# السلسلة رقم 2 محور المتتاليات للعلمين للمراجعة بكالوريا استدراكية 2017

## التمرين 1:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0 = \frac{1}{5}$ و $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

1) أثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكون : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$

2) أثبت أن $(u_n)$ متزايدة ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها و حساب حدها الأول $v_0$ .

ب) أكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بطريقة أخرى.

4) أكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث : $S_n = \frac{u_0}{2u_0 - 1} + \frac{u_1}{2u_1 - 1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{u_n}{2u_n - 1}$

## حل التمرين 1 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0 = \frac{1}{5}$ و $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

**1) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$**

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

**مرحلة 1 :** نتحقق من صحة $P(n)$ من اجل $n = 0$ : لدينا $0 \prec u_0 = \frac{1}{5} \prec \frac{1}{2}$ إذن $P(0)$ صحيحة

**مرحلة 2 :** نفرض صحة $P(n)$ معناه $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ: $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{2}$

لدينا : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$ و منه $0 \prec 2u_n \prec 1$ أي $1 \prec 2u_n + 1 \prec 2$ باستعمال المقلوب $\frac{1}{1} \succ \frac{1}{2u_n + 1} \succ \frac{1}{2}$ و منه $-1 \prec -\frac{1}{2u_n + 1} \prec -\frac{1}{2}$ و منه $1 - 1 \prec 1 - \frac{1}{2u_n + 1} \prec 1 - \frac{1}{2}$ نجد $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{2}$ .

**2) إثبات أن $(u_n)$ متزايدة ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1} \succ 0$$

| $u_n$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|
| $u_n$ | + | |
| $1 - 2u_n$ | + | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2u_n+1$ | | $+$ | |
| $u_{n+1}-u_n$ | | $+$ | |

و يمكن أن نضع جدولا ندرس فيه

إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل $0 \prec u_n \prec \frac{1}{2}$ :

بما أن $u_{n+1}-u_n > 0$ فان المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما.

بما أن $(u_n)$ متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة.

حساب نهايتها : نضع $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ و منه $l = \frac{2l}{2l+1}$

أي $2l^2 + l = 2l$ تكافئ $2l^2 - l = 0$ أي $l(2l-1)=0$

إما $l=0$ مرفوض لأن $0 \prec l \prec \frac{1}{2}$ أو $l=\frac{1}{2}$ ( مقبول ) و بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

3) لدينا $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) البرهان على أن $(v_n)$ متتالية هندسية ، مع تحديد أساسها وحساب حدها الأول $v_0$ :

لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}u_{n+1}}{2u_{n+1}-1} = \frac{3^n \times 3\left(\frac{2u_n}{2u_n+1}\right)}{2\left(\frac{2u_n}{2u_n+1}\right)-1} = \frac{3^n \times 3(2u_n)}{2(2u_n)-2u_n-1} = \frac{3^n \times 6u_n}{2u_n-1} = 6\left(\frac{3^n u_n}{2u_n-1}\right) = 6v_n$

و منه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=6$ و حدها الأول $-\frac{1}{3} = \frac{1}{2-5} = \frac{\frac{1}{5}}{2\left(\frac{1}{5}\right)-1} = \frac{3^0 u_0}{2u_0-1} = v_0$ .

ب) كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ بطريقة أخرى.

لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = \left(-\frac{1}{3}\right)\times(6)^n$

ولدينا $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ و منه $v_n(2u_n-1) = 3^n u_n$ و منه $2v_n u_n - 3^n u_n = v_n$ أي $u_n(2v_n - 3^n) = v_n$ و منه

$u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن $u_n = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\times(6)^n}{2\left(-\frac{1}{3}\right)\times(6)^n - 3^n} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\times(6)^n}{\left(-\frac{2}{3}\right)\times(6)^n - 3^n} = \frac{(6)^n}{2(6)^n + 3^{n+1}}$

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2v_n - 3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{v_n\left(2-\frac{3^n}{v_n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{3^n}{v_n}} = \frac{1}{2}$

لأن: $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{\left(-\frac{1}{3}\right)\times(6)^n} = \lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{3}{6}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} -3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

**4) كتابة المجموع $S_n$ بدلالة $n$ حيث :** $S_n=\frac{u_0}{2u_0-1}+\frac{u_1}{2u_1-1}+............+\frac{u_n}{2u_n-1}$

لدينا $v_n=\frac{3^n u_n}{2u_n-1}$ و منه $\frac{v_n}{3^n}=\frac{u_n}{2u_n-1}$

إذن $S_n=\frac{u_0}{2u_0-1}+\frac{u_1}{2u_1-1}+............+\frac{u_n}{2u_n-1}=\frac{v_0}{3^0}+\frac{v_1}{3^1}+......+\frac{v_n}{3^n}=w_0+w_1+...+w_n$

مع $w_n=\frac{v_n}{3^n}$ حيث $(w_n)$ متتالية هندسية لانَ: $w_{n+1}=\frac{v_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{6v_n}{3^n\times 3}=2w_n$

أساسها $q'=2$ و حدها الأول $w_0=\frac{v_0}{3^0}=-\frac{1}{3}$

وبالتالي : $S_n=w_0+w_1+...+w_n=w_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=-\frac{1}{3}\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\frac{1}{3}\left(1-2^{n+1}\right)$

## التمرين 2 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على بـ $u_1=\sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ (تدور النتائج إلي $10^{-2}$ ) ثم ضع تخمين حول إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون: $u_n\leq n+3$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

3) لتكن $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ بـ: $v_n=u_n-n$ .

بين أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S'_n=u_1+u_2+...+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$ ، عبر عن $S_n$ و $S'_n$ بدلالة $n$ ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$ .

## حل التمرين 2 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على بـ $u_1=\sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ :

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1) حساب $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ (تدور النتائج إلي $10^{-2}$ ) وضع تخمين حول إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

$$u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}\sqrt{e}+\frac{4}{3}=2,43$$

$$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}(2,43)+\frac{5}{3}=3,29$$

$$u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{3}{3}+1=\frac{2}{3}(3,29)+2=4,19$$

المتتالية $(u_n)$. متزايدة

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $u_n\leq n+3$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية.

مرحلة 1 : نتحقق من صحة $P(n)$ من اجل $n=1$ نجد $u_1=\sqrt{e}\leq 1+3=4$ إذن $P(1)$ صحيحة

مرحلة 2 : نفرض صحة $P(n)$ من اجل $n\geq 1$ معناه $u_n\leq n+3$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$n+1\geq 1$ معناه $u_{n+1}\leq n+4$

لدينا $n\geq 1$ : $u_n\leq n+3$ و منه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+3\times\frac{2}{3}$ و منه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$ نجد

$u_{n+1}\leq n+3\prec n+4$

ب) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ،

$$u_{n+1}-u_n=\left[\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\right]-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{-1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

استنتاج إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$.

لدينا $u_n \le n+3$ ومنه $n+3-u_n \ge 0$ ومنه : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)\ge 0$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة

3) لتكن $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$ بـ: $v_n=u_n-n$.

