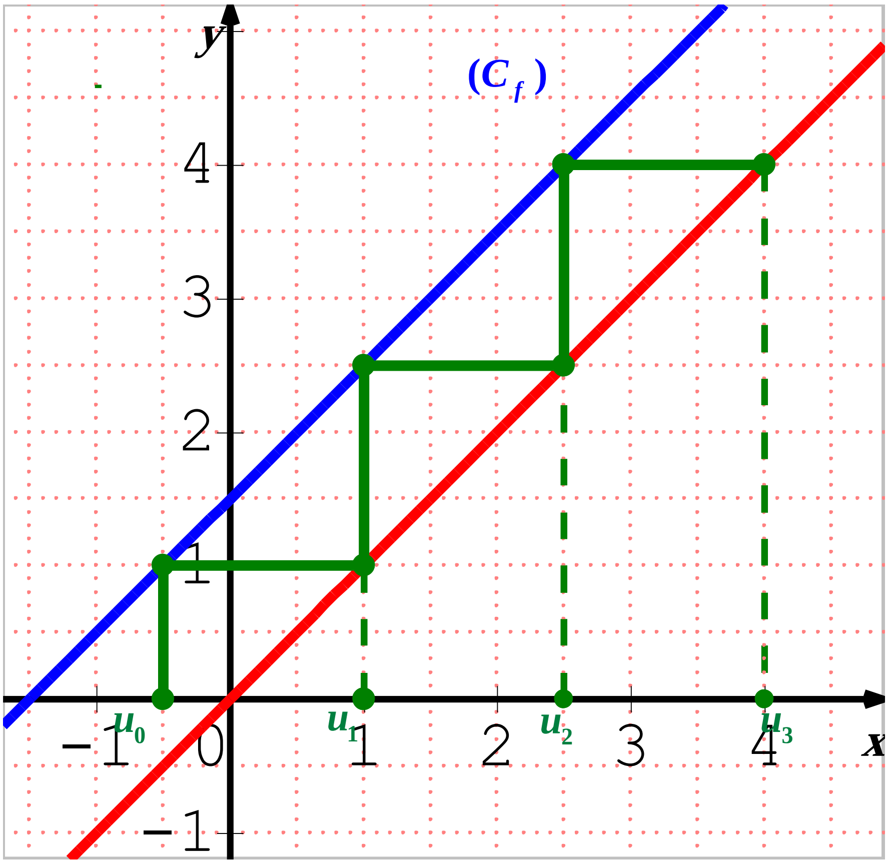
مجلة الرائد في الرياضيات

****

تمارين المتتاليات في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات



BAC2018-2019

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

مجلة الرائد في الرياضيات

****

تمارين المتتاليات في البكالوريا بين يديك

الشعب

علوم تجريبية+تقني رياضي+رياضيات

الجزء الاول

بكالوريات النظام الجديد

العلوم التجريبية+تقني رياضي +رياضيات

1)المواضيع ، 2)الحلول(المجلة المرفقة)

الجزء الثاني

بكالوريات النظام القديم

علوم الطبيعة والحياة+علوم دقيقة

الجزء الثالث

بكالوريات اجنبية

BAC2018-2019

إعداد الأستاذ: بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

العربي الجزائري Facebook

الجزء الأول: بكاوريات جزائرية

شعبة العلوم التجريبية

التمرين01: دورة 2018 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=1-\frac{9}{u_n+5}$.

1- أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>-2$.

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج انها متقاربة .

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرّر انها متقاربة.

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

اثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعين حدّها الأول

3) عبر بدلالة n عن v_n و u_n و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

4) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0.v_0+u_1.v_1+.....+u_n.v_n=\frac{1}{3}(1-n^2)$

التمرين02: دورة 2018 الموضوع (2)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الاول $u_0=1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n+\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{2n+3}{2n+1}>1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=2n+1$

أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $e^{u_n}=v_n$.

ب) استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n، ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

4) احسب المجموعين S_n و T_n حيث:

$$S_n=\ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)+.........+\ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right) \text{ و } T=e^{u_{1439}}+e^{u_{1440}}+...+e^{u_{2018}}$$

التمرين03: دورة 2017 الموضوع (1)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي:

$u_0=\frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3-\frac{10}{u_n+4}$ و $v_n=\frac{u_n+2}{1-u_n}$

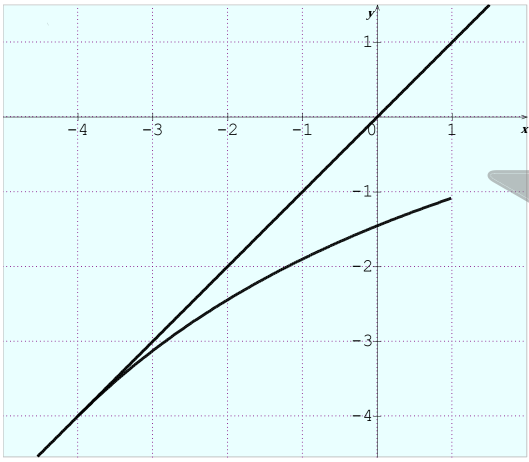
1-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $0\prec u_n\prec 1$.

ب-بين ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2-أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ ثم عبر عن حدها العام v_n بدلالة n.

ب-أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n:

$u_n=1-\frac{3}{v_n+1}$، ثم أستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.



التمرين04: دورة 2017الموضوع (2)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الدالةf المعرفة على $[-4;1]$ بـ: $f(x)=\frac{3x-16}{x+11}$ و (C_f)

المنحنى الممثل لها،(Δ) المستقيم ذو المعادلة : $y=x$

I-تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على $[-4;1]$ ثم بيّن أنه من أجل كل $x\in[-4;1]$ فإن $f(x)\in[-4;1]$

II-(u_n)المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1)انقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ، u_1، u_2 و u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية(u_n) وتقاربها.

