المحور الثاني: أنشطة حول الأعداد المركبة

http://ensdz28.blogspot.com/

1) تمارين محلولة :

التمرين 01:

أ)نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ العدد المركب $z = x + iy$ صورته النقطة M، نضع: $L = \frac{\bar{z}+1}{z+i}$ حيث $z \neq -i$.

1) أكتب L على الشكل الجبري.

2) أثبت أن مجموعة النقط M من المستوي حتى يكون L تخيليا صرفا هي إتحاد مستقيمين يطلب معادلتهما.

ب) نفرض أن: $z = 2 - 2i$ و نضع: $\frac{z}{u} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$.

1) أكتب z على الشكل المثلثي

2) أوجد u بالشكلين المثلثي و الجبري

3) إستنتج قيمتي $\sin\frac{13\pi}{12}$ و $\cos\frac{13\pi}{12}$.

4) أكتب العدد $\left(\frac{z}{u}\right)^{2014}$ على الشكل الجبري.

الحل :

أ)1) كتابة العدد L على الشكل الجبري:

$$L = \frac{\bar{z}+1}{z+i} = \frac{x-iy+1}{x+iy+i} = \frac{(x+1)-iy}{x+i(y+1)} = \frac{[(x+1)-iy][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(x^2-y^2+x-y)+i(-2xy-x-y-1)}{x^2+(y+1)^2}$$ و

عليه : $Re(L) = \frac{(x^2-y^2+x-y)}{x^2+(y+1)^2}$ و $Im(L) = \frac{(-2xy-x-y-1)}{x^2+(y+1)^2}$

2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لكي يكون L عدد تخيلي صرف :

معناه $Re(L) = 0$ يكافئ $\frac{x^2-y^2+x-y}{x^2+(y+1)^2} = 0$ يكافئ $\begin{cases} x^2-y^2+x-y=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$ يكافئ

أي $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ (x;y) \neq (0;-1) \end{cases}$ اي $\begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x;y) \neq (0;-1) \end{cases}$ $\begin{cases} x+\frac{1}{2} = y+\frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad y+\frac{1}{2} = -\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ (x;y) \neq (0;-1) \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} y = x \quad \text{أو} \quad y = -x-1 \\ (x;y) \neq (0;-1) \end{cases}$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

الخلاصة: مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لكي يكون L عدد تخيلي صرف هي إتحاد المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) ذو المعادلتين $y = x$ و $y = -x-1$ على الترتيب .

ب) نضع : $z = 2-2i$ و $\frac{z}{u} = \sqrt{2}\left[\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right]$

1) كتابة z على الشكل المثلثي :

طويلة العدد z : $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

عمدة العدد z: لتكن θ_1 عمدة العدد z وعليه $\begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$

الخلاصة : الشكل المثلثي للعدد z هو: $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) الشكل المثلثي للعدد u :

طويلة العدد u : لدينا $\left|\frac{z}{u}\right| = \sqrt{2}$ وعليه $\frac{|z|}{|u|} = \sqrt{2}$ اي $|u| = \frac{|z|}{\sqrt{2}}$ ومنه $|u| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ أي $|u| = 2$.

عمدة العدد u : لدينا $\arg\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{13\pi}{12}$ يكافئ $\arg(z) - \arg(u) = \frac{13\pi}{12}$ أي $\arg(u) = \arg(z) - \frac{13\pi}{12}$

اي $\arg(u) = -\frac{\pi}{4} - \frac{13\pi}{12}$ ومنه $\arg(u) = -\frac{4\pi}{3}$.

الخلاصة: الشكل المثلثي للعدد u هو : $u = 2\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

الشكل الجبري للعدد u :

لدينا $\begin{cases} \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه : $u = 2\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ أي $u = -1 + i\sqrt{3}$.

3) إستنتاج قيمتي $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$:

الشكل الجبري للعدد $\frac{z}{u}$:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

لدينا ،

$$\frac{z}{u}=\frac{2-2i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(2-2i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}=\frac{-2-2i\sqrt{3}+2i-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}}{4}+i\frac{2-2\sqrt{3}}{4}=\boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

بمطابقة الشكل الجبري مع الشكل المثلثي للعدد $\frac{z}{u}$ نجد :

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

أي

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

http://ensdz28.blogspot.com/

4) **كتابة العدد $\left(\frac{z}{u}\right)^{2014}$ على الشكل الجبري:**

لدينا ،

$$\left(\frac{z}{u}\right)^{2014}=\left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]^{2014}=\left(\sqrt{2}\right)^{2014}\left[\cos\left(\frac{26182\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{26182\pi}{12}\right)\right]$$

لدينا

$$\frac{26182\pi}{12}=2181\pi+\frac{10\pi}{12}=2182\pi+\left(-\pi+\frac{10\pi}{12}\right)=2182\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه:

$$\left(\frac{z}{u}\right)^{2014}=\left(\sqrt{2}\right)^{2014}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

أي

$$\left(\frac{z}{u}\right)^{2014}=\left(\sqrt{2}\right)^{2014}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]$$

التمرين 02:

1) لتكن الأعداد المركبة : $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=2\overline{z}_1$ ، $z_3=-2i$

أ)أكتب كل من الأعداد المركبة: z_1 ، z_2 ، $K=\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

ب) عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد المركب: $(K)^n$ حقيقيا.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C لواحق الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، z_3 على الترتيب

أ) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب L حيث: $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$. ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) أحسب لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) أ) عين لاحقة النقطة D نظيرة A بالنسبة لحامل محور التراتيب.

ب) مثل الرباعي ABCD ، ثم بين أن : $z_{\overrightarrow{DB}}=i\sqrt{3}\times z_{\overrightarrow{AC}}$ و $z_D+z_B=z_A+z_C$.

ج) عين بدقة الرباعي ABCD .

4) عين طبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (C) ذات النقط M من المستوي التي لاحقتها z و التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\|=24$$

الحل:

1) أ/ كتابة كل من الأعداد المركبة: z_1، z_2، $K=\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي:

$z_1=\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_2=2\overline{z}_1=2\sqrt{3}-2i=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ، $K=\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{4e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب/ تعين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد المركب، $(K)^n$ حقيقيا:

لدينا باستعمال دستور موافر نجد: $K^n=\left[\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right]^n=\frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{3}}=\frac{1}{2^n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right]$

K^n عدد حقيقي معناه : $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=0$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\pi k$ أي : $\boxed{n=3k}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2) أ/ كتابة الشكل الأسي العدد المركب L و استنتاج طبيعة المثلث ABC :

$L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-3i}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه نلاحظ أن النقطة C هي صورة النقطة B بواسطة دوران زاويته $-\frac{\pi}{3}$ و مركزه A ، إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ب/ حساب لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC : لدينا : $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$ ومنه: $\boxed{z_G=\sqrt{3}-i}$.

3) أ/ عين لاحقة النقطة D نظيرة A بالنسبة لحامل محور التراتيب:

بما أن $z_A=\sqrt{3}+i$ إذن : $\boxed{z_D=-\sqrt{3}+i}$.

ب/ تبيان أن : $z_{\overrightarrow{DB}}=i\sqrt{3}\times z_{\overrightarrow{AC}}$ و $z_D+z_B=z_A+z_C$:

$z_{\overrightarrow{DB}}=z_B-z_D=3\sqrt{3}-3i$ و $i\sqrt{3}\times z_{\overrightarrow{AC}}=i\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}-3i\right)=3\sqrt{3}-3i$ وبتالي: $\boxed{z_{\overrightarrow{DB}}=i\sqrt{3}\times z_{\overrightarrow{AC}}}$

وبنفس الطريقة نجد: $\boxed{z_D+z_B=z_A+z_C=\sqrt{3}-i}$.

http://ensdz28.blogspot.com/

ج/ تعين بدقة الرباعي ABCD :

نعلم أن : $z_D+z_B=z_A+z_C$ ومنه $z_D-z_C=z_A-z_B$ إذن: $z_{\overrightarrow{DC}}=z_{\overrightarrow{AB}}$ و بالتالي الرباعي ABCD متوازي أضلاع ... (1)

نعلم أن : $z_D+z_B=z_A+z_C$ ومنه : $z_I=\frac{\sqrt{3}-i}{2}=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_D+z_B}{2}$ و بالتالي القطران : [DB] و [AC] لهما نفس المنتصف (النقطة I)... (2).

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

نعلم أن: $z_{\overrightarrow{DB}} = i\sqrt{3}\times z_{\overrightarrow{AC}}$ ومنه: $\frac{z_{\overrightarrow{DB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = i\sqrt{3}$ أي: $\arg\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ ;k\in\mathbb{Z}$ و بالتالي القطران $[DB]$ و $[AC]$ متعامدين ... (3)

نعلم أن $\frac{z_{\overrightarrow{DB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = i\sqrt{3}$ أي: $\left|\frac{z_{\overrightarrow{DB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ إذن $DB = \sqrt{3}AC$ و بالتالي القطران $[DB]$و $[AC]$ غير متساويين ... (4)

http://ensdz28.blogspot.com/

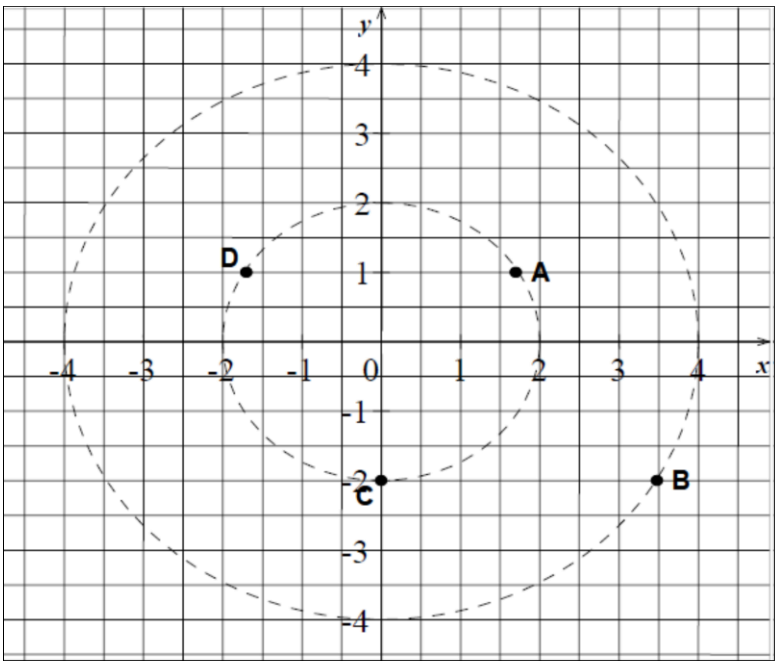
من (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن الرباعي ABCD معين.