إثبات أن المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية،

$$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$$

هندسية أساس $q=\frac{2}{3}$ و حد الأول $v_1=u_1-1=\sqrt{e}-1$ ومنه $v_n=v_1\times q^{n-1}=\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

إثبات أن من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$ : $u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا $v_n=u_n-n$ ومنه $u_n=v_n+n=\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S'_n=u_1+u_2+...+u_n$

و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$. ، تعبير عن $S_n$ و $S'_n$ بدلالة $n$ ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n$.

$$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n=w_1+w_2+...........+w_n$$

مع متتالية $w_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ هندسية لأنه $w_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}v_{n+1}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)\right]\left[\left(\frac{2}{3}\right)v_n\right]=\left(\frac{4}{9}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n\right]=\frac{4}{9}w_n$

و منه $(w_n)$ المتتالية هندسية أساسها و $\frac{4}{9}$ وحدها الأول $w_1=\frac{2}{3}\left(\sqrt{e}-1\right)$ منه

$$S_n=w_1\times\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sqrt{e}-1\right)\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{9}\right)}\right]=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{5}\right)\left(\sqrt{e}-1\right)\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=\frac{6}{5}\left(\sqrt{e}-1\right)\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$S'_n=u_1+u_2+...+u_n=(v_1+1)+(v_2+2)+...+(v_n+n)=[v_1+v_2+...+v_n]+(1+2+...+n)=v_1\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S'_n=v_1\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]+\frac{n(n+1)}{2}=\left(\sqrt{e}-1\right)\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right]+\frac{n(n+1)}{2}=3\left(\sqrt{e}-1\right)\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(\sqrt{e}-1\right)\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3\left(\sqrt{e}-1\right)\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{n^2}+\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[0+\frac{n(n+1)}{2n^2}\right]=\frac{1}{2}$$

## التمرين 3

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = 2+\sqrt{u_n - 2}$

1) أثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $3 \le u_n \le 11$ ثم تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$ .

2) أثبت أن $(u_n)$ متناقصة و ماذا تستنتج و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ .

3) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le u_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_n - 3)$ ثم استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le u_n - 3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$ بطريقة اخري.

4) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n - 2)$

أ) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها حساب حدها الأول $v_0$ ثم أكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم $\lim_{n\to+\infty} u_n$ بطريقة أخري.

ب) أكتب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ و $P_n$ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ............ + v_n$ و $P_n = (u_0-2)(u_1-2)(u_1-2)......(u_n-2)$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim_{n\to+\infty} P_n$ .

## حل التمرين 3 : ( خاص بتقني رياضي و رياضي )

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كالآتي : $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = 2+\sqrt{u_n - 2}$

1) أثبت بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ :

**1) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $3 \le u_n \le 11$**

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

**مرحلة 1 :** نتحقق من صحة $P(n)$ من اجل $n = 0$ : لدينا $3 \le u_0 = 11 \le 11$ اذن $P(0)$ صحيحة

**مرحلة 2 :** نفرض صحة $P(n)$ معناه $3 \le u_n \le 11$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أنَ: $3 \le u_{n+1} \le 11$

لدينا : $3 \le u_n \le 11$ و منه $1 \le u_n - 2 \le 9$ أي $\sqrt{1} \le \sqrt{u_n - 2} \le \sqrt{9}$ بإضافة 2 : $3 \le 2+\sqrt{u_n-2} \le 5 \prec 11$ و منه $3 \le u_{n+1} \le 11$ .

**تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$ .**

$$u_{n+1} - u_n = 2+\sqrt{u_n-2} - u_n = \sqrt{u_n-2}+2-u_n = \sqrt{u_n-2}-(u_n-2) = \sqrt{u_n-2}-\left(\sqrt{u_n-2}\right)^2 = \sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right)$$

**2) إثبات أن $(u_n)$ متناقصة و ماذا تستنتج و أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ .**

من جهة لدينا $\sqrt{u_n-2} \succ 0$ ........ (1)

ومن جهة أخري لدينا $3 \le u_n \le 11$ و منه $1 \le u_n - 2 \le 9$ نجد $1 \le \sqrt{u_n-2} \le 3$ و بظرب $-1$ نجد $-3 \le -\sqrt{u_n-2} \le -1$

و بإضافة 1 نجد $-2 \le 1-\sqrt{u_n-2} \le 0$ ............ (2)

من (1) و (2) ينتج $\begin{cases} \sqrt{u_n-2} \succ 0 \\ 1-\sqrt{u_n-2} \le 0 \end{cases}$ و منه $\sqrt{u_n-2}\left(1-\sqrt{u_n-2}\right) \le 0$ و منه $(u_n)$ متتالية متناقصة.

بما أن $(u_n)$ متناقصة و محدودة من الأسفل بالعدد 3 فهي متقاربة.

حساب نهايتها : نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و منه $l = 2+\sqrt{l-2}$ نجد $l-2=\sqrt{l-2}$ مع $l \succ 2$

أي $(l-2)^2 = \left(\sqrt{l-2}\right)^2$ تكافئ $(l-2).\left[(l-2)-1\right]=0$ أي $(l-2).(l-3)=0$

إما $l=2$ مرفوض لأن $3 \prec l \prec 11$ أو $l=3$ ( مقبول ) و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

**3) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le u_{n+1}-3 \le \frac{1}{2}(u_n-3)$ ثم استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le u_n - 3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ بطريقة اخري.**

**أولا من جهة 1 :** لدينا $3 \le u_n \le 11$ ومنه $u_n \ge 3$ اي $u_n - 2 \ge 3-2$ و بجذر طرفين $\sqrt{u_n-2} \ge \sqrt{1}$ و بإضافة 2 نحصل

$2+\sqrt{u_n-2} \ge 1+2$ و منه $u_{n+1} \ge 3$ إذن $u_{n+1}-3 \ge 0$ وهو مطلوب

**ثانيا من جهة 2 :** لدينا $u_{n+1}-3 = 2+\sqrt{u_n-2}-3$ و منه $u_{n+1}-3=\left(\sqrt{u_n-2}-1\right)\times\frac{\sqrt{u_n-2}+1}{\sqrt{u_n-2}+1}$

نجد : $u_{n+1}-3 = \frac{u_n-2-1}{\sqrt{u_n-2}+1} = \frac{u_n-3}{\sqrt{u_n-2}+1}$

و كذالك $u_n \ge 3$ اي $u_n-2 \ge 3-2$ و بجذر طرفين $\sqrt{u_n-2} \ge \sqrt{1}$ ومنه $\sqrt{u_n-2}+1 \ge 2$ و باستعمال مقلوب

$\frac{1}{\sqrt{u_n-2}+1} \le \frac{1}{2}$ و بضرب طرفين في $u_n-3 \ge 0$ نجد $\frac{u_n-3}{\sqrt{u_n-2}+1} \le \frac{1}{2}(u_n-3)$ نجد $u_{n+1}-3 \le \frac{1}{2}(u_n-3)$

و منه من 1 و 2 نجد : $\begin{cases} u_{n+1}-3 \ge 0 \\ u_{n+1}-3 \le \frac{1}{2}(u_n-3) \end{cases}$ و منه ينتج $0 \le u_{n+1}-3 \le \frac{1}{2}(u_n-3)$

**استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \le u_n-3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$**

$$\begin{cases} 0 \le u_n - 3 \le \frac{1}{2}(u_{n-1} - 3) \\ 0 \le u_{n-1} - 3 \le \frac{1}{2}(u_{n-2} - 3) \\ 0 \le u_{n-2} - 3 \le \frac{1}{2}(u_{n-3} - 3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \le u_2 - 3 \le \frac{1}{2}(u_1 - 3) \\ 0 \le u_1 - 3 \le \frac{1}{2}(u_0 - 3) \end{cases}$$

بضرب طرف لي طرف نجد $0 \le u_n - 3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 3)$

و منه $0 \le u_n - 3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (11-3)$ إذن $0 \le u_n - 3 \le 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ بطريقة اخري.

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 3) = 0$ إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

4) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n - 2)$

أ) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها حساب حدها الأول $v_0$ ثم أكتب بدلالة $n$ عبارة $v_n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$ ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ بطريقة أخري.

