=0)=\frac{C_6^3}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=1$" أي إحتمال الحصول على كرية بيضاء واحدة بالضبط .

$$P(X=1)=\frac{C_6^2\times C_4^1}{120}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$$

- حساب إحتمال الحدث : "$X=2$" أي إحتمال الحصول على كريتين بيضاوين بالضبط .

$$P(X=2)=\frac{C_6^1\times C_4^2}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

- حساب إحتمال الحدث : "$X=3$" أي إحتمال الحصول على كرية بيضاء واحدة . $P(X=3)=\frac{C_4^3}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

حساب الأمل الرياضياتي: $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع) .

نسمي الحدث "$Y=2$" " الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط " .

$$P(Y=2)=C_5^2\left(\frac{1}{30}\right)^2\left(\frac{29}{30}\right)^3\simeq 0,01$$

تمارين محلولة في الإحتمالات

التمرين الخامس : باك علوم طبيعية [2003]

يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء ، إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم 1 و الأخريان تحملان الرقم 5 أما القريصات الحمراء فاثنتان منهما تحملان الرقم 2 و الأخريان تحملان الرقم 3 .

نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد و نحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

1) ما إحتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 ؟

2) ما هو إحتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين ؟

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي .

تصحيح مقترح :

عدد السحبات الممكنة هو: $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!\times 5!} = 21$.

1) A : " الحصول على قريصتين مجموع رقميهما أكبر تماما من 6 ". يعني الحصول على قريصتين بيضاوين تحملان الرقم 5 أو قريصة بيضاء تحمل الرقم 5 و قريصة حمراء تحمل الرقم 2 أو قريصة بيضاء تحمل الرقم 5 و قريصة حمراء تحمل الرقم 3 .

$$P(A) = \frac{C_2^2 + C_2^1\times C_2^1 + C_2^1\times C_2^1}{21} = \frac{1+2\times 2+2\times 2}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

2) نسمي الحدث B : " الحصول على قريصتين بيضاوين " .

إحتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من 6 علما أن القريصتين بيضاوين هو : $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{C_2^2}{21}}{\frac{C_3^2}{21}} = \dfrac{C_2^2}{C_3^2} = \dfrac{1}{3}$.

3) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما . قيم المتغير X هي : $10;8;7;6;5;4;3$.

- حساب إحتمال الحدث : "$X=3$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 3 ". $P(X=3) = \dfrac{C_2^1\times C_1^1}{21} = \dfrac{2}{21}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=4$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 4 ". $P(X=4) = \dfrac{C_2^1\times C_1^1 + C_1^1}{21} = \dfrac{3}{21}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=5$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 5 ". $P(X=5) = \dfrac{C_2^1\times C_2^1}{21} = \dfrac{4}{21}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=6$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 6 ". $P(X=6) = \dfrac{C_2^1\times C_1^1 + C_2^2}{21} = \dfrac{3}{21}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=7$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 7 ". $P(X=7) = \dfrac{C_2^1\times C_2^1}{21} = \dfrac{4}{21}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=8$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 8 ". $P(X=8) = \dfrac{C_2^1\times C_2^1}{21} = \dfrac{4}{21}$
- حساب إحتمال الحدث : "$X=10$" أي إحتمال الحصول على قريصتين مجموع رقميهما 10 ". $P(X=10) = \dfrac{C_2^2}{21} = \dfrac{1}{21}$

قانون الإحتمال:

X_i	3	4	5	6	7	8	10
$P(X=X_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$

حساب الأمل الرياضياتي: $E(X) = 3\times\frac{2}{21} + 4\times\frac{3}{21} + 5\times\frac{4}{21} + 6\times\frac{3}{21} + 7\times\frac{4}{21} + 8\times\frac{4}{21} + 10\times\frac{1}{21} = \frac{126}{21} = 6$.

إعداد : بخاخشة خالد

التمرين السادس : باك علوم طبيعية[2002]

كيس به 10 كرات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها : 3 حمراء ، 3 خضراء و 4 بيضاء .

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كرات في آن واحد .

ما إحتمال الحصول على :

أ- نفس اللون ؟

ب- الألوان الثلاثة ؟

جـ- كرة بيضاء واحدة على الأقل ؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي .

تصحيح مقترح :

1) عدد السحبات الممكنة هو: $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$.

أ- A : " الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون ."

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3 + C_3^3}{120} = \frac{1+1+4}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

ب- B : " الحصول على ثلاث كرات تحمل الألوان الثلاثة " . يعني الحصول عى كرة حمراء و كرة بيضاء و كرة خضراء .

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_3^1 \times C_4^1}{120} = \frac{3 \times 3 \times 4}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

جـ- C : " الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

$$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_6^2 + C_4^2 \times C_6^1 + C_4^3}{120} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6} .$$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عدد الكرات البيضاء التي يمكن سحبها هي : $3;2;1;0$ و منه $X \in \{0;1;2;3\}$.

- حساب إحتمال الحدث : " $X = 0$ " أي عدم الحصول على أية كرة بيضاء . $P(X=0) = \frac{C_6^3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$
- حساب إحتمال الحدث : " $X = 1$ " أي إحتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة بالضبط . $P(X=1) = \frac{C_6^2 \times C_4^1}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$
- حساب إحتمال الحدث : " $X = 2$ " أي إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين بالضبط . $P(X=2) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$
- حساب إحتمال الحدث : " $X = 3$ " أي إحتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء . $P(X=3) = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

قانون الإحتمال:

X_i	0	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

حساب الأمل الرياضياتي:

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5} .$$