4) تعين طبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (C) :

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}\right\| = 24$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{MD}\right\| = 24$ ، لأن G مركز ثقل المثلث ABC ومنه

$\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MD}\right\| = 8$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG'}\right\| = 4$ ، حيث G' مرجح الجملة $\{(G;1),(D;1)\}$،لأن $1+1\neq 0$

أي $MG' = 4$ و هي دائرة مركزها G' و نصف قطرها 4 (G' هي منتصف $[DB]$ بالحساب نجد G' هي O)



إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

التمرين 03:

ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، (C) الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1،

نعتبر النقطة A من (C) ذات اللاحقة $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و ليكن الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

1) عين لاحقة النقطة B صورة النقطة A بالدوران r

عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران r.

2) أ) برر أن (C) الدائرة المحيطية بالمثلث ABC ثم أنشئ A، B و C .

ب) ماهي طبيعة المثلث ABC .

http://ensdz28.blogspot.com/

3) ليكن h التحـاكي الذي مركزه O و نسبته -2.

أ) أنشئ النقط P ، Q و R صور النقط A، B و C على الترتيب بالتحاكي h.

ب) مـــــاهي طبيعة المثلث PQR؟

4) أ) أعط الكتابة المركبة للتحـاكي h.

ب) أحسب $z_A + z_B + z_C$ ثم إستنتج أن A منتصف القطعة $[QR]$.

ج) مــــاذا يمثل المستقيم (QR) بالنسبة للدائرة (C)؟

الحل:

1) تعيين z_B لاحقة النقطة B :

لدينا النقطة B صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ أي $r(A)=B$ اي

$z_B - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_A - z_O)$ يكافئ $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$ ومنه $z_B = -1$.

تعيين z_C لاحقة النقطة C:

لدينا النقطة C صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ أي $r(B)=C$ اي

$z_C - z_O = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_O)$ يكافئ $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}(-1) = -\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ومنه $z_C = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) أ) تبيان أن (C) هي الدائرة المحيطية بالمثلث ABC :

لدينا ، $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ معناه $OA = OB = OC = 1$ إدن النقاط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 .

ب) طبيعة المثلث ABC :

لدينا:
$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right)^2}{4} = \frac{2 + i2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

منه: $\begin{cases} \left|\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \left|\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ وعليه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

http://ensdz28.blogspot.com/

3) أ) إنشـــاء النقط P ، Q و R :

لدينا h تحاكي الذي مركزه O و نسبته 2–

P صورة النقطة A بواسطة التحاكي h معناه $\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OA}$

Q صورة النقطة B بواسطة التحاكي h معناه $\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OB}$

R صورة النقطة C بواسطة التحاكي h معناه $\overrightarrow{OR} = -2\overrightarrow{OC}$

ب) طبيعة المثلث PQR :

نعلم أن التحاكي يحافظ على الزوايا الموجهة و عليه $\left(\overrightarrow{QR};\overrightarrow{QP}\right) = \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

و نعلم أيضا أن التحاكي يضاعف الأطوال بـ $|k|$ و عليه $\begin{cases} QR = 2BC \\ QP = 2BA \end{cases}$ و عليه $QR = PQ$ لأن $BC = BA$

الخلاصة : المثلث PQR متقايس الأضلاع.

4) أ) العبارة المركبة للتحاكي h :

لتكن النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M بذات اللاحقة z بواسطة التحاكي h الذي مركزه O و نسبته 2– معناه $z' - z_O = -2(z - z_O)$ و عليه $z' = -2z$.

ب) تبيان أن A منتصف القطعة [QR] :

لدينا $z_A + z_B + z_C = \dfrac{1}{2} + \cancel{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} - 1 + \dfrac{1}{2} - \cancel{i\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - 1 = 0$

لدينا $\dfrac{z_Q + z_R}{2} = \dfrac{-2z_B - 2z_C}{2} = -z_B - z_C$ و بما أن $z_A + z_B + z_C = 0$ نجد $z_A = -z_B - z_C$ اي $\dfrac{z_Q + z_R}{2} = z_A$

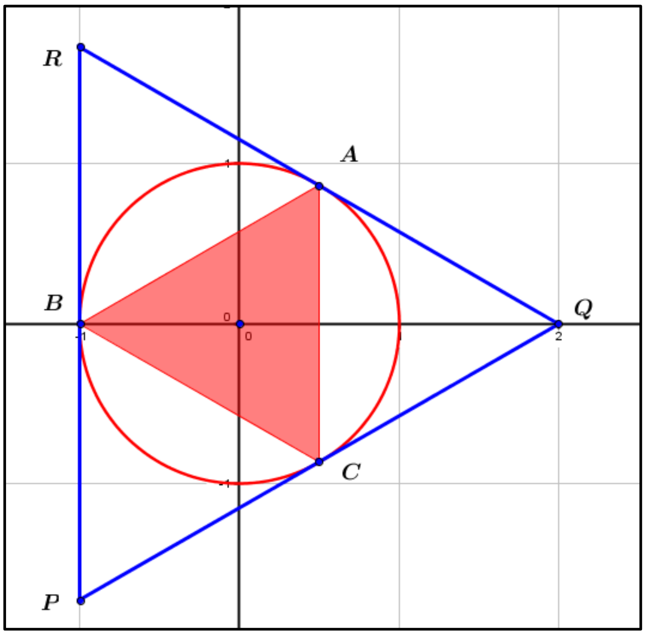
الخلاصة: النقطة A منتصف القطعة المستقيمة [QR] .

ج) ماذا يمثل المستقيم (QR) بالنسبة للدائرة (C) :

بما أن النقطة A تقع على الدائرة (C) وفي نفس الوقت تنتمي إلى المستقيم (QR) و عليه المستقيم (QR) يمس الدائرة (C) في النقطة A .

الشكل الهندسي:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك



التمرين 04:

1)في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللاحقات: $z_A=3-i$ ، $z_B=2-2i$ ، $z_C=-2i$ ، $z_D=\overline{z_C}$ على الترتيب.

أ) علم النقط A، B، C و D

ب) نضع $K=\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}$ ، أكتب K على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

- إستنتج طبيعة المثلث BCD.

ج) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون K^n حقيقيا سالبا تماما

2) ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة M ذات الاحقة z، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$z'=(1-i)z+2i$

أ) بين أن التحويل S هو تشابه مباشر يطلب تعيين نسبته k زاويته θ و مركزه Ω.

ب) تحقق أن: $S(A)=B$ و $S(B)=C$.مـــاهو التحويل الذي يحول A إلى C و مركزه Ω؟

ج) لتكن ω لاحقة Ω. تحقق من أن $z'-z=i(\omega-z)$ ، ثم إستنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

3) نضع: $A_0=A$ و من اجل كل عدد طبيعي n: $A_{n+1}=S(A_n)$ و نرمز بـ z_n غلى لاحقة النقطة A_n و نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n=\Omega A_n$.

http://ensdz28.blogspot.com/

أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أحسب بدلالة n المجموع L_n حيث: $L_n=|z_0-\omega|+|z_1-\omega|+...+|z_n-\omega|$.

الحل :

1) أ) تعليم النقط A، B، C و D:

الإنشاء يكون في أخر الصفحة الثانية

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

ب) كتابة العدد K على الشكل الجبري و المثلثي:

http://ensdz28.blogspot.com/

الشكل الجبري: $K=\frac{z_D-z_C}{z_B-z_C}=\frac{2i+2i}{2-2i+2i}=\frac{4i}{2}=\boxed{2i}$

الشكل الاسي: $|K|=2$ و $\arg(K)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $K=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

طبيعة المثلث BCD : بما أن $\arg(K)=\frac{\pi}{2}$ معناه $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})=\frac{\pi}{2}$ معناه أن المثلث BCD قائم عند C .

ج) تعيين مجموعة قيم n :

K^n عدد حقيقي سالب تماما معناه $\arg(K^n)=\pi+2\pi k$ اي $n\arg(K)=\pi+2\pi k$ اي $\frac{n\pi}{2}=\pi+2\pi k$

أي $\frac{n}{2}=1+2k$ اي $n=2+4k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

2) أ) طبيعة التحويل S :

لدينا $a=1-i$ و $b=2i$ بما أن $|a|=\sqrt{2}\neq 1$ فإن التحويل S هوعبارة عن تشابه مباشر نسبته $k=\sqrt{2}$ و زاويته $\arg(a)=-\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{b}{1-a}=\frac{2i}{1-1+i}=\frac{2i}{i}=2$

الخلاصة: التحويل S هو تشابه مباشر نسبته $k=\sqrt{2}$ و زاويته $\theta=-\frac{\pi}{4}$ و مركزه النقطة $\Omega(2;0)$.