2)برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n:$-4<u_n\le 0$ ثم بين أن المتتالية (u_n)متناقصة تماما

3-لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي : $v_n\times u_n=1-4v_n$

أثبت أن المتتالية (v_n)حسابية أساسها $\frac{1}{7}$، ثم أحسب المجموع S حيث:

$$S=v_0\times u_0+v_1\times u_1+......+v_{2016}\times u_{2016}$$

التمرين05: دورة 2017الموضوع (1) الاستدراكية

نعتبر المتتاليتان(u_n) و (v_n) المعرفتين على مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ كمايلي:

$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+1\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=6\\ v_{n+1}=\frac{3}{4}v_n+1\end{cases}$

1- احسب الحدين u_1 و v_1.

2-أ)اكتب $u_{n+2}-u_{n+1}$ بدلالة $u_{n+1}-u_n$.

ب)باستعمال البرهان بالتراجع برهن أن المتتالية (u_n)متزايدة تماما والمتتالية (v_n) متناقصة تماما.

3-نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = u_n - v_n$.

برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الاول w_0 ثم عبر عن w_n بدلالة n.

4-بيّن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين06: دورة 2017الموضوع (2) الاستدراكية

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كمايلي: $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x$

α عدد حقيقي موجب، (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـحدّها الأول: u_0 حيث $u_0 = \alpha$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

I-عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة

II-نضع في كل مايلي: $\alpha = 5$.

1-أ)انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حساب الحدود)

ب)ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها

2-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ-برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$، يطلب تعيين حدّها الأول

ب-عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3-أحسب بدلالة n المجموع $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots\dots v_{n+2016}$ ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n

حيث : $S'_n = \dfrac{1}{u_n+1} + \dfrac{1}{u_{n+1}+1} + \dots\dots + \dfrac{1}{u_{n+2016}+1}$

التمرين07: دورة 2016الموضوع (1)

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \sqrt{2x+8}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ، ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2)عيّن احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له.

3) ارسم (C) و (Δ).

II) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1)مثّل في المعلم السابق على محور الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 (دون حسابها).موضحا خطوط الإنشاء

2) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

3-أ)برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \prec 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ج)بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4-u_n)$.

ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_n \le \frac{1}{2^n}(4-u_0)$، استنتج $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين08: دورة 2016الموضوع (2)

I) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{5x}{x+2}$

1) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.   ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) \ge 0$

II) (u_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـحدّها الاول$u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{5u_n}{u_n+2}$

1-أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 3$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة

2-(v_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=1-\frac{3}{u}$

أ) بيّن أنّ(v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ يطلب تعين حدّها الأول v_0.

ب)اكتب بدلالة n عبارة v_n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n).

3) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$

التمرين09: دورة 2016الاستدراكيةالموضوع (1)

نعتبر الدالة العدديةf المعرفة على المجال $I=[0;4]$ كمايلي: $f(x)=\frac{13x}{9x+13}$

1-أ) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I: $f(x)$ينتمي للمجال I.

2(u_n) المتتالية العدديةالمعرفة على $\mathbb{N}$ بـحدّها الاول$u_0=4$ و$u_{n+1}=f(u_n)$من أجل كل عدد طبيعي n

أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 4$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، ثم استنتج انها متقاربة.

3-بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \neq 0$.

4-لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = 2 + \frac{13}{u_n}$

أ)برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعين أساسها و حدّها الأول v_0.

ب)اكتب v_n بدلالة n.

جـ)أستنتج أن : $u_n = \frac{52}{36n+13}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

التمرين10: دورة 2016الاستدراكية الموضوع (2)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـحدّها الاول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :بـ $u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3}$

والتكن المتتالية (v_n) المعرفة ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1- بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q يطلب تعين حدّها الأول v_0.

2-أ)عبّر بدلالة n عن عبارة v_n.

ب)استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n. جـ) احسب $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

3-أ)أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

ب)تحقق أن: $\frac{1}{3}(1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2}$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n

جـ)أستنتج بدلالة n المجموع: $S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + ... + \frac{1}{u_n + 2}$.

التمرين11: دورة 2015الموضوع (1)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3.

2) اثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(1 + u_n) \succ 0$.

3) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة . هل هي متقاربة ؟ علّل.

4)نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 3(1 + u_n)$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدّها الأول.

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

جـ) بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\ln v_0 + \ln v_1 + ... + \ln v_n = (n+1)(-n + 2 + \ln 3)$

التمرين 12: دورة 2015 الموضوع (2)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x+1}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$.

3) مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$.

II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي: $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}$

1-أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3، v_0، v_1، v_2 و v_3 دون حسابها.

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتن (u_n) و (v_n).

2-أ) اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2\le u_n \prec \alpha$ و $\alpha \prec v_n \le 5$ حيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير كل من المتتاليتن (u_n) و (v_n).

3-أ) اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{1}{3}(v_n-u_n)$

ب) بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0\prec(v_n-u_n)\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

جـ) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(v_n-u_n)$ ، ثمّ حدّد نهاية كل من (u_n) و (v_n).

التمرين 13: دورة 2014 الموضوع (1)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{4}{3}$.

و (v_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: و من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+4$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

2) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

4) احسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $w_n=5\left(\dfrac{1}{v_n+5}-1\right)$.

أ- بيّن أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n-w_n)$.

التمرين 14: دورة 2014 الموضوع (2)

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$ و e أساس اللوغاريتم النيبري

1) بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول. 2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} u_n$.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

II) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = \ln(u_n)$ حيث $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبري

1) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم أستنتج نوع المتتالية (v_n).

2-أ) احسب بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times ..... \times u_n)$.

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n \succ 0$.

التمرين 15: دورة 2013 الموضوع (1)

I) المتتالية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$.

1) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول . 2) احسب $\lim_{x\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$.

