

سلسلة تعاريف الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا

من 2008 إلى 2018 [شعبة علوم تجريبية]

جمع و إعداد الأستاذ : مجاهشة خالر

السنة الدراسية : 2019/2018

التمرين الأول [باك 2009] [م1] (7ن)

(I) دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

و استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم أنجز جدول تغيراتها .

(3) أحسب $h(0)$ و استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة بيانيا .

ب- باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

ج- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

(4) أرسم (C_f) .

(5) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين $y = x - 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

التمرين الثاني [باك 2010] [م1] (10ن)

(I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ بـ : $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عين فاصلة النقطة من $(\mathcal{C}_f)$ التي تكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = x$.

(4) أ- أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = \ln(x+a) + b$ حيث a ، b عددين حقيقيين يطلب تعيينهما .

ب- استنتج أنه يمكن رسم $(\mathcal{C}_f)$ انطلاقا من $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبييرية $\ln$ ثم أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

(II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = -\infty$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ- أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$ حلا وحيدا α . تحقق أن $2 < \alpha < 3$.

ب- أرسم $(\mathcal{C}_g)$ منحنى الدالة g على المجال $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ في المعلم السابق .

(4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (d) .

(5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]\alpha; 1]$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]\alpha; 1]$.

(III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي : $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$.

(1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$.

(2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين الثالث [باك 2011] [م1] (ن7)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و $(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الشكل المقابل) ،

بقراءة بيانية :

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب- حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$.

ج- عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]\alpha; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

ب- أحسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- باستعمال الجزء (I) السؤال ج ، عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ب- α عدد حقيقي . بين أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha; +\infty[$.

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ، ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]\alpha; +\infty[$.

التمرين الرابع [باك 2012] [م2] (ن7)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 0]$ كما يلي : $f(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0]$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x(x-1)}$.

إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

- (3) أ- بين المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x + 5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.
 ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $-3.5 < \alpha < -3.4$ و $-1.1 < \beta < -1$.
 (5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .
- (6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1; 3 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2; \frac{5}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.
 بين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) .
 ب- بين أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثياتها .
- (7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty; 0[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
 بين أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0[$.

التمرين الخامس [باك 2013] [م2] (7 ن)

- (I) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.
 (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 (2) استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.
- (II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$.
 و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)
 (1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$. فسر النتيجة بيانياً .
 ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أ- بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.
 ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 ج- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.
- (3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
 ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .
- (4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .
 أ- أحسب x_0 .
 ب- أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .
 ج- عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متميزين .

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أـ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسياً.

بـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

بـ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلاً وحيداً α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.

(3) أنشئ (T) و (C_f) .

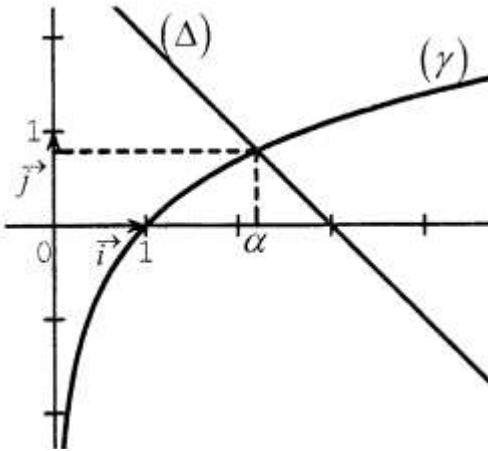
(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

بـ أنشئ المنحنى (C_h) اعتماداً على المنحنى (C_f) .

جـ ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.



المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(I) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$

هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

(1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $]0; +\infty[$.

(2) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(3) تحقق أن: $2, 2 < \alpha < 2, 3$.

(II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(2) أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثم إستنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم أنشئ (C_f) على المجال $]0; e^2]$.

(III) F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق: $F(1) = -3$.

(1) بين أن منحنى الدالة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

(2) بين أن $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ، ثم إستنتج عبارة الدالة F .

(I) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$. (العدد e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $-0,34 < \alpha < -0,33$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x على المجال $]-1; +\infty[$.

(II) الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أـ بين أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسيا.

بـ بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$ ،

جـ أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

دـ أرسم المنحنى (C_f). (نقبل أن : $f(\alpha) = 3,16$)

(2) أـ بين أن الدالة $x \mapsto \frac{-1}{x+1} [1 + \ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1; +\infty[$.

بـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=1$.

(3) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على $]-1; 1[$ بـ : $k(x) = f(-|x|)$ ، (C_k) تمثيلها لبياني في المعلم السابق.

أـ بين أن الدالة k زوجية .

بـ بين كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أرسمه . (دون دراسة تغيرات الدالة k)

جـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $k(x) = m$.

نعتبر الدالة f المعرفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

($\mathcal{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

(1) بين أن الدالة f فردية ثم فسر ذلك بيانيا .

(2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

استنتج أن ($\mathcal{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الترتيب .

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

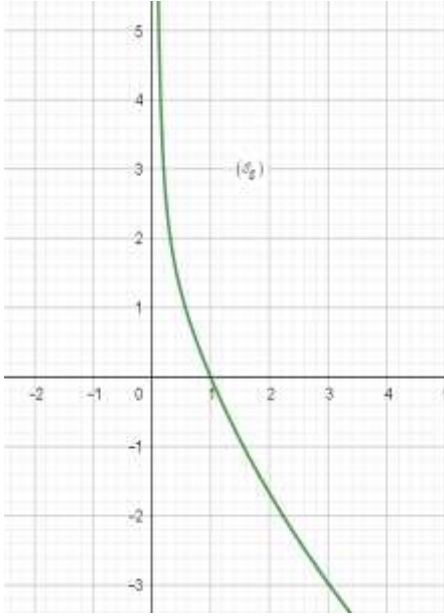
(5) أـ بين المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathcal{C}_f$) ثم أدرس وضعية المنحنى ($\mathcal{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(6) أنشئ المنحنى ($\mathcal{C}_f$) والمستقيم (Δ) .

(7) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

(I) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$:

($\mathcal{C}_g$) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبين في الشكل المقابل :



ـ أحسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيا إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x}$$

و ($\mathcal{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

ثم فسّر النتيجة بيانيا.

(2) أـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x \ln x)^2}$ ،

بـ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن $y = \left(\frac{e^2}{e-1} \right)x - \frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى ($\mathcal{C}_f$) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل ، ثم أرسم

المماس (T) والمنحنى ($\mathcal{C}_f$) .

(4) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلين متميزين .

(III) n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوى المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى ($\mathcal{C}_f$) والمستقيمين اللذين

معادلتهما $x = n$ و $x = 1$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n \ln n)$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (I_n) .