لدينا : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(2 + \sqrt{u_n - 2} - 2\right) = \ln\left(\sqrt{u_n - 2}\right) = \ln(u_n - 2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\mathrm{n}(u_n - 2) = \frac{1}{2} v_n$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0$ حيث :

$v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln(11-2) = \ln 9$

كتابة بدلالة $n$ عبارة $v_n$

$v_n = v_0 \times q^n = \ln 9\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$

لدينا $v_n = \ln(u_n - 2)$ و منه $e^{v_n} = u_n - 2$ و منه $u_n = 2 + e^{v_n}$

ب) كتابة بدلالة $n$ المجموع $S_n$ و $P_n$ حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots\dots + v_n$ و $P_n = (u_0 - 2)(u_1 - 2)(u_2 - 2)\dots\dots(u_n - 2)$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$ .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots\dots\dots + v_n = S_n = v_0\left[\frac{1 - q^{n+1}}{1-q}\right] = \ln 9\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 2\ln 9\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

و $P_n=(u_0-2)(u_1-2)(u_2-2)......(u_n-2)=(e^{v_0})(e^{v_1})(e^{v_2})...(e^{v_n})$ و منه $P_n=e^{v_0+v_1+...+v_n}=e^{S_n}$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2\ln 9\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=2\ln 9$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\lim\limits_{n\to+\infty} e^{S_n}=e^{2\ln 9}=81$

## التمرين 4 :

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

1) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n\succ 0$.

ب) أدرس اتجاه التغير المتتالية $(u_n)$ ثم أستنتج أنها متقاربة.

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم كما يلي: $v_n=\frac{u_n}{n}$

أثبت أن $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

3) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم أن $u_n=\frac{n}{2^n}$.

4) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\ln x-x\ln 2$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## حل التمرين 4 :

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم، $u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n$

**1) أ) برهان أنّ من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n\succ 0$.**

**مرحلة 1 :** نتحقق من صحتها من أجل $n=1$ : لدينا $u_1=\frac{1}{2}\succ 0$ ومنه خاصية محققة من اجل $n=1$

**مرحلة 2 :** نفرض أنها صحيحة من اجل $n$ أي $u_n\succ 0$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي أن $u_{n+1}\succ 0$

بما أن $n\succ 0$ و منه $2n\succ 0$ و كذلك $n\succ 0$ معناه $n+1\succ 1\succ 0$

$\begin{cases} n+1\succ 0\\ 2n\succ 0\end{cases}$ و منه $\frac{n+1}{2n}\succ 0$

إذن لدينا $\begin{cases} \frac{n+1}{2n}\succ 0\\ u_n\succ 0\end{cases}$ فنجد $\frac{n+1}{2n}u_n\succ 0$ و بالتالي $u_{n+1}\succ 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n\succ 0$ .

ب) دراسة اتجاه التغير المتتالية $(u_n)$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{2n}u_n-u_n=\left(\frac{n+1}{2n}-1\right)u_n=\left(\frac{n+1-2n}{2n}\right)u_n=\left(\frac{1-n}{2n}\right)u_n$$

بما $n\geq 1$ و منه $-n\leq -1$ منه $1-n\leq 0$ فينتج $\left(\frac{1-n}{2n}\right)\leq 0$ يـنـعـنـي $u_{n+1}-u_n\leq 0$

إذن المتتالية $(u_n)$ متناقصة.

استنتاج أنها متقاربة.

بما أن $(u_n)$ متناقصة و محدودة من أسفل بالعدد $0$ فهي متقاربة

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم كما يلي:

$$v_n=\frac{u_n}{n}$$

إثبات أن $(v_n)$ هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n\times\frac{1}{n+1}=\frac{u_n}{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n}=\frac{1}{2}v_n$$

و منه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1=\frac{u_1}{1}=\frac{1}{2}$

3) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم أن $u_n=\frac{n}{2^n}$.

بما أن $(v_n)$ متتالية هندسية فان $v_n=v_1\times q^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$

لدينا $v_n=\frac{u_n}{n}$ و منه $u_n=n.v_n=n.\frac{1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\ln x-x\ln 2$

حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x-x\ln 2]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{\ln x}{x}-\ln 2\right]=(+\infty)(0-\ln 2)=-\infty$$

استنتاج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا $u_n=\frac{n}{2^n}$ و منه $\ln[u_n]=\ln\left[\frac{n}{2^n}\right]=\ln n-\ln 2^n=\ln n-n\ln 2=f(n)$

إذن $\ln[u_n]=f(n)$ و منه $u_n=e^{f(n)}$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{f(n)}=0$ ( لأنه $\lim_{n\to+\infty}f(n)=-\infty$ )

## التمرين 5 :

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=3u_n+2n+1$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n=3^n-n-1$.

2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ كما يلي: $v_n = u_n + \alpha(n+1)$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي.
عين $\alpha$ حتى تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول $v_0$.

3) نضع $\alpha = 1$ وليكن $S_n = v_0 + v_1 + ...... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ...... + u_n$

أ) احسب بدلالة $n$ المجموعين $S_n$ و $T_n$

ب) عين قيمة $n$ حتى يكون $S_n - T_n = 2037171$

## حل التمرين 5 :

لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$،
$u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

**1) برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 3^n - n - 1$.**

**مرحلة 1 :** نتحقق من صحتها من أجل $n = 0$ : لدينا $u_0 = 3^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ ومنه خاصية محققة من اجل $n = 0$.

**مرحلة 2 :** نفرض أنها صحيحة من اجل $n$ أي $u_n = 3^n - n - 1$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي أن
$u_{n+1} = 3^{n+1} - (n+1) - 1 = 3^{n+1} - n - 2$ أي أن $u_{n+1} = 3^{n+1} - n - 2$

لدينا $\begin{cases} u_n = 3^n - n - 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 \end{cases}$ و منه $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 = 3(3^n - n - 1) + 2n + 1 = 3^{n+1} - 3n - 3 + 2n + 1 = 3^{n+1} - n - 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n = 3^n - n - 1$
.

**2) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ كما يلي: $v_n = u_n + \alpha(n+1)$ حيث $\alpha$ عدد حقيقي.**

**تعيين $\alpha$ حتى تكون المتتالية $(v_n)$ هندسية**

**طريقة 1 :**

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1+1) = u_{n+1} + \alpha(n+2) = 3u_n + 2n + 1 + \alpha n + 2\alpha = 3u_n + (2+\alpha)n + 1 + 2\alpha$$

$$v_{n+1} = 3\left[u_n + \frac{(2+\alpha)}{3}n + \frac{1+2\alpha}{3}\right] = 3v_n \quad \text{(} (v_n) \text{ متتالية هندسية )}$$

$u_n + \frac{(2+\alpha)}{3}n + \frac{1+2\alpha}{3} = u_n + \alpha(n+1)$ و منه $\frac{(2+\alpha)}{3}n + \frac{1+2\alpha}{3} = \alpha n + \alpha$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}\dfrac{(2+\alpha)}{3}=\alpha\\ \dfrac{1+2\alpha}{3}=\alpha\end{cases}$ و منه $\begin{cases}2+\alpha=3\alpha\\1+2\alpha=3\alpha\end{cases}$ إذن $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=1\end{cases}$

**طريقة 2 :**

من جهة1 لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1+1)=u_{n+1}+\alpha(n+2)=3u_n+2n+1+\alpha n+2\alpha=3u_n+(2+\alpha)n+1+2\alpha$

و منه جهة 2 لدينا $v_n=u_n+\alpha(n+1)$ و منه $u_n=v_n-\alpha(n+1)$

و منه $\begin{cases}v_{n+1}=3u_n+(2+\alpha)n+1+2\alpha\\u_n=v_n-\alpha(n+1)\end{cases}$ و منه

$v_{n+1}=3u_n+(2+\alpha)n+1+2\alpha=3[v_n-\alpha(n+1)]+(2+\alpha)n+1+2\alpha=3v_n-3\alpha(n+1)+(2+\alpha)n+1+2\alpha$

كي تكون يجب أن يكون $\begin{cases}v_{n+1}=3v_n\\-3\alpha(n+1)+(2+\alpha)n+1+2\alpha=0\end{cases}$ و منه

$-3\alpha(n+1)+(2+\alpha)n+1+2\alpha=0$

نجد $-3\alpha n-3\alpha+2n+\alpha n+1+2\alpha=0$ ومنه $-2\alpha n+2n+1-\alpha=0$ ومنه $(-2\alpha+2)n+1-\alpha=0$

معناه $\begin{cases}-2\alpha+2=0\\1-\alpha=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=1\end{cases}$