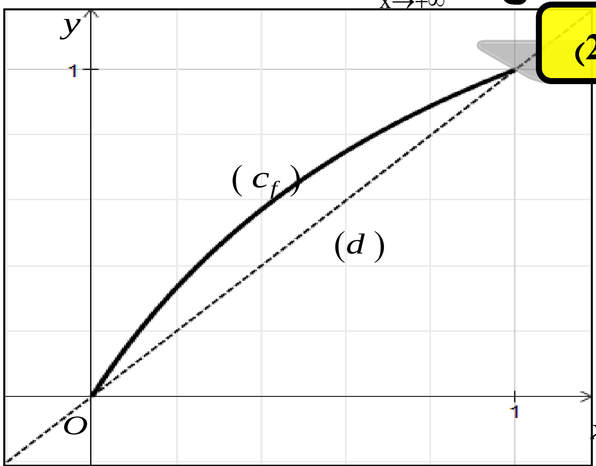
1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 \le u_n \le 6$

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) أ) برهن أنه ،من أجل كل عدد طبيعي n، $6 - u_{n+1} \le \frac{5}{6}(6 - u_n)$

ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le (6-u_n) \le v_n$ استنتج $\lim_{x\to+\infty} u_n$

التمرين 16: دورة 2013 الموضوع (2)



في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f

المعرّفة على المجال $[0;1]$ بالعلاقة $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$

و من أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) اعد رسم هذا الشكل في ورقة الاجابة .

ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ) أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 1$. ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n}$

أ) برهن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول v_0.

ب) أحسب نهاية (u_n).

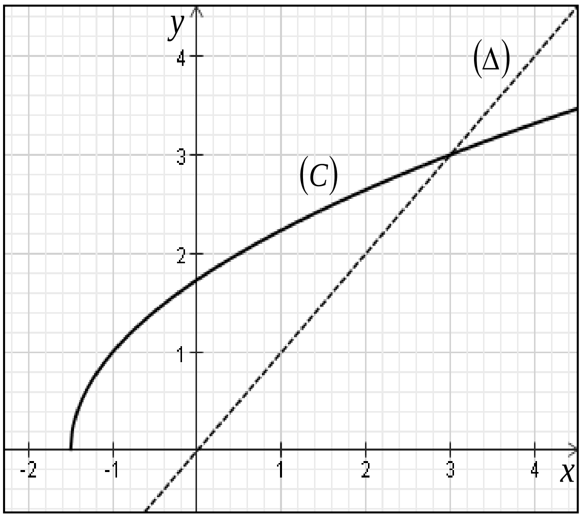
التمرين 17: دورة 2012 الموضوع (1)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3}$

1) لتكن h الدالة المعرفة على $\left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x)=\sqrt{2x+3}$ و (C) تمثيلها البياني

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي

المنسوب معلم متعامد ومتجانس (انظر الشكل المقابل)



أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل

u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec u_n\prec 3$

3) أ) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين 18: دورة 2012 الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدّها الأول $u_0=\dfrac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $3\prec u_n\prec 4$

2) بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$ ، استنتج أن (u_n) متزايدة تماما

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، احسب حدّها الأول

ب) اكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

جـ) نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times ..... \times (u_n - 3)$

اكتب P_n بدلالة n، ثم بيّن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n = \frac{1}{16}$.

التمرين 19: دورة 2011 الموضوع (1)

(u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n + 1$

(v_n) متتالية معرّفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات توجد إجابة واحدة منها فقط صحيحة، حددّها مع التعليل.

1. المتتالية (v_n): أ- حسابية ، ب- هندسية ، جـ- لا حسابية ولا هندسية
2. نهاية المتتالية (u_n) هي: أ- $+\infty$ ، ب- $-\frac{1}{2}$ ، جـ- $-\infty$
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3}\right]$

أ- $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ ، ب- $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$ ، جـ- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

التمرين 20: دورة 2011 الموضوع (2)

α عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1.

(u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$

(v_n) متتالية معرّفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$

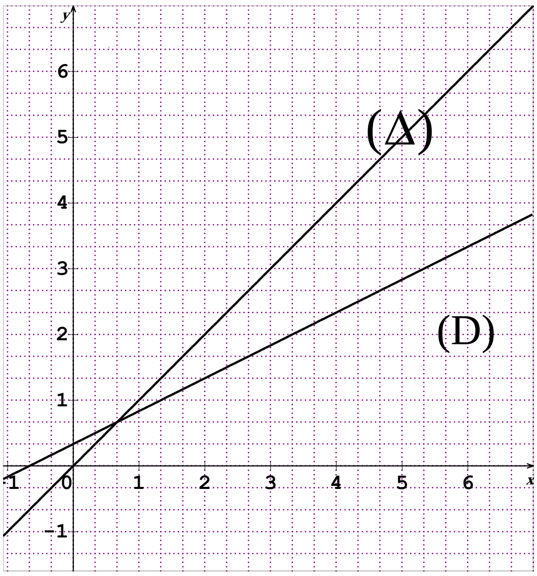
1. أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب- أكتب بدلالة n و α عبارة v_n واستنتج بدلالة n و α عبارة u_n

جـ- عيّن قيّم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها (u_n) متقاربة

2. نضع: $\alpha = \frac{3}{2}$. أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين21: دورة 2010الموضوع (2)



في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مثلنا

المستقيمين $(\Delta): y = x$ و $(D): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_0 = 6$ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية

u_0، u_1، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين(Δ) و(D) .

جـ) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2)أ-باستعمال البرهان بالتراجع ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \succ \frac{2}{3}$.

ب-استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبرالمتتالية (v_n)المعرّفة على $\mathbb{N}$بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ-بين أن(v_n)متتالية هندسية يطلب تحديدأساسهاوحدّها الأول

ب-اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_nواستنتج u_nبدلالة n

جـ-احسب المجموع S_nحيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

واستنتج المجموع S'_nحيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

التمرين22: دورة 2009الموضوع (1)

(u_n)متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و$u_0 = 1$

المتتالية (v_n)المعرّفة على $\mathbb{N}$بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1)أحسب v_0 و v_1. 2)برهن ان(v_n)متتالية هندسية يطلب تعين أساسها.

3 أ)احسب بدلالة nالمجموعS_nحيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+1$.

جـ) بيّن أن (u_n) متقاربة.

التمرين23: دورة 2009الموضوع (2)

(u_n)متتالية هندسية متزايدة تماما حدّها الأول u_1وأساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1.u_2.u_3 = 216 \end{cases}$

1.أ)احسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول
ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
جـ) أحسب المجموع $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n .
ثم عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$.

2.(v_n)متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$بـ: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$. أ) أحسب v_2 و v_3.
ب)نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$. بين أن ان$(w_n)$متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.
جـ) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n.