ب) التحقق أن $S(A)=B$ و $S(B)=C$:

لدينا: $\begin{cases}(1-i)z_A+2i=(1-i)(3-i)+2i=3-i-3i-1+2i=2-2i=z_B\\(1-i)z_B+2i=(1-i)(2-2i)+2i=2-2i-2i-2+2i=-2i=z_C\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}S(A)=B\\S(B)=C\end{cases}$

طبيعة التحويل الذي يحول A إلى C :

لدينا $\begin{cases}S(A)=B\\S(B)=C\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}z_B-z_\Omega=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_\Omega)\\z_C-z_\Omega=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_\Omega)\end{cases}$ ومنه

$$z_C-z_\Omega=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_\Omega)\right)$$
$$=2e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_\Omega)$$

إذن التحويل الذي يحول A إلى C هو تشابه مباشر 'S نسبته $k'=2$ و زاويته $\theta'=-\frac{\pi}{2}$ و مركزه النقطة Ω .

ج) طبيعة المثلث 'ΩMM :

لدينا : $z'-z=(1-i)z+2i-z=\cancel{z}-iz+2i-\cancel{z}=i(2-z)=i(\omega-z)$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

وعليه نجد أن $\frac{z'-z}{\omega-z}=i$ أي $\begin{cases}\arg\left(\frac{z'-z}{\omega-z}\right)=\frac{\pi}{2}\\ \left|\frac{z'-z}{\omega-z}\right|=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}\left(\overrightarrow{M\Omega};\overrightarrow{MM'}\right)=\frac{\pi}{2}\\ M\Omega=MM'\end{cases}$

ومنه المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين و قائم في النقطة M

http://ensdz28.blogspot.com/

3) نضع $\begin{cases}A_0=A\\ A_{n+1}=S(A_n)\end{cases}$ ، z_n لاحقة النقطة A_n ، $u_n=\Omega A_n$

أ) تبيان أن (u_n) متتالية هندسية:

لدينا من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\Omega A_{n+1}$ ومن جهة أخرى لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $\Omega A_{n+1}=\sqrt{2}\Omega A_n$

و عليه $u_{n+1}=\sqrt{2}\Omega A_n$ اي $u_{n+1}=\sqrt{2}\,u_n$ ومنه المتتالية (u_n) هندسية اساسها $q=\sqrt{2}$ و حدها الأول $u_0=\Omega A_0=\Omega A=|z_A-\omega|=|1-i|=\sqrt{2}$

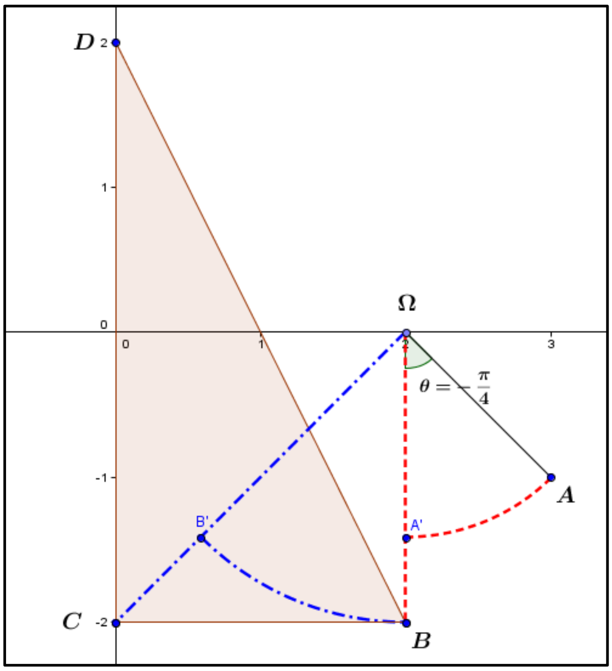
ب) حساب المجموع L_n :

لدينا، $L_n=|z_0-\omega|+|z_1-\omega|+...+|z_n-\omega|=\Omega A_0+\Omega A_1+...+\Omega A_n=u_0+u_1+...+u_n$

إذن L_n هو مجموع لحدود المتتالية الهندسية (u_n) و عليه:

$$L_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\sqrt{2}\times\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\left[1-2^{\frac{n+1}{2}}\right]=\frac{2+\sqrt{2}}{3}\left[1-2^{\frac{n+1}{2}}\right]$$

الشكل الهندسي:



إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

التمرين 05:

1) بين أن $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ حيث a و b عددان حقيقيان

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3=8$ http://ensdz28.blogspot.com/

3) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=2$ على الترتيب .

أ) أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي

ب) أنشئ النقط A ، B ، C بدقة

ج)عين طويلة و عمدة العدد $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC

د) إستنتج أن O هو مركز ثقل المثلث ABC

هـ) عين مجمــــــــــوعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $AM^2+BM^2+CM^2=24$

الحل:

1) لدينا: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}-\cancel{ba^2}-\cancel{ab^2}-b^3=a^3-b^3$

2) **حلول المعادلة $z^3=8$:**

لدينا $z^3=8$ تكافئ $z^3-8=0$ أي $z^3-2^3=0$ و هي تكافئ حسب السؤال 1: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$

ومنه: $\begin{cases} z-2=0 \\ z^2+2z+4=0 \quad ...(*) \end{cases}$ ولحساب حلول المعادلة (*) نحسب المميز Δ: لدينا $\Delta=-12$

ومنه: $z'=\dfrac{-2+i\sqrt{12}}{2}=-1+i\sqrt{3}$ و $z''=\dfrac{-2-i\sqrt{12}}{2}=-1-i\sqrt{3}$

خلاصة: ومنه حلول المعادلة $z^3=8$ هي : $\boxed{S=\{-1+i\sqrt{3}\ ;\ -1-i\sqrt{3}\ ;\ 2\}}$

3- $z_A=-1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=2$

أ) -**كتابة z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي:**

العدد	$z_A=-1+i\sqrt{3}$	$z_B=-1-i\sqrt{3}$	$z_C=2$
الكتابة الأسية	$2e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$2e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$2e^{i2\pi}$

ب-**إنشاء النقط A ، B ، C:**

ج-**تعيين طويلة وعمدة العدد** $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

لدينا: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه:

$$\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \,/\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

الخلاصة: المثلث ABC متقايس الأضلاع

http://ensdz28.blogspot.com/

د- إستنتاج أن النقطة O هو مركز ثقل المثلث ABC:

لدينا، $z_A + z_B + z_C = 0$ و منه النقطة O مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;1)\}$ و عليه النقطة O مركز ثقل المثلث ABC .

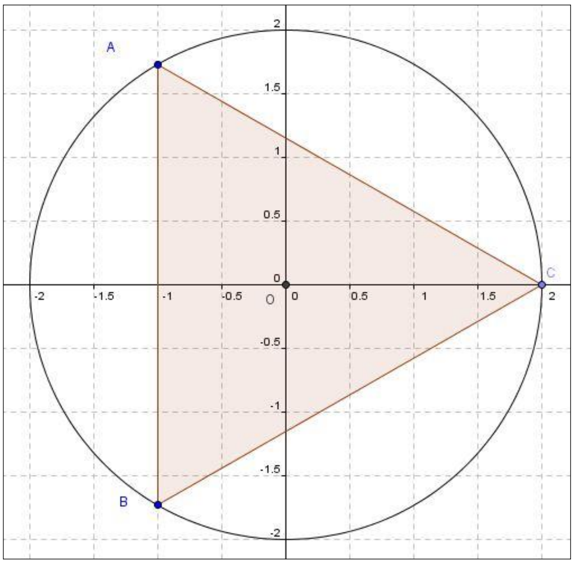
هـ-تعيين مجموعة النقط M التي تحقق: $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 24$:

$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 24$ تكافئ $(x+1)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 + (x+1)^2 + \left(y + \sqrt{3}\right)^2 + (x-2)^2 + y^2 = 24$

بعد النشر و التبسيط نجد: $3x^2 + 3y^2 + 12 = 24$ ومنه $x^2 + y^2 = 4$

وعليه مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ و نصف قطرها $R = 2$

يمكن استعمال طريقة ثانية بإستعمال المرجح



إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

التمرين 06:

نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$ ، نعتبر العددين المركبين $z_A=3-3i$ و z_B حيث طويلته $3\sqrt{2}$ وعمدته $\frac{-7\pi}{12}$ و هما لواحق النقطتين A ، B على الترتيب .

1) أكتب كل من z_A و z_B على الشكل الأسي ثم علم النقطة A .

2) نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

أ)عين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة.

ب) بين أن صورة النقطة A بواسطة التحويل T هي النقطة B . ثم أنشئ بدقة النقطة B .

3) أ) أكتب $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الشكل الجبري. ثم أكتب كذلك z_B على الشكل الجبري.

ب) إستنتج القيم المظبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$.

4)نعتبر المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ بحيث: $z=3-3i+3e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ و $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\pi$

أ)تحقق أن النقطتين : $C\left(3+\frac{3\sqrt{2}}{2};-3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ و $D(0;-3)$ تنتميان إلى المجموعة (Γ)

ب) عين ومثل المجموعة (Γ).