إذن $\alpha=1$ متتالية $(v_n)$ هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0=u_0+\alpha(0+1)=0+1(1)=1$

**طريقة 3 :**

لدينا $\begin{cases}u_n=3^n-n-1\\v_n=u_n+\alpha(n+1)\end{cases}$ ومنه $v_n=u_n+\alpha(n+1)=3^n-n-1+\alpha(n+1)=3^n-(n+1)+\alpha(n+1)=$

و منه $v_n=3^n-(n+1)+\alpha(n+1)=3^n+(n+1)[-1+\alpha]$

اذن $(v_n)$ هندسية معناه $[-1+\alpha]=0$ و منه $\alpha=1$

**3) نضع $\alpha=1$ وليكن $S_n=v_0+v_1+......+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+......+u_n$**

**أ) حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$**

$$S_n=v_0+v_1+......+v_n=v_0\times\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=1\left[\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right]=\frac{1}{2}\left[1-3^{n+1}\right]$$

**حساب بدلالة $n$ المجموع $T_n$**

لدينا $v_n=u_n+\alpha(n+1)=u_n+n+1$ و منه $u_n=v_n-n-1$

**طريقة1:** $T_n=u_0+u_1+u_2+u_3......+u_n=(v_0-0-1)+(v_1-1-1)+(v_2-2-1)+(v_3-3-1)........+(v_n-n-1)$

و $T_n=[v_0+v_1+v_2+v_3+....+v_n]-[0+1+2+3+....+n]-[1+1+1+1+....+1]=S_n-\dfrac{n(n+1)}{2}-(n+1)$

$$T_n=S_n-\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)=S_n-\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

**طريقة2:** نلاحظ أن $u_n=v_n-n-1$ عبارة عن مجموع متتالية هندسية $(v_n)$ و أخري حسابية حيث $w_n=-n-1$ أساسها $-1$ و حدها الأول $w_0=-0-1=-1$ إذن $u_n=v_n+w_n$

$$T_n=u_0+u_1+u_2+u_3......+u_n=(v_0+w_0)+(v_1+w_1)+(v_2+w_2)+........+(v_n+w_n)$$

$$T_n=(v_0+v_1+.....+v_n)+(w_0+w_1+.....+w_n)=S_n+\left[(w_0+w_n)\frac{n+1}{2}\right]=S_n+\left[(-1-n-1)\frac{n+1}{2}\right]=S_n-\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

**ب) تعيين قيمة $n$ حتى يكون** $S_n-T_n=2037171$

عين قيمة $S_n-T_n=2037171$ حتى $S_n-S_n+\frac{(n+2)(n+1)}{2}=2037171$ و منه $\frac{(n+2)(n+1)}{2}=2037171$

وكمه $n^2+3n+2=4074342$ و منه $n^2+3n-4074340=0$ نو منه

$\Delta=(3)^2-4(-4074340)=9+16297360=(4037)^2$ إذن $n_1=\frac{-3-4037}{2}=\frac{-4040}{2}=-2020$ مرفوض

و $n_2=\frac{-3+4037}{2}=\frac{4034}{2}=2017$ و منه قيمة $n$ التي تحقق هي 2017

## التمرين 6

$(\mathbf{u_n})$ متتالية معرفة كما يلي : $n\in\mathbb{N}$ ، $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3+2u_n}{2+u_n} \end{cases}$

1 – احسب : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ .

2 – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم فإن : $u_n>0$

3 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن : $u_n\le\sqrt{3}$

4 – ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و استنتج أن $(u_n)$ متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{u_n}$

5 – لتكن $(\mathbf{v}_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $\mathbf{V_n}=\dfrac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$

أ – برهن أن $(\mathbf{v}_n)$ متتالية هندسية يطلب حساب أساسها $q$ و حدها الأول.

ب – احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{V_n}$

ج) ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{u_n}$ مرة أخري .

## حل التمرين 6 :

**1 – حساب :** $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ .

$$U_1=\frac{3+2U_0}{2+U_0}=\frac{3-2}{2-1}=\frac{1}{1}=1$$

و

$$U_2=\frac{3+2U_1}{2+U_1}=\frac{3+2}{2+1}=\frac{5}{3}$$

و $U_3=\dfrac{3+2U_2}{2+U_2}=\dfrac{3+2\left(\frac{5}{3}\right)}{2+\frac{5}{3}}=\dfrac{3+\frac{10}{3}}{2+\frac{5}{3}}=\dfrac{\frac{9+10}{3}}{\frac{6+5}{3}}=\dfrac{\frac{19}{3}}{\frac{11}{3}}=\dfrac{19}{3}\times\dfrac{3}{11}=\dfrac{19}{11}$

و $U_4=\dfrac{3+2U_3}{2+U_3}=\dfrac{3+2\left(\frac{19}{11}\right)}{2+\frac{19}{11}}=\dfrac{3+\frac{38}{11}}{2+\frac{19}{11}}=\dfrac{\frac{33+38}{11}}{\frac{22+19}{11}}=\dfrac{\frac{71}{11}}{\frac{41}{11}}=\dfrac{71}{41}$

**2 – برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم فإن : $u_n>0$**

**مرحلة 1 :** نتحقق من صحتها من أجل $n=1$ : لدينا $U_1=1\succ 0$ ومنه خاصية محققة من اجل $n=1$

**مرحلة 2 :** نفرض أنها صحيحة من اجل $n$ أي $U_n\succ 0$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي أن $U_{n+1}\succ 0$ ؟.

لدينا : $U_n\succ 0$ يكافئ $2U_n\succ 0$ يكافئ $3+2U_n\succ 3\succ 0$ يكافئ $3+2U_n\succ 0$ ............$(1)$

ومن جهة أخري : $U_n\succ 0$ يكافئ $2+U_n\succ 2\succ 0$ يكافئ $2+U_n\succ 0$ يكافئ $\dfrac{1}{2+U_n}\succ 0$ ..........$(2)$

من $(1)$ و $(2)$ ينتج أن $(3+2U_n)\times\dfrac{1}{2+U_n}\succ 0$ وهذا يعني $\dfrac{3+2U_n}{2+U_n}\succ 0$ ومنه $U_{n+1}\succ 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_n\succ 0$ .

**3ـ البرهان بالتراجع على أن $U_n\le\sqrt{3}$ ( يوجد عدة طرائق)**

**مرحلة 1 :** نتحقق من صحتها من أجل $n=0$ : لدينا $U_0=-1\prec\sqrt{3}$ ومنه خاصية محققة من اجل $n=0$

**مرحلة 2 :** نفرض أنها صحيحة من اجل $n$ أي $U_n\le\sqrt{3}$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي أن $U_{n+1}\le\sqrt{3}$

لدينا $U_n\le\sqrt{3}$

المطلوب : $U_{n+1}\le\sqrt{3}$

$$U_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{3+2U_n}{2+U_n}-\sqrt{3}=\frac{3+2U_n-2\sqrt{3}-U_n\sqrt{3}}{2+U_n}$$

$$=\frac{2\left(U_n-\sqrt{3}\right)+3-U_n\sqrt{3}}{2+U_n}=\frac{2\left(U_n-\sqrt{3}\right)\leq 3\left(U_n-\sqrt{3}\right)}{2+U_n}$$

$$=\frac{\left(U_n-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2+U_n}$$

و بما أن $U_n \leq \sqrt{3}$ فإن $U_n-\sqrt{3}\leq 0$ وعليه : $U_{n+1}-\sqrt{3}\leq 0$

و منه : $U_{n+1}\leq \sqrt{3}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $U_n \leq \sqrt{3}$ .