التمرين24: دورة 2008الموضوع (1)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [1, 2]$ بـ: $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$.
أ- بيّن أن الدالة f متزايدة تماما على I.
ب-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I، $f(x)$ ينتمي إلى I
2)(u_n)متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: u_n ينتمي إلى I.
ب-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.
3)أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$.
ب-عين النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

التمرين25: دورة 2008الموضوع (2)

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2$ و $u_0 = \frac{5}{2}$
1-أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$.
ب-باستعمال الرسم السابق ،مثل على محور الفواصل دون حساب الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4
جـ- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها.
2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \le 6$.
ب-تحقق أن (u_n) متزايدة ، هل (u_n)متقاربة ؟ برر اجابتك.

3)نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 6$

-اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدّها الأول

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين26: دورة 2018 الموضوع1

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{ex+1}$ (e أساس اللوغاريتم النيبري)

و(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0=\dfrac{5}{4e}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

1- أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>\dfrac{1}{e}$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{e.u_n(\frac{1}{e}-u_n)}{e.u_n+1}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبرّر انها متقاربة.

2- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\dfrac{e.u_n}{e.u_n-1}$

بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعين حدّها الأول v_0 عبارة v_n بدلالة n.

3- أ) تحقق أنه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$: $v_n=1+\dfrac{1}{e.u_n-1}$ واستنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+...+v_n$.

4- أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين27: دورة 2018 الموضوع2

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها العام $u_n=2(3)^n$ و (v_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الاول $v_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}=5v_n+u_n$

1) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n=\dfrac{v_n}{u_n}+\dfrac{1}{2}$.

أثبت أن (w_n) متتالية عددية هندسية أساسها $\dfrac{5}{3}$، يطلب تعيين حدّها الأول.

2) أكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n، ثم أستنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=5^{n+1}-3^n$

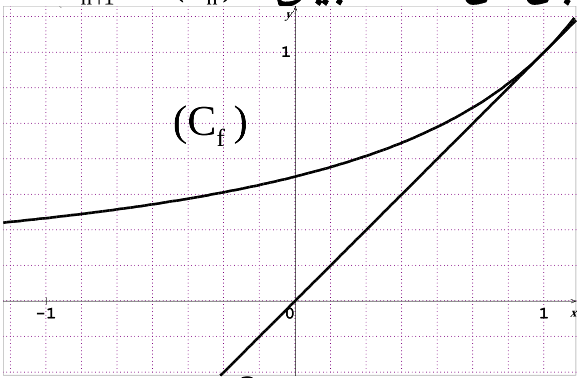
3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعددين 3^n و 5^n على 8

4) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بوقي القسمة الاقليدية للعدد v_n على 8.

التمرين28: دورة 2017الموضوع (1)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2-x}$ و(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ و اليكن (Δ) المستقيم ذا المعادلة: $y=x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.



1- أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0 ،u_1 ،u_2 وu_3 مبرزا خطوط التمثيل

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) وتقاربها.

2-برهن بالتراجع انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \prec 1$.

3-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أستنتج أنها متقاربة.

4- نعتبرالمتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{2}{1-u_n}$

أ-أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها 2، ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

ب- استنتج عبارة الحد العام u_n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين29: دورة 2017الموضوع (2) الاستدراكية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1=\frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1}=\frac{n+1}{\alpha n}u_n$

حيث α عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2.

1-أ) بيّن أن: ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n \succ 0$

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

2-نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $v_n=\frac{1}{\alpha n}u_n$

أ)بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وعيّن حدّها الأول v_1 بدلالة α.

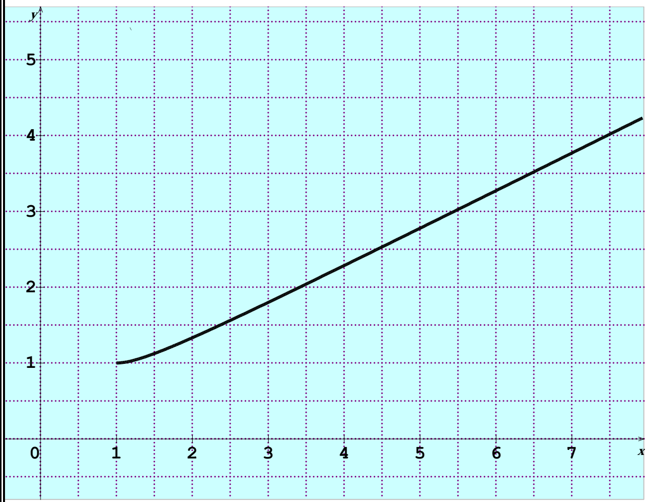
ب) جد بدلالة n و α عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3-احسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث $S_n=u_1+\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{3}u_3+.....+\frac{1}{n}u_n$

عيّن قيمة α حيث : $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{1}{2016}$.

التمرين30: دورة 2016الموضوع (2)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الشكل المقابل).



1)بيّن أن الدالة fمتزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

2)لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_0=6$ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- أنقل المنحنى المقابل ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء.

ب-أعط تخمينا حول اتجاه تغيرالمتتالية (u_n) وتقاربها

جـ-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le 6$.

د-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

هـ-برّر تقارب المتتالية (u_n).

3-نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n)المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$.

أ- برهن أن (w_n)متتالية هندسية أساسها2،يطلب تعيين حدّها الأول.

ب-أكتب w_n بدلالة n، ثم v_n بدلالة n.

جـ-بيّن أن $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4-أحسب بدلالة nالمجموع التالي: $S_n=\frac{1}{w_0}+\frac{1}{w_1}+.....+\frac{1}{w_n}$.

التمرين31:دورة 2015الموضوع (2)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بحدها الأول : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعيn: $u_{n+1}=\sqrt{6u_n+16}$

1) h الدالة المعرفة على $\left]-\frac{8}{3}+\infty\right[$ بما يلي: $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب معلم متعامد ومتجانس و(Δ)المستقيم ذوالمعادلة $y=x$ (أنظر الشكل)

أ)أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل u_0، u_1، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)

ب)ضع تخمينا حول اتجاه تغيير (u_n) وتقاربها.

2)أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \prec 8$.