الحل:

1) كتابة كل من z_A و z_B على الشكل الأسي:

$$z_A=3-3i=3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad ، \quad z_B=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)\right)=3\sqrt{2}\,e^{-\frac{7\pi}{12}}$$

2)أ/ تعين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة:

لدينا: $T:M(z)\to M'(z')$ حيث $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$ و T هو دوران مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$

ب/ حساب صورة A بواسطة التحويل T معنـــــــــاه حساب $T(A)$،لدينا : $T(A)=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$ ومنه

$T(A)=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=3\sqrt{2}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}$ أي: $T(A)=3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ أي: $T(A)=B$.

الإنشـــاء: (أنظـــــــــر أخر الصفحة)

3) أ/ كتابة $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ على الشكل الجبري. ثم كتابة كذلك z_B على الشكل الجبري:

لدينا: $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، بما أن B صورة A بواسطة T فإن: $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$ أي:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

$z_B=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-3i)=\frac{3\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}+\frac{-3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}i$.

ب/ إستنتج القيم المظبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$:

بمطابقة الشكل المثلثي مع الشكـــــــــــــل الجبري للعدد z_B نجـــــد:

$$\begin{cases}\cancel{3}\sqrt{2}\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)=\frac{\cancel{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}\\ \cancel{3}\sqrt{2}\sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)=\frac{-\cancel{3}\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}\end{cases}$$ ومنه : $$\begin{cases}\cos\left(\frac{-7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{-7\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$.

4) أ/ تحقق أن النقطتين : $C\left(3+\frac{3\sqrt{2}}{2};-3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ و $D(0;-3)$ تنتميان إلى المجموعة (Γ):

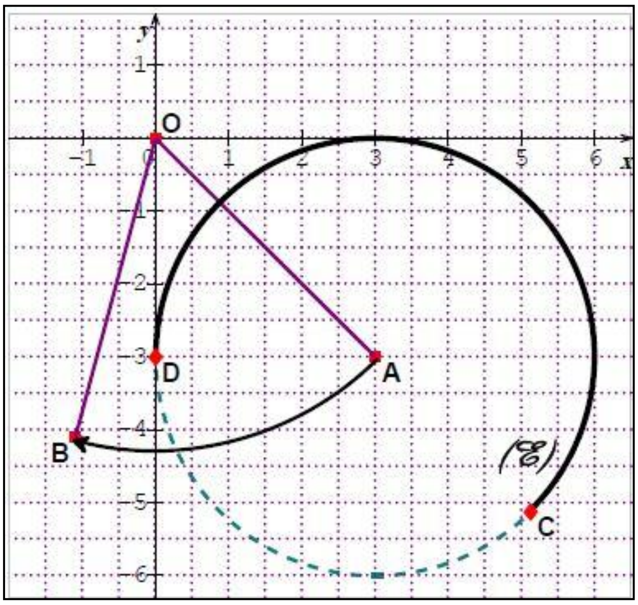
- $-3i=3-3i+3e^{i\theta}$ ومنه $e^{i\theta}=-1=e^{i\pi}$ إذن $\theta=\pi$ أي : $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi$ ومنه $D\in(\Gamma)$.
- $3+\frac{3\sqrt{2}}{2}-3i-\frac{3\sqrt{2}}{2}i=3-3i+3e^{i\theta}$ ومنه $e^{-\frac{\pi}{4}}=e^{i\theta}$ إذن: $\theta=-\frac{\pi}{4}$ أي: $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi$ ومنه $C\in(\Gamma)$.

ب) تعين وتمثيل المجموعة (Γ):

لدينا $z=3-3i+3e^{i\theta}$ تكافئ $z-(3-3i)=3e^{i\theta}$ تكافئ $|z-z_A|=3$ أي $AM=3$

بما أن $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi$ نجد أن المجموعة : $(\Gamma):\left\{z=3-3i+3e^{i\theta}/\ \theta\in\mathbb{R};-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\pi\right\}$ هي القوس CD من الدائـــــرة ذات المركز A و نصف قطرها $r=3$.

تمثيل المجموعـــــــــــة (Γ):



إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

2) تمارين البكالوريا محلولة:

تمرين01: بـــــاك 2015 ع ت م1

I) عين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 \\ 2\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-3-2i\sqrt{3} \end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β

II) المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ A ، B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا

ب) تحقق ان العدد المركب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$ حقيقي .

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$

ا) حدد النسبة و زاويته للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول D الى A .

ب) أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$

الحل:

I) **تعيين العددين المركبين α و β :**

لدينا، $\begin{cases} 2\alpha-\beta=-3 & (1) \\ 2\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-3-2i\sqrt{3} & (2) \end{cases}$ من (1) نجد، $\beta=2\alpha+3$ وعليه $\bar{\beta}=2\bar{\alpha}+3$ و من (2) نجد،

$2\bar{\alpha}+(2\bar{\alpha}+3)=-3-2i\sqrt{3}$ وعليه $4\bar{\alpha}=-6-2i\sqrt{3}$ اي $\bar{\alpha}=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\boxed{\alpha=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

بما أن $\beta=2\alpha+2$ نجد، $\beta=2\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3$ ومنه $\beta=-3+i\sqrt{3}+3$ وعليه $\boxed{\beta=i\sqrt{3}}$.

II) 1)أ) **كتابة z_A و z_C على الشكل الأسي:**

الشكل الاسي لـ z_A : حساب الطويلة $|z_A|=\sqrt{3}$ حساب العمدة: لتكن θ عمدة لـ z_A ومنه نجد،

$\begin{cases} \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta=\frac{1}{2} \end{cases}$ وعليه نجد، $\theta=\frac{5\pi}{6}$ إذن: $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

الشكل الأسي لـ z_C : $z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $z_C = \frac{z_A}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}$ ومنه $\boxed{z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$

ﺟ) تعيين قيم العدد الطبيعي n :

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ يكون حقيقي سالب معناه $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \pi + 2\pi k \ / k \in \mathbb{N}$ اي $n\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = \pi + 2\pi k$

لدينا، $\frac{z_A}{z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ اي $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = \frac{\pi}{3}$ ومنه نجد، $n \times \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k$ اي $\frac{n}{3} = 1 + 2k$ ومنه $n = 3 + 6k$

ب) التحقق أن عبارة العدد حقيقي:

http://ensdz28.blogspot.com/

لدينا، $\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} = \left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}\, e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)^{2015} = e^{i\frac{10075\pi}{6}} = e^{i\frac{-5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ لاحظ أن: $\frac{10075\pi}{6} = 1680\pi - \frac{5\pi}{6}$

$\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} = \left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}\, e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)^{1962} = e^{-i\frac{9810\pi}{6}} = e^{i\pi} = -1$ لاحظ أن $-\frac{9810\pi}{6} = -1635\pi = -1636\pi + \pi$

$\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1962} = \left(\frac{\cancel{\sqrt{3}}\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)^{1435} = e^{i\frac{1435\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ لاحظ أن $\frac{1435\pi}{2} = \frac{1436\pi - \pi}{2} = 718\pi - \frac{\pi}{2}$

منه: $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015} + \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962} - \left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + (-1) - (-i) = -\sqrt{3} \cancel{-i} - 1 + \cancel{i} = \boxed{-\left(1+\sqrt{3}\right)}$

2) أ) تحديد نسبة وزاوية التشابه S :

لتكن M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات الاحقة z بالتشابه S معناه $z' = az + b$ مع a ، b أعداد مركبة . لدينا التشابه S مركزه O و يحول D إلى A إذن، $\begin{cases} S(O) = O \\ S(D) = A \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_A = az_D + b \end{cases}$ ومنه

$z_A - z_O = a(z_D - z_O)$ اي $a = \frac{z_A}{z_D}$.

نسبة التشابه: $k = |a| = \left|\frac{z_A}{z_D}\right| = \frac{|z_A|}{|z_D|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

زاوية التشابه: $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_D}\right) = \arg z_A - \arg z_D = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{7\pi}{12}}$

ب) كتابة $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

$$\frac{z_A}{z_D}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+i}=\frac{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)}{2}=\frac{-\frac{3}{2}+i\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{3}-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}+3}{4}}$$

ـ استنتاج القيمة المظبوطة لـ $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$:

http://ensdz28.blogspot.com/

لدينا الشكل المثلثي لـ $\frac{z_A}{z_D}$: $\frac{z_A}{z_D}=\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

لدينا الشكل الجبري لـ $\frac{z_A}{z_D}$: $\frac{z_A}{z_D}=\frac{\sqrt{3}-3}{4}+i\frac{\sqrt{3}+3}{4}$

بالمطابقة نجد، $\begin{cases}\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-3}{4}\\ \sqrt{\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+3}{4}\end{cases}$ ومنه، $\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

3) تعيين مجموعة النقط :

لدينا، $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ مع k يمسح $\mathbb{R}^+$ ومنه $z=ke^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{7\pi}{12}}=ke^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}\right)}=ke^{i\frac{5\pi}{6}}$

ومنه $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}$ ،

و منه مجموعة النقط هي نصف مستقيم مبدؤه O والموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u};\vec{w})=\frac{5\pi}{6}$. نلاحظ ان

$\arg(z_A)=\frac{5\pi}{6}$ اي A تنتمي إلى مجموعة النقط M

تمرين02: بـــــاك 2015 ع ت م2

في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقتها على الترتيب : z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ و $z_C = -(z_A + z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ مرافق z_A)

I) أ) اكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) استنتج ان النقط A ، B و C تنتمي الى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ج) أنشئ الدائرة (γ) و النقط A ، B و C .

2) أ) تحقق ان : $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب) استنتج أن المثلث ABC متقايس الاضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

ج) عين و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$

3) أ) عين زاوية للدوران r الذي مركزه O و يحول C الى A

ب) أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة [OB] .