**5– نبرهن أن $(V_n)$ متتالية هندسية :**

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-\sqrt{3}}{U_{n+1}+\sqrt{3}}=\frac{\dfrac{3+2U_n}{2+U_n}-\sqrt{3}}{\dfrac{3+2U_n}{2+U_n}+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3+2U_n-2\sqrt{3}-U_n\sqrt{3}}{3+2U_n+2\sqrt{3}+U_n\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)U_n+3-2\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)U_n+3+2\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)U_n-\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)U_n+\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left[U_n-\sqrt{3}\right]}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left[U_n+\sqrt{3}\right]}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.V_n$$

إذن : $V_{n+1}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}.V_n$

وعليه : $V_{n+1}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}.V_n$

وبالتالي : $V_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2.V_n$

إذن : $\boxed{V_{n+1}=\left(7-4\sqrt{3}\right)V_n}$

ومنه $(V_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=7-4\sqrt{3}$

وحدها الأول : $V_0=\dfrac{U_0-\sqrt{3}}{U_0+\sqrt{3}}=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$

$$V_0=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)}{\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{1-3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$V_0=-2-\sqrt{3}$$

**ب- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ :**

$$V_n=V_0.q^n=-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}=0$$

لأن : $0<2-\sqrt{3}<1$

**استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ :**

$V_n=\frac{U_n-\sqrt{3}}{U_n+\sqrt{3}}$ ومنه : $V_n\left(U_n+\sqrt{3}\right)=U_n-\sqrt{3}$

وعليه : $U_nV_n+V_n\sqrt{3}=U_n-\sqrt{3}$

وبالتالي : $U_nV_n-U_n=-V_n\sqrt{3}-\sqrt{3}$ و منه :

$U_n\left(V_n-1\right)=-\sqrt{3}\left(V_n+1\right)$ إذن : $U_n=\frac{-\sqrt{3}\left(V_n+1\right)}{V_n-1}$

و عليه: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-\sqrt{3}\left(V_n+1\right)}{V_n-1}=\sqrt{3}$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=0$ .

## التمرين 7 :(للأمانة منقول)

نعتبر المتتالية $(u_n)$ المعرفة بـ : $u_1=e^2$ ومن أجل كل عـدد طبيـعي غير معدوم $n$ ، $u_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$ .

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عـدد طبيعي غير معدوم $n$ : $u_n>\frac{1}{e}$ .

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$

ب) استنتج أن $(u_n)$ متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

3) $(v_n)$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ بـ : $v_n=\frac{1}{2}+ln\sqrt{u_n}$ .

أ) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$.

جـ) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ .

4) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + ........ + \frac{1}{1+\ln u_n}$

## حل التمرين 7 : : (للأمانة منقول)

### 1 / البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ : $u_n > \frac{1}{e}$

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n > \frac{1}{e}$ .

❶ من أجل $n=1$ لدينا : $u_1 = e^2$ و $e^2 > \frac{1}{e}$ ومنه $p(1)$ صحيحة .

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$ أي $u_n > \frac{1}{e}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$.

لدينا : $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}}$ بضرب طرفي هذه المتباينة في $e^{-\frac{1}{2}}$ نجد

$e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}}$ أي $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}} \times \frac{1}{\sqrt{e}}$ ومنه $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$

### 2 / أ / تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ : من أجل كل

$n$ من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n}}{u_n\sqrt{u_n}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}}$$

لدينا $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}}$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{u_n}} < \sqrt{e}$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{u_n}} < e^{-\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{2}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

### استنتاج إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$:

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ومنه $u_{n+1} < u_n$ وبالتالي فإن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

### ب/ استنتاج أن $(u_n)$ متقاربة :

بما أن $(u_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{1}{e}$ فإن $(u_n)$ متقاربة

### حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

نضع $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث $l \in [1;+\infty[$ إذن $f(l) = l$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{l} = l$

إذن $l=\frac{1}{e}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{e}$

**3/ أ / البرهان على أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :**

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}+ln(u_{n+1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln(u_{n+1})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(lne^{-\frac{1}{2}}+ln\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+ln\sqrt{u_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ln\sqrt{u_n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}ln\sqrt{u_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+ln\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1=\frac{1}{2}+ln\sqrt{u_1}=\frac{3}{2}$

**ب/ كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ :** $v_n=v_1\times q^{n-1}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

**استنتاج $u_n$ بدلالة $n$ :**

$v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln(u_n)$ تكافئ $ln(u_n)=2v_n-1$ تكافئ $u_n=e^{2v_n-1}=e^{2\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$ ومنه $u_n=e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$

**جـ / حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :** بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e^{-1}=\frac{1}{e}$

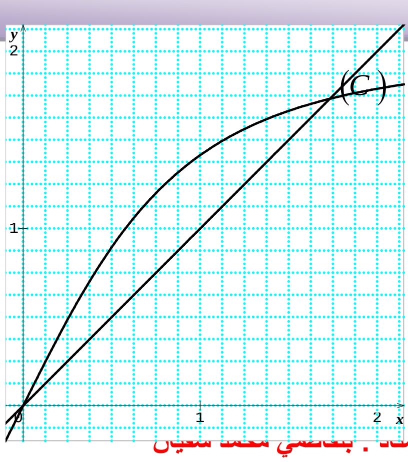
**4 / حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$** $S_n=\frac{1}{1+lnu_1}+\frac{1}{1+lnu_2}+........+\frac{1}{1+lnu_n}$

$v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}ln(u_n)$ تكافئ $2v_n=1+ln(u_n)$ ومنه

$$S_n=\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_2}+........+\frac{1}{2v_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+........+\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_1q}+........+\frac{1}{v_1q^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_1}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}........+\frac{1}{q^{n-1}}\right)\right]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{v_1}\left[\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)=\frac{1}{3}\left(2^n-1\right)$$

## التمرين 8 : ( للأمانة منقول )




1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني $(C)$ للدالة $f$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$

بـ : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ .

و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x \in \left[1,\sqrt{3}\right]$ فإن $f\left(x\right) \in \left[1,\sqrt{3}\right]$ .

2) نعرف المتتالية $(u_n)$ كما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ .

أ) باستعمال التمثيل البياني $(C)$ والمستقيم $(\Delta)$ مثل الحدود $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية $(u_n)$ .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 < u_n < \sqrt{3}$ .

جـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ .

د) استنتج أن $(u_n)$ متقاربة .

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$ .

أ) برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ، ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$ .

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

4) أحسب $p_n$ بدلالة $n$ حيث : $p_n = \dfrac{\left(u_0 \times u_1 \times ......... u_n\right)^2}{\left(3-u_0^2\right)\left(3-u_1^2\right)........\left(3-u_n^2\right)}$

## حل التمرين 8: (للأمانة منقول)

### 1/ دراسة إتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $[0,+\infty[$

الدالة $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ و من أجل كل $x \in [0,+\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

من أجل كل $x \in [0,+\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

### ب/ تبيان أنه إذا كان $x \in \left[1,\sqrt{3}\right]$ فإن $f\left(x\right) \in \left[1,\sqrt{3}\right]$

لدينا $x \in \left[1,\sqrt{3}\right]$ ومنه $1 \le x \le \sqrt{3}$ وبالتالي $f\left(1\right) \le f\left(x\right) \le f\left(\sqrt{3}\right)$ ( لأن الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ )

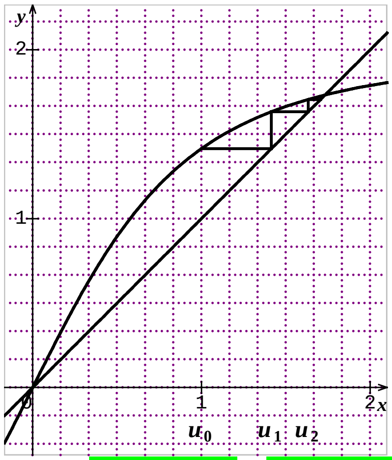
أي $1 \le \sqrt{2} \le f\left(x\right) \le \sqrt{3}$ وبالتالي فإن $f\left(x\right) \in \left[1,\sqrt{3}\right]$

### 2/ أ/ تمثيل الحدود $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على محور الفواصل :

لدينا : $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,u_1)$

نسقط $M_0$ على $(\Delta)$ وفق $(ox)$ ، ثم نسقط النقطة المحصل عليها على $(C)$ وفق $(oy)$ فنحصل على $M_1$

وهكذا نكرر نفس العملية فنحصل على $M_2$




**التخميـن :** المتتالية $(u_n)$ **متزايدة تمـامـا** و**متقاربـة** نحـو $\sqrt{3}$

**ب) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عـدد طبيعي** $n$ **:** $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $1 \le u_n \le \sqrt{3}$

❶ من أجل $n=0$ لدينـا : $u_0 = 1$ و $1 \le 1 \le \sqrt{3}$

ومنـه $p(0)$ صحيحـة.