ب)بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$

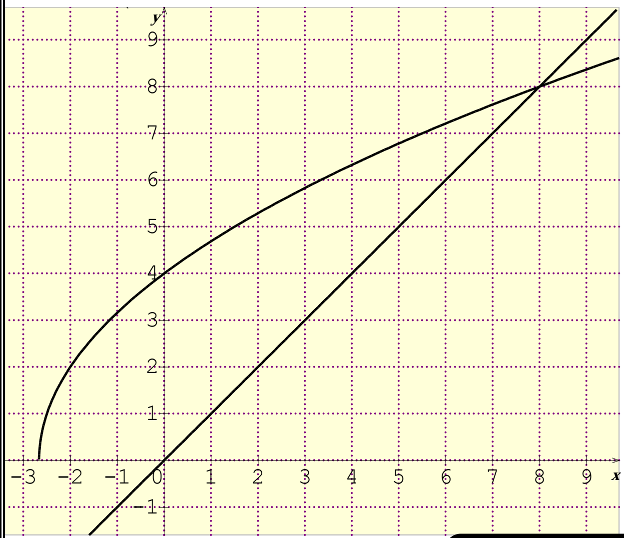
ج)استنتج اتجاه تغير (u_n).

3)أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$0 \prec 8 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(8-u_n)$$

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$0 \prec 8 - u_n \le 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$، ثماستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.



التمرين32:دورة 2014الموضوع (1)

n و p عددان طبيعيان.

1)أدرس،حسب قيم n،بواقي القسمة الإقليدية على 16للعدد 5^n

2)نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$.

أ) بين أن إذا كان $p = 4k+2$ حيثk عدد طبيعي فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق: $C_n = D_p$.

ب)عيّن n من أجل $p = 6$.

3) f هي دالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=5^{(4x+2)}-9$.

ادرس تغيرات الدالة f، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4)(u_n)المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 1$ومن أجل كل عدد nمن $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5^4(u_n + \frac{9}{16}) - \frac{9}{16}$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \dfrac{5^{(4n+2)}-9}{16}$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن u_nعدد طبيعي.

5)استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

التمرين33:دورة 2014الموضوع (2)

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - \ln(x-1)$

1- حدد حسب قيم x، إشارة $f(x) - x$.

2-أ-عيّن اتجاه تغير f. ب-بيّن أنه إذا كان $x \in [2:e+1]$ فإن: $f(x) \in [2:e+1]$.

II) (u_n)المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = e+1$ ومن أجل كل عدد nمن $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \in [2 ; e+1]$.
2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3) برر تقارب المتتالية (u_n) ، ثم أحسب نهايتها.

التمرين34:دورة 2013الموضوع (1)

(u_n)المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n)متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$

1)بين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم احسب وحدّها الأول
2) اكتب v_n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} S_n$
4)جد بدلالة n الجداء $P_n = u_0 \times u_1 \times .. \times u_n$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} P_n$.

التمرين35:دورة 2011الموضوع (1)

(u_n)متتالية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1-أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ استنتج أن $u_n \succ 1$
2-أدرس اتجاه تغير (u_n)، بين أنها متقاربة،وأحسب نهايتها
3-ليكن الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_n$. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n = \frac{2n+2}{n+2}$
4-(v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = \ln(u_n)$
عبّر بدلالة P_n عن S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$، ثم احسب نهاية S_n لما n ينتهي إلى $+\infty$.

التمرين36:دورة 2008الموضوع (1)

I- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-2 ، +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$
و (C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الاطوال 2cm.
أ) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.
ب) ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.
جـ)بين أن المستقيم (D): y=x-2 مقارب مائل لـ (C_f). ثم رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (D).
د) بين أن صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

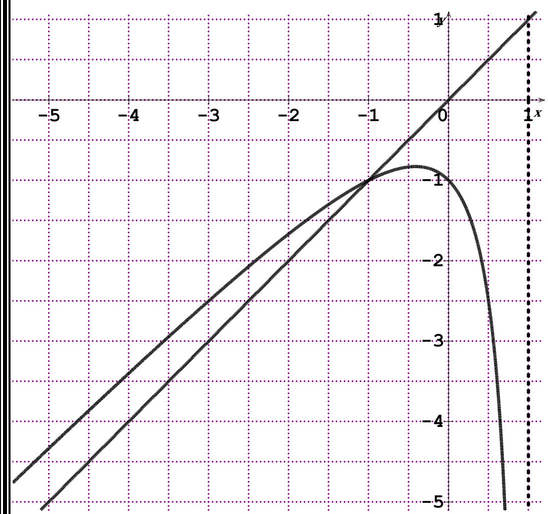
II-نعتبر المتتالية العددية (U_n) والمعرفة بـ: $U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ وذلك من أجل كل عدد طبيعي n
أ) باستخدام (C_f) والمستقيم ذي المعادلة: $y=x$ مثل U_0 ، U_1، U_2 (دون حسابها) على محور الفواصل
ب) خمن اتجاه وتقارب المتتالية (U_n).
جـ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le U_n \le \frac{5}{2}$ وان المتتالية (U_n) متزايدة.
استنتج ان (U_n) متقاربة ، ثم احسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين 37:دورة 2008 الموضوع (2)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$ و (C_f) تتمثيلها البياني
1-أ- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$.
ب-أنشئ (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة 4cm
جـ-برهن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.
2-نعرف المتتالية العددية (u_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
أ-برر وجود المتتالية (u_n) .احسب u_1 و u_2.
ب-مثل الحدود u_0، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل بالاستعانة بـ (C) والمستقيم $(D): y=x$
جـ-ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
3-أ-برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0 \le u_n \le \sqrt{3}$
ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \succ u_n$.ماذ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية (u_n)؟.
جـ- تحقق أن $(u_{n+1}-\sqrt{3}) \le \dfrac{2-\sqrt{3}}{u_n+2}(u_n-\sqrt{3})$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$
عين عددا حقيقيا k من المجال $]0;1[$ بحيث: $\left|(u_{n+1}-\sqrt{3})\right| \le k\left|(u_n-\sqrt{3})\right|$ ثم بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$:
$\left|(u_n-\sqrt{3})\right| \le k^n\left|(u_0-\sqrt{3})\right|$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

التمرين38: دورة 2018

f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$



(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0=-3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ (أنظر الشكل المقابل)

1) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، أعط تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-3\le u_n\le -1$.