الحل:

1) أ) كتابة كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي:

الشكل الاسي لـ z_B : الطويلة: $|z_B| = |-\overline{z}_A| = |\overline{z}_A| = |z_A| = 2$

العمدة: $\arg(z_B) = \arg(-\overline{z}_A) = \arg(-1) + \arg(\overline{z}_A) = \pi - \arg(z_A) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$$\boxed{z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

الشكل الأسي لـ z_C :

لدينا، $z_C = -(z_A + z_B) = -2\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = -2\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}i - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}i\right) = -2i$ ومنه $\boxed{z_C = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}}$

ب) إستنتاج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة:

نلاحظ من السؤال السابق أن $|z_A| = |z_B| = |z_C|$ اي $OA = OB = OC$ إذن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 2 .

ج) إنشاء الدائرة (γ) و النقط A ، B و C :

2) أ) التحقق أن $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$:

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 2i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \cancel{\frac{1}{2}i} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{\frac{1}{2}i}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i}{-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

ب) إستنتاج أن المثلث ABC متقايس الاضلاع:

لدينا، $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$:منه $\begin{cases} \left|\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$ اي $\begin{cases} CB = AB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right) = -\frac{\pi}{3} \end{cases}$ منه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

http://ensdz28.blogspot.com/

ـہ إثبات أن النقطة O مركز ثقل المثلث:

لدينا، $z_A + z_B + z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 2i = 2i - 2i = 0$ اي $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

ومنه O مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$ أي أن O مركز ثقل المثلث ABC

ج) تعيين و إنشاء المجموعة (E) :

لدينا، $|z| = |z - \sqrt{3} - i|$ يكافئ $|z| = \left|z - \left(\sqrt{3} + i\right)\right|$ يكافئ $|z| = |z - z_A|$ ومنه $OM = AM$

ومنه (E) مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة [OA] .

3) أ) تعيين زاوية للدوران r الذي مركزه O و يحول C إلى A :

لتكن 'M ذات اللاحقة 'z صورة النقطة M ذات الاحقة z بالدوران r معناه $z' = az + b$ مع a ، b أعداد مركبة . لدينا الدوران r مركزه O و يحول C إلى A إذن، $\begin{cases} r(O) = O \\ r(C) = A \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_A = az_C + b \end{cases}$ ومنه $z_A - z_O = a(z_C - z_O)$ اي $a = \frac{z_A}{z_C}$.

زاوية الدوران: $\theta = \arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right) = \arg z_A - \arg z_C = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$.

ب) إثبات أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة [OB] :

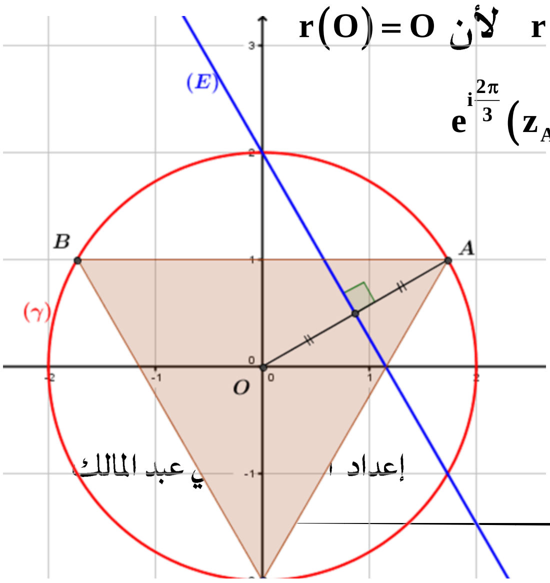
لدينا، (E) مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة [OA] .

إذن يكفي التأكد فقط أن الدوران r يحول A الى B أي $r(A) = B$ لأن $r(O) = O$

لدينا: $e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_A - z_O) = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(\sqrt{3} + i\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}} 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_B$

ومنه وجدنا $r(A) = B$ و هـ م

الإنشاء:



تمرين03: بـــــاك 2015 شعبة رياضيات م1

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقتها على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = -2+i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

1) أ) مثل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

ب) عين النسبة و زاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B و يحول النقطة A إلى النقطة C .

2) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$

http://ensdz28.blogspot.com/

ب) استنتج ان المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان .

ج) بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC .

4) بين أن النقط G ، H و I في استقامية .

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z+1+i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$

أ) بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

ج) أنشئ المجموعة (Γ) .

د) تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

الحل :

1) أ) تمثيل النقط A ، B ، C ، H و I :

ب) تعيين نسبة و زاوية للتشابه المباشر:

لتكن M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات الاحقة z بالتشابه S معناه $z' = az+b$ مع a ، b أعداد مركبة . لدينا التشابه S مركزه O و يحول D إلى A إذن، $\begin{cases} S(B)=B \\ S(A)=C \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} z_B = az_B + b \\ z_C = az_A + b \end{cases}$ و منه $z_B - z_C = a(z_B - z_A)$ اي $a = \dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{-3+2-i}{i+2-i} = -\dfrac{1+i}{2}$

نسبة التشابه: $k = |a| = \left|-\dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ زاوية التشابه: $\theta = \arg(a) = \arg\left(-\dfrac{1+i}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{4}$

2) تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{i-2+i-3}{3} = \frac{-5+2i}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}i$$

3) أ) الشكل الجبري للعدد المركب $\dfrac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

$$\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=\frac{-2+i+3}{-3+4i-i}=\frac{1+i}{-3+3i}=-\frac{1}{3}\times\frac{(1+i)(1+i)}{2}=-\frac{1}{3}\times\frac{2i}{2}=-\frac{1}{3}i$$

ب) إستنتاج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان:

لدينا، $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=-\frac{1}{3}i$ ومنه $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}\right)=\arg\left(-\frac{1}{3}i\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ومنه نجد، $\left(\overrightarrow{AH};\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ اي $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB}$

http://ensdz28.blogspot.com/

الخلاصة: المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان

ج) تبيان أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC :

لدينا مما سبق (AH) و (BC) متعامدان إذن H تنتمي للارتفاع المتعلق بالرأس A في المثلث ABC

من جهة اخرى: $\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}=\frac{i+3}{-3+4i+2-i}=\frac{3+i}{-1+3i}=\frac{(3+i)(-1-3i)}{1+9}=\frac{-3-9i-i+3}{10}=\frac{-10i}{10}=-i$

و عليه $\left(\overrightarrow{BH};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ منه المستقيمين (BH) و (CA) اي أن H تنتمي للارتفاع المتعلق بالرأس B في المثلث ABC .

الخلاصة: H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

4) تبيان أن النقط G ، H و I استقامية:

لدينا، $\begin{cases} z_H-z_G=-3+4i+\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i=-\frac{4}{3}+\frac{10}{3}i \\ z_H-z_I=-3+4i+1+i=-2+5i \end{cases}$ ومنه نلاحظ أن $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HI}$ إذن الشعاعين $\overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{HI}$ مرتبطين خطيا و عليه النقط G ، H و I على إستقامية .

5) أ) تبيان ان النقطة A تنتمي إلى (Γ) :

لدينا، $z_A+1+i=i+1+i=1+2i$ ومنه $|z_A+1+i|=|1+2i|=\sqrt{5}$ وعليه $A\in(\Gamma)$

ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

لتكن النقطة M ذات اللاحقة z حيث $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ منه $|z+1+i|=\sqrt{5}$ وعليه $|z-z_I|=\sqrt{5}$ اي $IM=\sqrt{5}$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة ذات المركز I ونصف القطر $\sqrt{5}$.

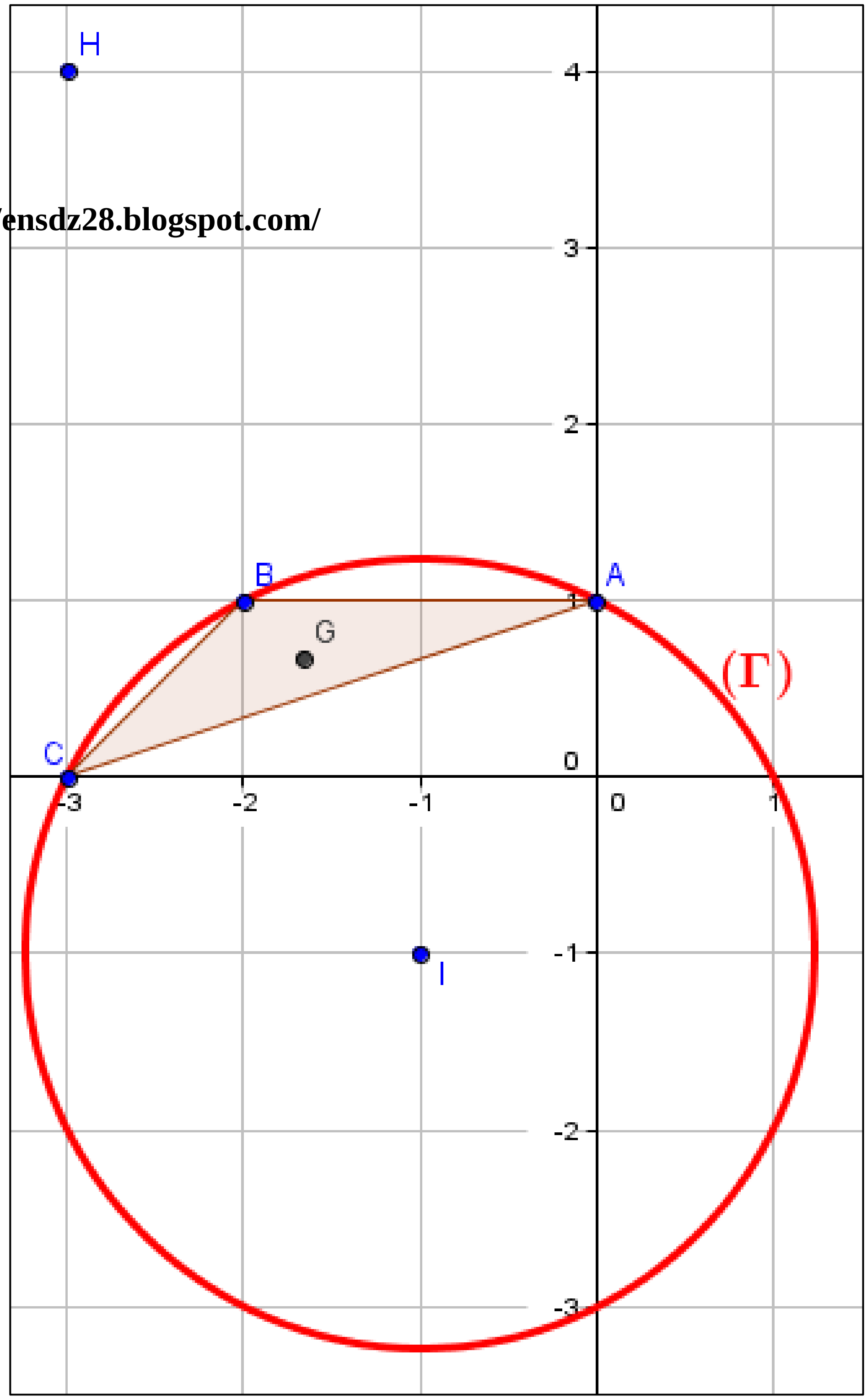
ج) إنشاء المجموعة (Γ) : أنظر أخر الحــــل ---------------

د) التحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى (Γ) :

لدينا، $\begin{cases} IB=|z_B-z_I|=|-2+i+1+i|=|-1+2i|=\sqrt{5} \\ IC=|z_C-z_I|=|-3+1+i|=|-2+i|=\sqrt{5} \end{cases}$ منه النقطتين B و C تنتميان إلى (Γ)

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

الانشاء :



تمرين 04: بـــــاك 2014 شعبة تقني رياضي م2

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و لمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0 = 1+i$

1) أ) عين ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$

ب) عين ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$

ج) عين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ').

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث: $z_1 = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ http://ensdz28.blogspot.com/

أ) عين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$ ، ثم إستنتج طبيعة المثلث OAB

ب) عين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاوية $-\frac{\pi}{2}$

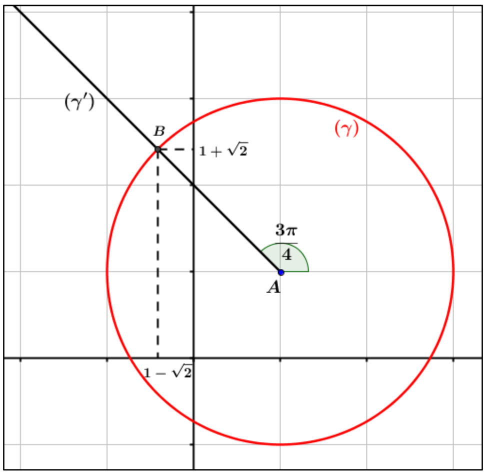
ج) عين العددين الحقيقيين α ، β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ و $\alpha + \beta = \sqrt{2}$

د) عين ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left((1+\sqrt{2})\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$

الحل:

1) تعيين و إنشـــاء (γ) و (γ') :

الإنشـــــاء:



أ) (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + 2e^{i\theta}$

مع θ يمسح $\mathbb{R}$ هي دائرة مركزها النقطة A ذات اللاحقة z_0

و نصف قطرها $r = 2$.

ب) (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z = z_0 + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

مع k يمسح $\mathbb{R}^+$ هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A ذات اللاحقة z_0

و شعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث $(\vec{u};\vec{w}) = \frac{3\pi}{4}$.

ج) إحداثيات نقطة تقاطع (γ) مع (γ') :

لتكن $M(z)$ نقطة تقاطع (γ) مع (γ') تكافئ $\cancel{z_0} + 2e^{i\theta} = \cancel{z_0} + ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ يكافئ $2e^{i\theta} = ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ يكافئ

$\begin{cases} k = 2 \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ و منه $z = z_0 + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ أي $z = 1 + i + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ومنه $z = (1-\sqrt{2}) + i(1+\sqrt{2})$

إذن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) مع (γ') هي : $(1-\sqrt{2}\ ;\ 1+\sqrt{2})$

2) أ) الشكل الجبري للعدد $\frac{z_1 - z_0}{z_0}$:

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

$$\frac{z_1-z_0}{z_0}=\frac{\cancel{z_0}+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}-\cancel{z_0}}{z_0}=\frac{2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+i}=\frac{-\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)}=\frac{-\sqrt{2}(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-\sqrt{2}(-2i)}{2}=i\sqrt{2}$$

طبيعة المثلث OAB :

لدينــــــا: $\frac{z_0-z_1}{z_0}=-\frac{z_1-z_0}{z_0}=-i\sqrt{2}$ ومنه $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BA}\right)=\arg\left(\frac{z_0-z_1}{z_0}\right)=-\frac{\pi}{2}$

وبتالي المثلث OAB قائم في A .

ب) تعيين z_2 لاحقة النقطة C :

z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ معناه

$z_2-z_0=e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z_1-z_0)$ ومنه $z_2=z_0-i\left(\cancel{z_0}+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}-\cancel{z_0}\right)$ ومنه $z_2=1+i-i\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

اي $z_2=1+i+i\sqrt{2}+\sqrt{2}$ ومنه $z_2=1+\sqrt{2}+i\left(1+\sqrt{2}\right)$.

ج) تعيين العددين α و β :

النقطة O مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$ معناه: $z_O=\frac{\alpha z_0+\beta z_2}{\alpha+\beta}$

أي $0=\frac{\alpha(1+i)+\beta\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right]}{\sqrt{2}}$

يكافئ $\alpha+\beta\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left[\alpha+\beta\left(1+\sqrt{2}\right)\right]=0$

يكافئ $\begin{cases}\alpha+\beta\left(1+\sqrt{2}\right)=0\\ \alpha+\beta=\sqrt{2}\end{cases}$

و بحل الجملة نجد: $\alpha=1+\sqrt{2}$ و $\beta=-1$.

د) تعيين و إنشاء (E):

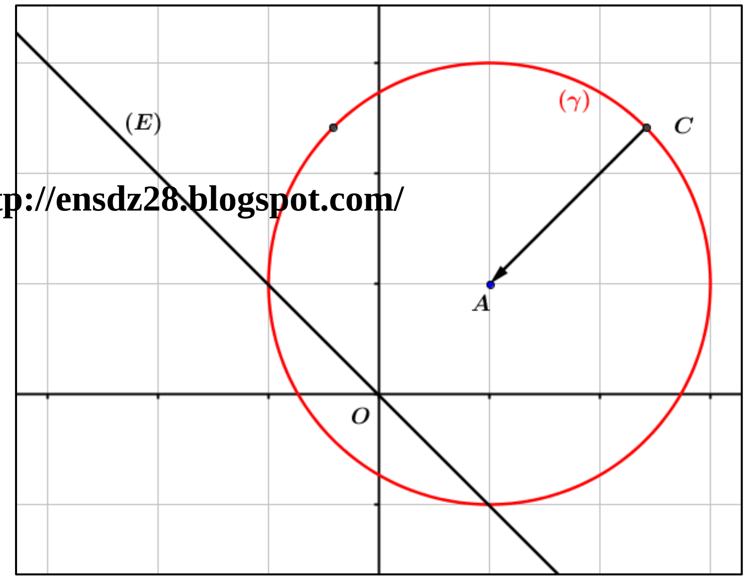
لدينا: $\begin{cases}\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\left(1+\sqrt{2}-1\right)\overrightarrow{MO}=\sqrt{2}\ \overrightarrow{MO}\\ \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}-\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)=\cancel{\overrightarrow{MO}}+\overrightarrow{OA}-\cancel{\overrightarrow{MO}}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}\end{cases}$

ومنه: $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)\bullet\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ يكافئ $\sqrt{2}\ \overrightarrow{MO}\bullet\overrightarrow{CA}=0$ أي $\overrightarrow{MO}\bullet\overrightarrow{CA}=0$

ومنه المجموعة (E) هو مستقيم يمر من O و $\overrightarrow{CA}$ شعاع نــــــاظم له.

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

الإنشـــــــاء



تمرين05: بـــــاك 2013 شعبة تقني ريــــــاضي م1

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط A وB و C لاحقاتهــا على الترتيب :

$z_A=-4$ و $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

- أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$، ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC.

3) أ) عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A.

ب) عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$

- تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)، ثم عين المجموعة (Γ_2).

الحل :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $2z^2+6z+17=0$:

لدينا: $\Delta=b^2-4ac=-100=(i10)^2$ ومنه: $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+i10}{4}=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_2=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$.

ومنه مجموعة الحلول هي: $S=\left\{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\,;-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\right\}$.