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحـة مـن أجل عـدد طبيعـي $n$ أي $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ ونبـرهـن صحـة $p(n+1)$ أي $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$

لديـنـا $1 \le u_n \le \sqrt{3}$ ومنه $1 \le f(u_n) \le \sqrt{3}$ حسب السؤال(1ـب)

أي $1 \le u_{n+1} \le \sqrt{3}$ أي أن $p(n+1)$ صحيحـة

اذن $p(n)$ صحيحـة مـن أجل كـل عـدد طبيعـي $n$

**ب . تبيان أنه من أجل كل** $n$ **من** $\mathbb{N}$، $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n}\right)}{\sqrt{1+u_n}}$

من أجل كـل عدد طبيعـي $n$ لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

$$= \frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

* **استنتاج إتجاه تغيـرالمتتالية** $(u_n)$

مـن أجل كـل عدد طبيعـي $n$ لدينا : $u_n \le \sqrt{3}$ ومنـه $u_n^2 \le 3$

وبالتالـي فإن $u_n^2 + 1 \le 4$ ومنه $\sqrt{u_n^2+1} \le 2$

وبالتالـي $-\sqrt{u_n^2+1} \ge -2$ ومنه $2-\sqrt{u_n^2+1} \ge 0$

ومن أجل كـل عدد طبيعـي $n$ لدينـا : $u_n \ge 1$ وبالتالـي $u_n > 0$

ينتج أن $u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)>0$

ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا $\sqrt{u_n^2+1}>0$

ومنه $\dfrac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}>0$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما .

**د / استنتاج أن $(u_n)$ متقاربة :**

بما أن $(u_n)$ متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$ فإن $(u_n)$ متقاربة .

**3 / أ / البرهان على أن $(v_n)$ متتالية هندسية :**

من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\frac{\left(\dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}=\frac{\dfrac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\dfrac{3-u_n^2}{u_n^2+1}}$$

ومنه $$v_{n+1}=4\left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2}\right)=4v_n$$

ومنه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول $v_0=\dfrac{u_0^2}{3-u_0^2}=\dfrac{1}{2}$

**ب / كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$** $v_n=v_0\times q^n=\dfrac{1}{2}\times 4^n=2^{2n-1}$

**استنتاج $u_n$ بدلالة $n$**

$v_n=\dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$ تكافئ $v_n\left(3-u_n^2\right)=u_n^2$ تكافئ $u_n=\sqrt{\dfrac{3v_n}{v_n+1}}$ ومنه $u_n=\sqrt{\dfrac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}+1}}$

**جـ) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**

لدينا : $\sqrt{\dfrac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}+1}}=\sqrt{\dfrac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}\left(1+\dfrac{1}{2^{2n-1}}\right)}}=\sqrt{\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{2^{2n-1}}}}$ ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{2n-1}}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\sqrt{3}$

**4 / حساب $p_n$ بدلالة $n$ :**

$$p_n=\frac{\left(u_0\times u_1\times..........\times u_n\right)^2}{\left(3-u_0^2\right)\left(3-u_1^2\right)\times........\left(3-u_n^2\right)}$$
$$=\frac{u_0^2}{3-u_0^2}\times\frac{u_1^2}{3-u_1^2}\times..........\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$$
$$=v_0\times v_1\times.............\times v_n$$
$$=v_0\times\left(v_0\times q\right)\times.............\times\left(v_0\times q^n\right)$$
$$=v_0^{n+1}\left(q\times q^2\times........\times q^n\right)$$
$$=v_0^{n+1}q^{1+2+....+n}=v_0^{n+1}q^{\frac{n(1+n)}{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times 4^{\frac{n(1+n)}{2}}=2^{-n-1}\times 2^{n^2+n}=2^{n^2-1}$$

## التمرين 9 :( منقول)

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $N$ كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$

1) احسب : $u_1$ و $u_2$ ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $2\leq u_n\leq 4$

2) بين أن $(u_n)$ متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4-u_{n+1}\leq\frac{4-u_n}{2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\leq 4-u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

## حل التمرين 9 : :( للأمانة منقول)

**$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $N$ كما يلي : $u_0=2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=5-\frac{4}{u_n}$**

**1) حساب :** $u_1=5-\frac{4}{2}=3$ و $u_2=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$

**البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $2\leq u_n\leq 4$**

لدينا $2\leq u_1\leq 4$ محققة

نفرض أن $2\leq u_n\leq 4$ و لنبرهن أن $2\leq u_{n+1}\leq 4$

$2\le u_n\le 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$ بالضرب في $-4$ نجد $-2\le-\frac{4}{u_n}\le-1$ بإضافة 5

نجد $3\le 5-\frac{4}{u_n}\le 4$ أي ان $2\le 3\le u_{n+1}\le 4$ و منه $2\le u_{n+1}\le 4$ إذن من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2\le u_n\le 4$.

**2) تبيين أن $(u_n)$ متزايدة :** نحسب الفرق

$u_{n+1}-u_n=5-\frac{4}{u_n}-u_n=\frac{5u_n-4-u_n^{2}}{u_n}=\frac{(4-u_n)(-1+u_n)}{u_n}$ الفرق موجب لان $2\le u_n\le 4$

فإن $4-u_n\ge 0$ و $-1+u_n\ge 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

**3) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $4-u_{n+1}\le\frac{4-u_n}{2}$**

لدينا $4-u_{n+1}=4-5+\frac{4}{u_n}=-1+\frac{4}{u_n}=\frac{-u_n+4}{u_n}=\frac{1}{u_n}(4-u_n)$ و بما ان $2\le u_n\le 4$

بالقلب نجد $\frac{1}{4}\le\frac{1}{u_n}\le\frac{1}{2}$ ، و منه $4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ .

**4) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0\le 4-u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$** مما سبق نجد أن

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)$ و منه $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-u_n)\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-1})\right]$ أي

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})$ و هاكذا $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^2}(4-u_{n-1})\le\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}(4-u_{n-2})\right]$ أي ان

$0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^3}(4-u_{n-2})$ .... إلى أن نصل إلى التعميم $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ و

منه $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(4-u_0)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^{n+1}}(2)$ اي ان $0\le 4-u_{n+1}\le\frac{1}{2^n}$

بتعويض نجد $0\le 4-u_{n'}\le\frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب.

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ بما أن $n'=n+1$ $0\le 4-u_n\le\frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$ فحسب الحصر نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

## التمرين 10 : :(للأمانة منقول)

لتكن $(u_n)$ متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$ .

1) عين العددين الحقيقيين $a$ ، $b$ حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+4}$. ثم برهن بالتراجع

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-2 < u_n < 1$ .

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ؛ ثم استنتج أن $(u_n)$ متقاربة

3) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي $n$: $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$ .

بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + ..... + \frac{5^n}{v_n}$

## حل التمرين 10 : :(للأمانة منقول)

لتكن $(u_n)$ متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$:

$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$ .

**1) تعيين العددين الحقيقيين $a$ ، $b$ حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي $n$ :**

$u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n+4}$ بالقسمة الاقليدية نجد $u_{n+1} = \frac{3u_n+12-10}{u_n+4} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$ و منه $a=3$ ،

$b=-10$

**البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-2 < u_n < 1$**

لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة

نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$

**الطريقة الأولى :**

نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$

$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n+4} = \frac{5u_n+12-10}{u_n+4} = \frac{5u_n+2}{u_n+4}$ موجبة لان $2+u_n > 0$ و منه $2+u_{n+1} > 0$.

نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$

$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n+4} - 1 = \frac{2u_n+8-10}{u_n+4} = \frac{2u_n-2}{u_n+4} = 2\left(\frac{u_n-1}{u_n+4}\right)$ عدد سالب لان لان $-2 < u_n < 1$ و منه

$u_{n+1} < 1$

و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي $n$ فإن $-2 < u_n < 1$

الطريقة الثانية :

لدينا الدالة المرفقة هي $f$ حيث $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x)=\frac{10}{(x+4)^2}$

و منه $f$ متزايدة على المجال $[-2;1]$ .

$-2<u_n<1$ و منه نجد $f(-2)<f(u_n)<f(1)$ كون أن $f$ متزايدة أي ان $-2<u_{n+1}<1$

و منه من أجل عدد طبيعي $n$ فإن $-2<u_n<1$

2) دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ :

$u_{n+1}-u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=-\frac{(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$ الفرق موجب لأن

$-2<u_n<1$ و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن $(u_n)$ متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة.

3) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ .

تبيين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+2}{1-u_{n+1}}=\frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2}{1-\frac{3u_n+2}{u_n+4}}=\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4-3u_n-2}=\frac{5u_n+10}{-2u_n+2}=\frac{5}{2}\left(\frac{u_n+2}{1-u_n}\right)=\frac{5}{2}v_n$$ و منه

المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0+2}{1-u_0}=\frac{\frac{1}{4}+2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{9}{3}=3$

كتابة $v_n$ و $u_n$ بدلالة $n$ : $v_n=3\left(\frac{5}{2}\right)^n$

لدينا $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$ أي ان $v_n-u_nv_n=u_n+2$ و منه $u_n+u_nv_n=v_n-2$ أي ان

$u_n(1+v_n)=v_n-2$ و منه $u_n=\frac{v_n-2}{1+v_n}=\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}$ .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n-2}{1+3\left(\frac{5}{2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}=1$

4) **حساب المجموع :** $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{5}{v_1}+\frac{5^2}{v_2}+.....+\frac{5^n}{v_n}$. بوضع $t_n=\frac{5^n}{v_n}=\frac{5^n}{3\left(\frac{5}{2}\right)^n}=\frac{2^n}{3}$ و منه $(t_n)$

متتالية هندسية أساسها $2$ و حدها الأول $t_0=\frac{1}{v_0}=\frac{1}{3}$ و منه

$$S_n=t_0+t_1+t_2+...t_n=t_0\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right)$$

## التمرين 11 : :(للأمانة منقول)( خاص بتقني و رياضي)

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=3u_n+4n-4$

1- هل المتتالية حسابية ؟ هندسية ؟ برر إجابتك .

2- لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بـ $\mathbb{N}$ : $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

عين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ لكي تكون المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول أحسب في هذه الحالة بدلالة $n$ المجموع $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$ .

3- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على 13

ثم أستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $S_{2016}$ على 13 .

عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2014^{1435}+2015^{1436}+2016^{1437}+2018^{1438}$ على 13 .

## حل التمرين 11 :(للأمانة منقول)

لتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=3u_n+4n-4$

1) المتتالية ليست حسابية لأن $u_{n+1}-u_n=2u_n+4n-4$ متعلقة بالعدد الطبيعي $n$ و

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=3+\frac{4n-4}{u_n}$ متعلقة بالعدد الطبيعي $n$ ليست هندسية .

2) لتكن المتتالية $(v_n)$ المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بـ $\mathbb{N}$ $v_n=u_n+\alpha n+\beta$

تعين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ لكي تكون المتتالية $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول : لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta$ أي ان

$v_{n+1}=3u_n+4n-4+\alpha n+\alpha+\beta$ و منه $v_{n+1}=3\left[u_n+\frac{(\alpha+4)}{3}n+\frac{\alpha+\beta-4}{3}\right]$ تكون

$(v_n)$ متتالية هندسية يعني أن $\alpha=\frac{\alpha+4}{3}$ و $\beta=\frac{\alpha+\beta-4}{3}$ و منه $\alpha=2$ و $\beta=-1$

تكون $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0=u_0+2(0)-1=1$

حساب في هذه الحالة بدلالة $n$ المجموع $S_n$ لدينا $v_n = u_n + 2n - 1$ ومنه
$u_n = -2n + 1 + v_n$ ومنه $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... u_n$ أي

$$S_n = [-2(0) + 1 + v_0] + [-2(1) + 1 + v_1] + [-2(2) + 1 + v_2] + .. + [-2n + 1 + v_n]$$

$$S_n = [1 - 1 - 3 - ... - 2n + 1] + [v_0 + v_1 + ... + v_n] = \frac{n+1}{2}(-2n+2) + \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$

$$S_n = (-n^2 + 1) - \frac{(1-3^{n+1})}{2} .$$

3) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على 13 حسب قيم العدد الطبيعي $n$

$3^0 \equiv 1[13]$ و $3^1 \equiv 3[13]$ و $3^2 \equiv 9[13]$ و $3^3 \equiv 1[13]$ ومنه بواقي القسمة الإقليدية للعدد $3^n$ على 13 تشكل متتالية دورية ودورها 3 ومنه

لما $n = 3k$ باقي قسمة العدد $3^n$ على 13 هو 1

ولما $n = 3k+1$ باقي قسمة العدد $3^n$ على 13 هو 3

ولما $n = 3k+2$ باقي قسمة العدد $3^n$ على 13 هو 9 .

استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $S_{2016}$ على 13 لدينا $S_{2016} = -2016^2 + 1 - \frac{(1-3^{2017})}{2}$ .......(1)

و $2016 \equiv 1[13]$ و منه $2016^2 \equiv 1[13]$ أي $-2016^2 + 1 \equiv 0[13]$ .....(2)

و $2017 \equiv 1 + 3 \times 672$ وهو من الشكل $n = 3k+1$ ومنه $3^{2017} \equiv 3[13]$ ومنه $1 - 3^{2017} \equiv -2[13]$ بما أن 2 و 13 أوليان فيما بينهما نجد $\frac{1-3^{2017}}{2} \equiv -1[13]$ ......(3)

بالتعويض (3) و (2) في (1) نجد $S_{2016} \equiv 1[13]$ وهو المطلوب.

4) تعين باقي القسمة الاقليدية للعدد $2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438}$ على 13

لدينا $2015 \equiv 0[13]$ . و $2014 \equiv -1[13]$ ومنه $2015^{1436} \equiv 0[13]$ و $2014^{1435} \equiv -1[13]$

و $2016 \equiv 1[13]$ ومنه $2016^{1437} \equiv 1[13]$ و $2018 \equiv 3[13]$ ومنه $2018^{1438} \equiv 3^{1438}[13]$ و

$1438 = 3 \times 479 + 1$ هو من الشكل $n = 3k+1$ ومنه $2018^{1438} \equiv 3[13]$ إذن $2018^{1438} \equiv 3[13]$ و

$2014^{1435} \equiv -1[13]$ و $2015^{1436} \equiv 0[13]$ و $2016^{1437} \equiv 1[13]$ بالجمع نجد

$2014^{1435} + 2015^{1436} + 2016^{1437} + 2018^{1438} \equiv 3[13]$ ومنه الباقي هو 3 .

## التمرين 12 : :(للأمانة منقول)( خاص بتقني ورياضي)

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n$ : بـــــ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ و

$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n = 2^{n+1} + 1$ هل العددان $u_n$ و $u_{n+1}$ أوليان فيما بينهما ؟

2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي $n$ بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 5

ثم أستنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2017^{1438}$ على 5

3) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2u_n - v_n = 5$ ثم أستنتج عبارة $v_n$ بدلالة $n$ .