3-أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}+1\ge\frac{3}{4}(u_n+1)$.

ب) أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n+1\ge -2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

4) نضع: $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $8\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]\le(u_0+1)+(u_1+1)+.....+(u_n+1)<0$

وأستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n$.

التمرين39:دورة 2017الموضوع (2)

نعتبرالمتتالية العددية (u_n) المعرفة بـحدّها الأول: $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=7u_n+8$.

1- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n=7^{n+1}-4$.

2-نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n=1+7+7^2......+7^n$ و $S_n'=u_0+u_1+......+u_n$

أ-احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بيّن S_n و S'_n.

ب-أستنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n: $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

3-أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5

ب)عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون S'_n قابلا القسمة على 5.

التمرين40:دورة 2017الموضوع (2) الاستدراكية

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـحدها الأول u_0 حيث $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $u_{n+1}=4u_n+1$

1-أ) بيّن أن:من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{1}{3}(4^n-1)$.

ب) تحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم العددان u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما.

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\frac{1}{3}$.

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

ب)عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+v_2.....+v_{3n}$.

3-عين من أجل كل عدد طبيعي n غير المعدوم القاسم المشترك الأكبر للعددين 4^n-1 و $4^{n+1}-1$

4-أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الأقليدية 4^n على 7.

ب)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد A_n المعرف بـ: $A_n=9S_n-6n-3^{6n+4}$ القسمة على 7

التمرين41:دورة 2016الموضوع (1)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدّهاالاول u_0 وأساسها q حيث: $\begin{cases}\ln(u_1)+\ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$

1) أحسب u_1 وu_2، ثم استنتج قيمة الأساس q

2- نضع : $u_1=e^4$ و $q=e^3$

أ)عبّر عن u_n بدلالة n ،

ب) نضع: $S_n=\ln(u_0)+\ln(u_1)+.....+\ln(u_n)$ احسب S_n بدلالة n

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $a_n=n+3$.

3-أ)بيّن أن: $PGCD(2S_n;a_n)=PGCD(a_n;14)$

ب) عيّن القيّم الممكنة لـ$PGCD(2S_n;a_n)$

جـ) عيّن قيم العدد الطبيعي بحيث: $PGCD(2S_n;a_n)=7$

4) ادرس بواقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 7.

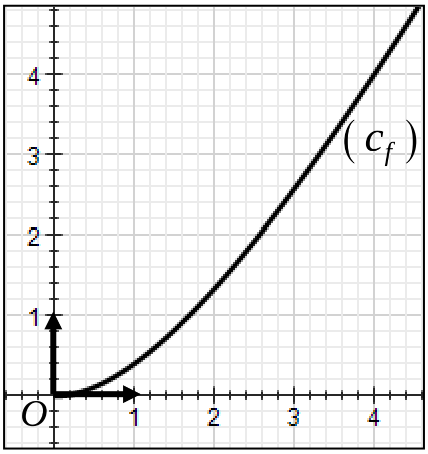
5)نضع: $b_n=3n.a_n-2S_n+1437^{2016}+1$

عيّن قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها يكون: $\begin{cases}b_n\equiv 0[7]\\ n\equiv 0[5]\end{cases}$

6)بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد: $1437^{9n+1}-3\times 4^{12n+1}+52$ يقبل القسمة على 7

التمرين42:دورة 2014الموضوع (1)

الدالة العددية f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+4}$ و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس (انظر الشكل ادناه).



1) بين ان الدالة f متزايدة تماما.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=3$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

أ)باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل، على حامل محور الفواصل ، الحدود: u_0، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0\le u_n\le 3$.

ب)بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة. جـ)استنتج أن (u_n) متقاربة.

4) أ)ادرس إشارة العدد $7u_{n+1}-6u_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_{n+1}\le\frac{6}{7}u_n$.

ب) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $0\le u_n\le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$.

جـ) احسب نهاية المتتالية (u_n)عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين43:دورة 2012الموضوع (2)

(u_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=16$ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=6u_n-9$

1-أ) احسب بواقي قسمة كل من الحدود u_0، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 على 7 .

ب) خمن قيمة للعدد a وقيمة للعدد b بحيث : $u_{2k}\equiv a[7]$ و $u_{2k+1}\equiv b[7]$.

2- أ) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي n: $u_{n+2}\equiv u_n[7]$.

ب) برهن بالتراجع أنه مهما يكن العدد طبيعي k ، $u_{2k}\equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أن: $u_{2k+1}\equiv 3[7]$

3-نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\frac{9}{5}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n)هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- احسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

التمرين 44: دورة 2011 الموضوع (1)

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق: $\begin{cases} u_4 = 15 \\ m+d = 42 \end{cases}$ حيث $\begin{cases} m = PPCM(u_3;u_5) \\ d = PGCD(u_3;u_5) \end{cases}$

1- عيّن الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0.

2- اكتب u_n بدلالة n ، ثم بين أن: 2010 حد من حدود (u_n) وعين رتبته.

3- عين الحد الذي إبتداء منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080.

4- n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- احسب بدلالة n المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + ... + u_{2n}$

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث: $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 ... + u_{2n}$ و $S_2 = u_1 + u_3 + u_4 ... + u_{2n-1}$

التمرين 45: دورة 2009 الموضوع (1)

1) نعرف الدالة f على المجال $[1,5]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$ و (C_f) هو التمثيل البياني لها الوحدة 3cm

أ) أدرس تغيرات الدالة f.

ب) إنشئ (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

2) (u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{5}{u_n})$ و $u_0 = 5$

أ) احسب u_1 و u_2.

ب) استعمل (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0، u_1 و u_2 وعلى محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \geq \sqrt{5}$.

ب- بيّن أن (u_n) تناقصية تماما، ماذا تستنتج بالنسبة لتقاربها

4) أ- برهن أنه مهما يكن $n \in \mathbb{N}$: $(u_{n+1} - \sqrt{5}) \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{5})$. ب- أستنتج أن $(u_n - \sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - \sqrt{5})$ ما هي $\lim_{n \to +\infty} u_n$

التمرين 46: دورة 2009 الموضوع (2)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل n من $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

1- عين α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية ، يطلب حساب أساسها وحدّها الأول.