2) حساب طويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$:

لدينـــــا:
$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+4}{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+4}=\frac{-5+5i}{-5-5i}=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{(-1+i)(-1+i)}{(-1)^2-(i)^2}=\frac{1-1+2i}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

ومنه: $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |i| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$

3) أ) تعيين z_D و z_A:

الرباعي BCDE مربعا مركزه A معنـاه أن A منتصف القطعتين $[BD]$ و $[EC]$ أي :

$\begin{cases} z_A = \frac{z_B + z_D}{2} \\ z_A = \frac{z_E + z_C}{2} \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} z_D = 2z_A - z_B \\ z_E = 2z_A - z_C \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_D = -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i \\ z_E = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i \end{cases}$.

http://ensdz28.blogspot.com/

ب) تعيين (Γ_1) التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\right\| = 10\sqrt{2}$:

بمـا، A مركز ثقل المربع BCDE فإن A مرجح الجملة $\{(B;1),(C;1),(D;1),(E;1)\}$ و بتالي نجد

$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\right\| = 10\sqrt{2}$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{MA}\right\| = 10\sqrt{2}$ تكافئ $MA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزهـا A ونصف قطرهـــــــا $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

4) أ) التحقق من أن B تنتمـــي إلى (Γ_2):

معناه التحقق من أن $\arg(z_B + 4) = \frac{\pi}{4}$

لدينا $z_B + 4 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 4 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i = \frac{5}{2}(1+i)$ ومنه $\arg(z_B + 4) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ومنه $B \in (\Gamma_2)$.

ب) تعيين (Γ_2) التي تحقق $\arg(z+4) = \frac{\pi}{4}$:

$\arg(z+4) = \frac{\pi}{4}$ تكافئ $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4}$ تكافئ $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4}$ منه مجموعة النقط M هـي نصف المستقيم $[AB)$ باستثناء A .

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

3) تمـــــــارين مقترحة حول الأعداد المركبة :

التمرين 01:

ليكن z عدد مركب حيث: $z=\dfrac{2+i2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}}$

1) أكتب z على الشكل المثلثي

2) أكتب z على الشكل الجبري

3) إستنتج قيمتي $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ ، $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

التمرين 02:

α و β عددان مركبان حيث: $\begin{cases}\alpha=-2\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\\ \beta=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)-i\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\end{cases}$

1) أحسب β^2 ثم أكتبه على الشكل المثلثي

2) إستنتج طويلة و عمدة β

3) إستنتج قيمتي $\cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$

4) أوجد طويلة و عمدة α

5) أكتب على الشكل الأسي العدد $(\alpha\beta)^{2008}$

التمرين 03:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+13=0$

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها: $z_A=3-2i$ ، . $0<u_n<1$ $z_C=4i$ على الترتيب.

1) علم النقط A ، B و C في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

2) بين أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

3) عين لاحقة النقطة Ω مركز ثقل الرباعي $OABC$.

4) عين ثم أنشئ مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$$

التمرين 04:

A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي لواحقها 1 ، $2i$ ، z على الترتيب.

1) ماذا تمثل هندسيا $\arg\left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)$ و $\left|\frac{z-2i}{1-2i}\right|$؟

2) في ما يلي نرمز بـ α إلى العدد الحقيقي من المجال $]-\pi;0[$ بحيث: $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ، النقطة C معرفة بـ

$BC=\sqrt{\frac{2}{5}}BA$ و $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\alpha$

http://ensdz28.blogspot.com/

-أحسب القيمة المظبوطة لـ $\sin\alpha$

3) بين أن $\frac{z-3i}{1-2i}=\frac{1-3i}{5}$ و إستنتج قيمة z

4) علم النقطة C ثم تحقق أن المثلث ABC متقايس الساقين رأسه الأساسي A

التمرين 05:

I) نعتبر العدد المركب α حيث: $2\alpha=(-1+\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$

1) بين أن $\alpha^2=-\sqrt{3}+i$ ، ثم أكتب α^2 على الشكل الاسي إستنتج طويلة و عمدة للعدد المركب α.

2) إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

II) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ ...(1)

1) بين أن العدد المركب $z_1=\alpha^2$ هو حلا للمعادلة (1)، ثم إستنتج الحل الثاني z_2 للمعادلة (1).

2) جد عمدة للعدد المركب $L=\frac{z_1}{z_2}$ ، ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد المركب L^n حقيقيا.

3) ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، z عدد مركب صورته النقطة M.

- عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|\alpha(1-z)|=|4z_2|$

التمرين 06:

ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. $z=x+iy$ عدد مركب و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث: $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$

1) أكتب العدد المركب $f(z)$ على الشكل الجبري.

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي من أجلها $f(z)$ حقيقيا

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي من أجلها $f(z)$ تخيلا صرفا

4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $|f(z)|=\sqrt{3}$

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

5) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=z$

التمرين 07:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-2+2i$ ، $z_C=-1+3i$.

1) أكتب كل من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.

2) أ) L عدد مركب يحقق : $\frac{z_A}{L}=\frac{1}{z_B}$. أوجد طويلة و عمدة العدد المركب L .

ب) تحقق من أن : $\left(\frac{L}{4\sqrt{2}}\right)^{1263}=-i\frac{z_B}{2\sqrt{2}}$.

3) أوجد قيم الأعداد الطبيعية n حتى يكون z_A^n عدد حقيقي

4) أ) أحسب الطول BC .

ب) حدد طبيعة مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

التمرين 08:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقطتان A و B التي لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=1$ و $z_B=2$

(C) الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 1 ، θ عدد حقيقي من المجال $]0;\pi[$. نسمي M_θ النقطة ذات اللاحقة $z_\theta=1+2e^{2i\theta}$

1) برهن أن M تنتمي إلى (C)

2) عبر بدلالة θ عن الزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AM})$ ثم إستنتج طبيعة مجموعة النقط M عندما θ تمسح المجال $]0;\pi[$.

3) كيف يمكن إنشاء النقطة $M_{\frac{\pi}{6}}$

4) نعتبر النقطة E ذات اللاحقة : $z_E=1+\left(z_{\frac{\pi}{6}}\right)^2$

أ) أكتب على الشكل الاسي كل من العددين z_E-z_A و $z_{\frac{\pi}{6}}-z_A$

ب) إستنتج أن النقط A و E و $M_{\frac{\pi}{6}}$ على إستقامة واحدة.

التمرين 09:

1)نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ) أحسب $P(-1)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

حيث a، b عددين حقيقين يطلب تعيينهما

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ علم النقط A، B و C التي لواحقها $z_A=-1$، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$.

3)أ) عين z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;2)\}$.

http://ensdz28.blogspot.com/

ب) أحسب $|z_C-z_G|$ ، $|z_B-z_G|$، إستنتج طبيعة المثلث GBC .

ج) أحسب طويلة و عمدة العدد المركب $L=\frac{z_B-z_C}{z_G-z_A}$ ثم أكتب شكلا أسيا للعدد L .

د) إستنتج أن المستقيمان (AG) و (BC) متعامدان.

هـ) بين أن L^{2012} عددا حقيقيا موجبا.

3) عين ثم أنشئ المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق

$$-|z_A-z|^2+2|z_B-z|^2+2|z_C-z|^2=12$$

التمرين 10:

$P(z)$ كثير حدود معرف في المجموعة $\mathbb{C}$ بـ : $P(z)=z^2+2\sqrt{3}z+4$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) أكتب حـــلي المعادلة على الشكل الأسي.

3)في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C لاحقاتها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=-\sqrt{3}-i$.

أ) أكتب كلا من z_A، z_B و z_C علـــــى الشكل الأسي.

ب) علم النقط A ، B و C ثم بين أنها تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعين مركزها و نصف قطرها.

4) نضع: $L=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

أ) بين أن $L=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم أكتب العدد L على الشكل الأسي.

ب) فسر هندسيا الطويلة و عمدة العدد L ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 11:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-2z+2=0$

2)لتكن النقط K، L و M التي لواحقها على الترتيب: $z_K=1+i$ $z_L=1-i$ ، $z_M=-i\sqrt{3}$. أنشئ هذه

النقط في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة 4cm)

3)أ) تحقق أن z_N لاحقة النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة L هي: $2+i(\sqrt{3}-2)$.

ب) نعتبر الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث: $r(M)=A$ و $r(N)=C$ ،

- عين اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و C على الترتيب.

ج) نعتبر الإنسحاب t الذي شعاعه لاحقته 2i حيث: $t(N)=B$ و $t(M)=D$ ، عين اللاحقتين z_D و z_B للنقطتين D و B على الترتيب.

4)أ) بين أن النقطة K منتصف القطعة [DB] هي منتصف القطعة [AC]

ب) بين ان $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}=i$ ثم إستنتج طبيعة الربـــاعي ABCD .

التمرين 12:

نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية: $z^3+(6+i)z^2+6(3+i)z+18i=0 \quad ...(*)$

1)أ) بين أن $-i$ حلا للمعادلة (*).

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (*)، ثم أكتب الحلول على الشكل الأسي.

2) نعتبر الأعداد المركبة: $z_A=-i$ ، $z_B=-3+3i$ ، $z_C=-3-3i$

لواحق النقط A ، B و C على الترتيب في المستوي المركب المنسوب غلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=-z-6-i$.

أ) حدد طبيعة التحويل f مع ذكر العناصر المميزة.

ب) أوجد إحداثيي النقطة D صورة A بالتحويل f .

ج)أوجد العبارة المركبة للدوران الذي مركزه D و يحول B إلى C .

التمرين 13:

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C صور الأعداد المركبة $z_A=-2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\sqrt{3}+i$.

1) أ) أكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسي.

ب) إستنتج مركز و نصف قطر الدائرة (C) التي تشمل النقط A ، B و C .

ج) علم النقط A ، B و C ثم ارسم الدائرة (C).