4) عين القيم الممكنة للعدد الطبيعي $PGCD(u_n ; v_n)$

ثم أستنتج قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها $PGCD(u_n ; v_n) = 5$

## حل التمرين 12 : :(للأمانة منقول)

$(u_n)$ و $(v_n)$ متتاليتان عدديتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي $n$ : بـــــ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3 \end{cases}$

**1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n = 2^{n+1} + 1$**

لدينا $u_0 = 2^1 + 1 = 3$ و منه محققة

نفرض أن $u_n = 2^{n+1} + 1$ ولنبرهن أن $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$

لدينا $u_{n+1} = 2u_n - 1$ و $u_n = 2^{n+1} + 1$ نعوض فنجد $u_{n+1} = 2(2^{n+1} + 1) - 1 = 2^{n+2} + 1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $u_n = 2^{n+1} + 1$ .

تبين إن كان العددان $u_n$ و $u_{n+1}$ أوليان فيما بينهما لدينا $u_{n+1} = 2u_n - 1$ هذا يعني أن $-u_{n+1} + 2u_n = 1$ فحسب نظرية بيزو العددان $u_n$ و $u_{n+1}$ أوليان فيما بينهما .

**2) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد $2^n$ على 5 حسب قيم العدد الطبيعي**

لدينا $2^0 \equiv 1[5]$ و $2^1 \equiv 2[5]$ و $2^2 \equiv 4[5]$ و $2^3 \equiv 3[5]$ و $2^4 \equiv 1[5]$ و منه برفع الأخيرة إلى قوى $k$ نجد $2^{4k} \equiv 1[5]$ و بالضرب في 2 نجد $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ و بالضرب في 2 نجد $2^{4k+2} \equiv 4[5]$ و بالضرب في 2 نجد $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ و منه

باقي قسمة $2^n$ على 5

لما $n = 4k$ هو 1 ولما $n = 4k+1$ هو 2 ولما $n = 4k+2$ هو 4 ولما $n = 4k+3$ هو 3 .

أستنتاج باقي القسمة الأقليدية للعدد $2017^{1438}$ على 5 لدينا $1438 = 4 \times 359 + 2$ وهي من الشكل $n = 4k + 2$ و منه باقي قسمة $2017^{1438}$ على 5 هو 4.

**3) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2u_n - v_n = 5$** لدينا

$2u_0 - v_0 = 2(3) - (1) = 5$ محققة.

نفرض أن $2u_n - v_n = 5$ ولنبرهن أن $2u_{n+1} - v_{n+1} = 5$

$2u_{n+1} - v_{n+1} = 2[2u_n - 1] - [2v_n + 3] = 4u_n - 2v_n - 5 = 2(2u_n - v_n) - 5 = 10 - 5 = 5$ و منه

$2u_{n+1} - v_{n+1} = 5$ إذن من اجل كل عدد طبيعي $n$ فإن $2u_n - v_n = 5$ .

استنتاج عبارة $v_n$ بدلالة $n$ من ما سبق نجد $v_n = 2u_n - 5 = 2[2^{n+1} + 1] - 5$ أي $v_n = 2^{n+2} - 3$ .

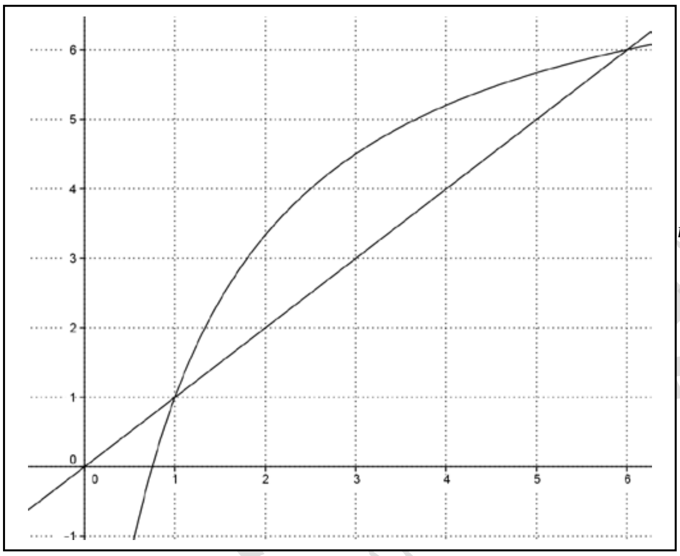
4) **تعين القيم الممكنة للعدد الطبيعي** $PGCD(u_n;v_n)$ لدينا $2u_n - v_n = 5$ ومنه $PGCD(u_n;v_n)$ هو قاسم للعدد 5 أي ان القيم الممكنة للعدد $PGCD(u_n;v_n)$ هي 1 او 5 .

**استنتاج قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها** $PGCD(u_n;v_n)=5$

$u_n \equiv 0[5]\ ;\ v_n \equiv 0[5]$ أي أن $2^{n+1}+1 \equiv 0[5]\ ;\ 2^{n+2}-3 \equiv 0[5]$ يعني أن $2^{n+1} \equiv -1[5]\ ;\ 2^{n+2} \equiv 3[5]$ أي $2^{n+1} \equiv 4[5]\ ;\ 2^{n+2} \equiv 3[5]$ ولدينا $2^{n+1} \equiv 4[5]$ يعني مما سبق نجد أن $n+1 = 4k+2\ :\ k \in \mathbb{N}$ أي $n = 4k+1\ :\ k \in \mathbb{N}$ بالتعويض في $2^{n+2} \equiv 3[5]$ نجد $2^{4k+3} \equiv 3[5]$ وهذه محققة ومنه من اجل كل عدد طبيعي $n$ يكتب على الشكل $n = 4k+1$ و $k$ عدد طبيعي .

## التمرين 13 : :(للأمانة منقول)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على بـ : المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{8x-6}{x+1}$ و$(C)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ كما هو في الشكل المقابل



1) بين ان الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

2) $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$

أ- باستعمال المنحني $(C)$ و $(\Delta)$ مثل الحدود الاربعة الاولى للمتتالية $(u_n)$ على حامل محور الفواصل(دون حسابها) موضحا خطوط الانشاء

ب- اعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها

3) أ- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 < u_n < 6$

ب-ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ ثم استنتج انها متقاربة

4) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$

أ- برهن أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- أكتب $v_n$ بدلالة $n$ و $U_n$ بدلالة $n$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

جـ احسب بدلالة $n$ المجموع : $S_n = \frac{2}{v_0} + \frac{2}{v_1} + \ldots + \frac{2}{v_n}$

## حل التمرين 13 : :(للأمانة منقول)

1) من اجل $x \in [0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{14}{(x+1)^2}$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

أـ تمثيل الحدود موجود

بـ نلاحظ من التمثيل البياني ان $(u_n)$ متزايدة وتتقارب نحو العدد 6

2) أ –لدينا $1 < u_n < 6$ و ومنه $f$ متزايدة على $[0;+\infty[$

ومنه : $f(1) < f(u_n) < f(6)$

أي: $1 < u_{n+1} < 6$

بـ $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n{}^2 + 7u_n - 6}{u_n + 1}$

من اجل : $1 < u_n < 6$ لدينا $u_{n+1} - u_n \succ 0$

المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بماان $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة نحوعدد حقيقي $l$.

4) أ) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_{n+1} - 1} = \frac{2u_n - 12}{7u_n - 7} = \frac{2}{7} v_n$

$(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{7}$ وحدها الأول $v_0 = -4$

بـ $\boxed{v_n = -4\left(\frac{2}{7}\right)^n}$ و $\boxed{u_n = \frac{v_n - 6}{v_n - 1} = \frac{4\left(\frac{2}{7}\right)^n + 6}{4\left(\frac{2}{7}\right)^n + 1}}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 6$

ج) حساب المجموع: $\frac{2}{v_n} = \frac{-1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^n$ وهي عبارة حد عام متتالية هندسية أساسها $q = \frac{7}{2}$ وحدها الأول $\frac{-1}{2}$

$$s_n = \frac{-1}{5}\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$$

# انتهى بالتوفيق جميعا

## تحيات : بلفاطمي محمد سفيان