2- احسب كلا من v_n و u_n بدلالة n.

3- احسب المجموعين $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

4- أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 5.

ب- عين قيم العدد الطبيعي n والتي من أجلها u_n مضاعف للعدد 5.

التمرين47:دورة 2008الموضوع (1)

لتكن f الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ كمايلي: $f(x)=3+\sqrt{x-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني .

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا.

- أدرس تغيرات الدالة f.

- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي"أنشئ (C_f)

- أرسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y=x$

2) نعرّف (u_n) متتالية على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) باستعمال (D) و (C_f) مثّل u_0، u_1 و u_2 على محور الفواصل

ب) ضع تخمينا حول أتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3) أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $2\le u_n\le 5$ و $u_{n+1}\succ u_n$

ب-استنتج أن (u_n) متقاربة . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين48:دورة 2008الموضوع (1)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$ و $u_0=2$

1) أحسب u_1، u_2 و u_3.

2) (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- برهن بالتراجع أن (v_n) ثابتة،استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) (w_n) متتالية معرفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$ أحسب المجموع: $S=w_0+w_1+w_2+....+w_n$.

الجزء الثاني: بكالوريات النظام القديم

التمرين49:دورة 1980 ع.ط

x ،y ، z أعداد حقيقيّة موجبة تماما، تشكّل بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية.
برهن أنّ الأعداد: $\ln z$ ،$\ln y$ ،$\ln x$ هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.
عيّن هذه الأعداد بحيث: $\ln(x\times y\times z)=21$ و $\ln x\times\ln y\times\ln z=-105$

التمرين50:دورة 1999 ع.ط

a ،b و c أعداد حقيقية غير معدومة .
1) بين أنه إذا كانت a ، b و c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية فإن :

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$$

2)جد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أنّ مجموعها هو78ومجموع مربعاتها هو3276

التمرين51:دورة 1997 ع.ط

1)(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$
*عين أساسها وحدها الأول u_0، ثم أكتب u_n بدلالة n
* نسمي S_n المجموع : $u_0+u_1+.....+u_n$ أحسب S_n بدلالة n ثم نهاية S_n لما تؤول n إلى $+\infty$
2) (V_n) المتتالية العددية المعرفة كمايلي: مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $V_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$
* بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
نسمي S'_n المجموع : $v_0+v_1+.....+v_n$ *عين العدد الطبيعي n حتى يكون:$S'_n=2^{30}$

التمرين52:دورة 2004 ت.ر

(U_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0=2$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $U_n-2U_{n+1}=2n+3$
1)برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $U_n=2^{-n}-2n+1$
2)أ-أثبت أنه يوجد عدد طبيعي m، تكون من أجله المتتالية (V_n) والمعرفة بـ:
$V_n=U_n+mn-1$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول
ب- احسب بدلالة n المجموع: $S_n=V_0+V_1+...+V_n$
3) لتكن في المستوي النقط A،B،C وK التي تحقق:
$2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}+\lambda\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$
عين λ حتى تكون K مرجحا للجملة : $\{(A;S_0),(B;S_1),(C;S_2)\}$

التمرين53:دورة 2007 ت.ر

(U_n)متتالية عددية معرفة بـ: $U_0=\frac{1}{4}$ ،$U_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل$n\in\mathbb{N}$ $4U_{n+2}=7U_{n+1}-3U_n$

(V_n)المتتالية المعرفة بالعلاقة : : $n\in\mathbb{N}$ $V_n=U_{n+1}-U_n$

1) احسب U_2 و V_0 .

2)أثبت أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

3)أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=V_0+V_1+...+V_n$

4)عبّر عن U_n بدلالة S_n مستعينا بالعبارة $V_n=U_{n+1}-U_n$ ثم استنتج عبارة الحد العام U_n بدلالة n.

احسب نهاية U_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين54:دورة 2006 ع.دقيقة

(u_n)متتالية معرفة بـحدّها الأول u_0 وبعلاقة التراجع التالية $u_{n+1}=\frac{7u_n+2}{u_n+8}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$

1-عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2-نفرض أن : $u_0=0$.

أ-احسب u_1 ، u_2.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $0\le u_n\le 1$ ، ثم أدرس أتجاه تغير المتتالية (u_n).

3-لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كمايلي: من أجل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=\frac{u_n+2}{u_n-1}$.

أ- أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب-عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

جـ-أحسب كلا من S_n و π_n حيث: $S=v_0+v_1+v_2+...+v_n$ و $\pi_n=v_0\times v_1\times v_2\times...\times v_n$.

التمرين55:دورة 1995 ع.ط

أ) حلل العدد 1995 إلى جداء عوامل أولية

ب) عين الأعداد الحقيقية x ، y و z المتمايزة مثنى مثنى والتي تحقق:

x،y و z حدود متتابعة بهذا الترتيب لمتتالية حسابية

وz، x، yحدود متتابعة بهذاالترتيب لمتتالية هندسية

و x+y+z عدد طبيعي أولي قاسم للعدد 1995.

التمرين56:دورة 2004 ع.ط

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7

2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون العدد $\left(2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right)$ قابلا للقسمة على 7

3) من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ نضع : $u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$

ـ أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ـ ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

التمرين57 دورة 1998 ع.ط

u_0، q عددان طبيعيان غير معدومين.

(u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_0 و أساسها q.

1 ـ عيّن q و u_0 علما أنّ q أوّلي مع u_0 و $3u_0^2 = u_3 - u_1$

2 ـ نفرض أنّ $u_0 = 8$، $q = 3$ ونضع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$، $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times ... \times v_n$

أحسب S_n و P_n بدلالة n

3) أ ـ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 3^n على 13 .

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n مضاعفا 13

التمرين58:دورة 2005 ع.دقيقة

1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

جد - α و β حيث : $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ و $\alpha \succ \beta$.

2) (u_n) متتالية هندسية حدّها الأوّل u_0 و أساسها q

حيث u_0 و q عددان طبيعيان أوليان فيما بينها $u_0 \succ q$.