د) أكتب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي، ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

2) ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) بين أن النقطة 'O ذات اللاحقة $-\sqrt{3}-i$ صورة النقطة O بالدوران r.

ب) بين أن $[O'C]$ قطرا للدائرة (C) ثم أنشئ ('C) صورة الدائرة (C) بالدوران r.

ج) تحقق أن الدائرتين (C) و ('C) تشتركان في النقطتين A و B.

التمرين 14:

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ ، نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث $\text{Im}(z_1)>0$.

2) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي ثم أكتب العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}$ على الشكل الجبري.

3) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{n}$ تخيلي صرف.

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B لاحقتاهما z_1 ، z_2 على الترتيب.

1) أ) عين لاحقة 'A صورة النقطة A بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ب) إستنتج نوع المثلث 'OAA.

2) عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل الذي يرفق كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') حيث :

$$z'+z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z+z_1)$$

3) تعرف على مجموعة النقط M صورة z التي تحقق $z+z_1=-2e^{i\theta}$ حيث θ تمسح $\mathbb{R}$.

التمرين 15:

1) P(z) كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3-5z^2+12z-8$

أ) تحقق أن العدد 1 جذر لـ P(z).

ب) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من اجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C ذات الاحقات: $z_A=2+2i$ ، $z_B=2-2i$ و $z_C=1$ على الترتيب.

أ) علم النقط A ، B و C (يتم رسم الشكل في باقي مراحل التمرين)

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

ب) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}=2$

3) أ) عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3 .

ب) عين لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

4) أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}$ على الشكل الجبري ، إستنتج طبيعة المثلث ADE .

5) أ) لتكن منتصف القطعة $[ED]$ و H نظيرة A بالنسبة إلى I . عين مع التبرير طبيعة الرباعي ADHE .

ب) عين و أنشئ المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\|$.

التمرين 16:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $4z^2-12z+153=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و P لواحقها على الترتيب: $z_A=\frac{3}{2}+6i$ ، $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ و $z_P=3+2i$ و الشعاع $\vec{w}$ لاحقته $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$.

أ) عين اللاحقة z_Q للنقطة Q صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ ب) عين اللاحقة z_R للنقطة R صورة النقطة P بالتحاكي h الذي مركزه النقطة C و نسبته $-\frac{1}{3}$.

ج) عين اللاحقة z_S للنقطة S صورة النقطة P بالدوران r الذي مركزه النقطة A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

د) علـــم النقط P ، Q ، R و S .

3) أ) بين أن الرباعي PQRS متوازي أضلاع.

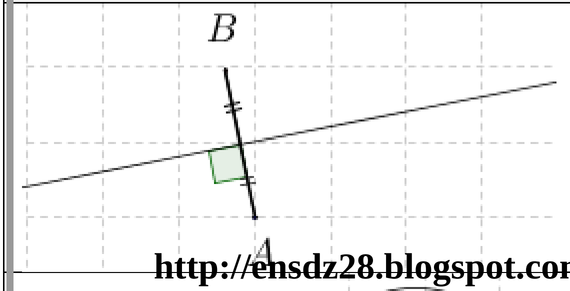
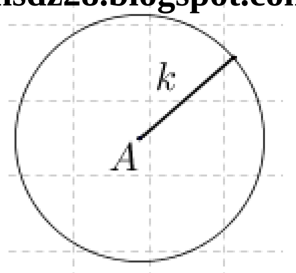
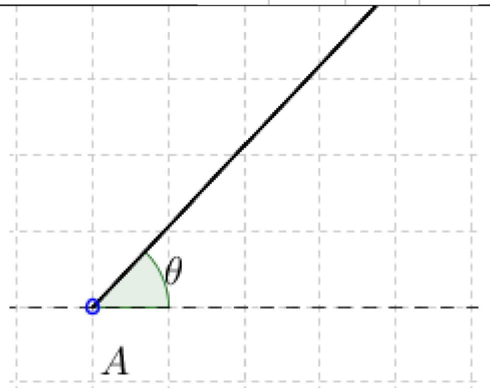
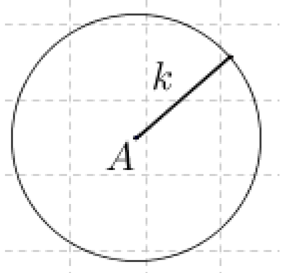
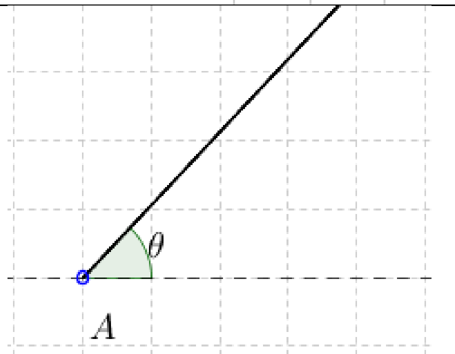
ب) أحسب $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$. إستنتج بالضبط طبيعة متوازي الأضلاع PQRS .

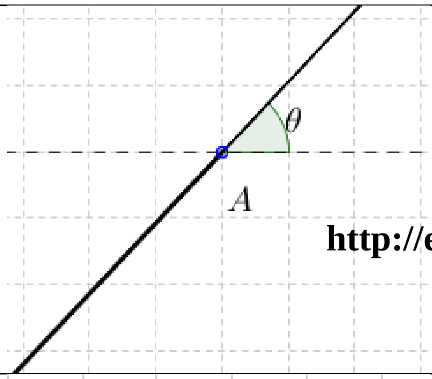
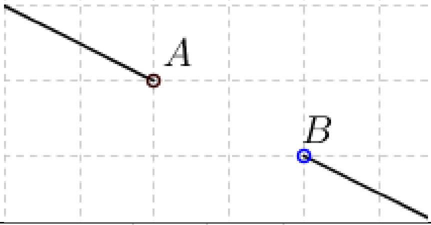
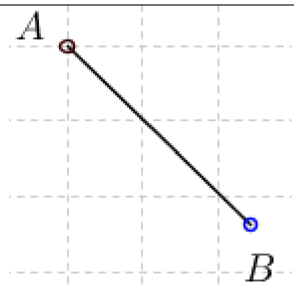
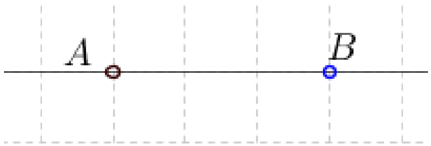
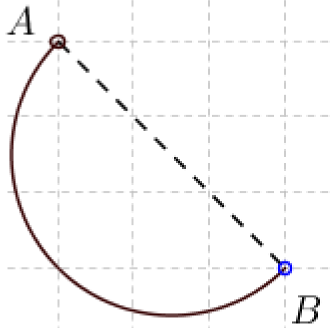
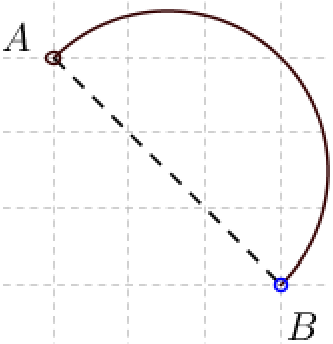
ج) بين أن النقط P ، Q ، R و S تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تحديد لاحقة مركزهـا Ω و نصف قطرها

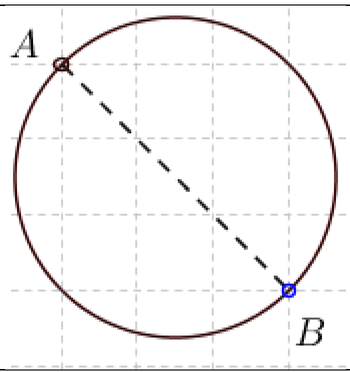
4) هـــــل المستقيم (AP) مماس للدائرة (γ) .

إعداد الأستاذ شداني عبد المالك

4) توظيف طويلة و عمدة عدد مركب في تحديد طبيعة مجموعة النقط من المستوي:

الشكل المركب	مجموعة النقط M ذات اللاحقة z	تمثيلها البياني
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	محور القطعة المستقيمة $[AB]$	
$\lvert z-z_A\rvert=k$	• $k>0$: دائرة مركزها A و نصف قطرها k • $k=0$: النقطة A • $k<0$: مجموعة خالية.	
$z=z_A+ke^{i\theta}$; $k\in\mathbb{R}_+^*$ θ ثابت	نصف مستقيم ميله $\tan(\theta)$ باستثناء النقطة A و يحقق العلاقة: $(\vec{i};\overrightarrow{AM})=\theta$	
$z=z_A+ke^{i\theta}$; $\theta\in\mathbb{R}$ k ثابت موجب	دائرة نصف قطرها k و مركزها النقطة A	
$\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	نصف المستقيم الذي ميله $\tan(\theta)$ باستثناء النقطة A مع $(\vec{i};\overrightarrow{AM})=\theta$	

	مستقيم ميله $\tan(\theta)$ باستثناء النقطة A	$\arg(z-z_A)=\theta+k\pi$;$k\in\mathbb{Z}$
	المستقيم (AB) باستثناء القطعة [AB]	$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$
	القطعة [AB] باستثناء النقطتين A و B	$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\pi+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$
	المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B	$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$
	نصف الدائرة AB التي قطرها [AB] باستثناء النقطتين A و B	$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$
	نصف الدائرة BA التي قطرها [AB] باستثناء النقطتين A و B	$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

$\arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	الدائرة التي قطرها [AB] باستثناء النقطتين A و B	

http://ensdz28.blogspot.com/