أ- أوجد u_0 و q حتى يكون : $35u_0^2 + 19u_1 - u_3 = 0$.

ب- نضع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. أحسب بدلالة n المجموع S_n ،

جـ- أوجد العدد الطبيعي n حتى يقبل S_n القسمة على 10.

الجزء الثالث: بكالوريات اجنبية

التمرين59:دورة 2016 - المغرب

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{16}u_n+\frac{15}{16}$

1-أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>1$.

ب) تحقق من أن : $u_{n+1}-u_n=-\frac{15}{16}(u_n-1)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

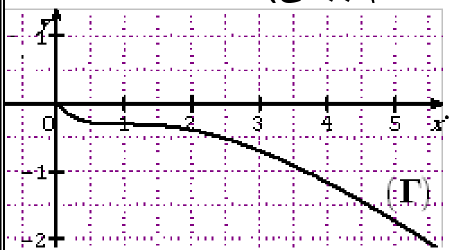
2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-1$

أ)بيّن أن(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{16}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب) بيّن أن $u_n=1+\left(\frac{1}{16}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ثم حد نهاية المتتالية (u_n).

التمرين60:دورة 2016 - تونس

(شعبة العلوم التقنيّة /الدورة الرّئيسيّة- ترجمة الأستاذ:م.جبالى)



المنحنى(Γ)المقابل هو التمثيل البياني، في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$،للدالة f المعرّفة على$[0;+\infty[$بـ: $f(x)=-x+\ln(1+x^2)$.

(Γ)يقطع محور الفواصل، فقط، عند المبدأ O.

1) بقراءة بيانيّة، برِّرْ أنه من أجل كلّ x من$[0;+\infty[$: $\ln(1+x^2)\leq x$.

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـِ : $\begin{cases} u_0=\frac{3}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(1+u_n^2)\ ;\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

ا) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\succ 0$.

ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

ج) استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، و أعط نهايتها.

3) لتكن المتتالية (S_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـِ : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

ا) بيّن أنّ المتتالية (S_n) متزايدة تماما.

ب) بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \le 3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

جـ) استنتج أنّ المتتالية (S_n) متقاربة.

التمرين61:دورة 2016 - Côte d'Ivoire

(شعبة العلوم - ترجمة الأستاذ: محمد جبالي)

1- نعتبر الدالة h المعرّفة على $[0;1]$ بـِ : $h(x)=2x-x^2$.

ا) برهن أنّ h متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

ب) استنتج أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$، فإنّ $h(x)$ ينتمي إلى $[0;1]$.

2- لتكن المتتالية u المعرّفة بـ : $u_0=\frac{3}{7}$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=h(u_n)$.

ا) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \prec u_n \prec 1$.

ب) برهن أنّ المتتاليةu متزايدة. جـ) برّر أنّ المتتاليةu متقاربة.

3- نعتبر المتتالية v المعرّفة، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ : $v_n=\ln(1-u_n)$.

ا) برهن أنّv متتالية هندسيّة أساسها2 .

ب) عبّر عن v_n بدلالة n. جـ) احسب نهاية المتتالية v. د) استنتج نهاية المتتالية u .

التمرين62:دورة 2016 - المغرب

(شعبة العلوم/ الدورة العاديّة/ بتصرّف يسير من الأستاذ جبالي)

نعتبر المتتالية العدديّة (u_n) المعرّفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3+u_n}{5-u_n}$ ، لكلّ n من $\mathbb{N}$.

1)ا) تحقّق من أنّ $u_{n+1}-3=\frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ ، لكلّ n من $\mathbb{N}$.

ب) بيّن بالتّراجع، من أجل كل عدد طبيعي n، أنّ $u_n \prec 3$.

2) لتكن (v_n) المتتالية العدديّة المعرّفة بما يلي : $v_n=\frac{u_n-1}{3-u_n}$ ، لكلّ n من $\mathbb{N}$.

ا) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) استنتج أنّ $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$، لكلّ n من $\mathbb{N}$.

ج) بيّن أنّ $u_n=\frac{1+3v_n}{1+v_n}$ ، لكلّ n من $\mathbb{N}$. ثمّ اكتب u_n بدلالة n.

د) حدّد نهاية المتتالية (u_n).

التمرين63:دورة 2015 - تونس

(شعبة العلوم التجريبيّة / دورة المراقبة- ترجمة الأستاذ:م.جبالي)

1/ لتكن المتتالية الهندسيّة (u_n) التي حدّها الأوّل $u_0=\frac{1}{3}$، و أساسها $q=\frac{1}{3}$.

ا) احسب u_1. ب) عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ج) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. بيّن أنّ $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

2/بدراسة تغيّرات الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=e^x-1-x$ بيّن أنه مهما يكن $x\in\mathbb{R}$: $1+x\le e^x$

3/ لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $v_n=(1+u_0)(1+u_1)\times\ldots\times(1+u_n)$

ا) احسب v_0 و v_1.

ب) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متزايدة.

ج) بيّن أنه، من أجل كلّ عدد طبيعي n : $v_n\le e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}$.

د) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متقاربة.

هـ) لتكن l نهاية المتتالية (v_n). بيّن أنّ $1\prec l\le\sqrt{e}$.

التمرين64:دورة 2015 - فرنسا

(المراكز الأجنبيّة- شعبة العلوم/ ترجمة الأستاذ جبالي)

لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0=a$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=e^{2u_n}-e^{u_n}$. حيث a عدد حقيقي ثابت غير معدوم.

1. لتكن g الدالة المعرّفة، من أجل كلّ عدد حقيقي x بـ : $g(x)=e^{2x}-e^x-x$.

ا) احسب $g'(x)$، و تحقق أنه، من أجل كلّ عدد حقيقي x: $g'(x)=(e^{x}-1)(2e^{x}+1)$.

ب) حدّد تغيّرات الدالة g، و أعطِ قيمتها الحديّة الصغرى.

جـ) بملاحظة أنّ $u_{n+1}-u_{n}=g(u_{n})$ ، ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_{n}).

2. في هذا السّؤال، نفرض أنّ $a\leq 0$.

ا) برهن بالتّراجع، من أجل كلّ عدد طبيعي n، أنّ $u_{n}\leq 0$.

ب) استنتج، من الأسئلة السّابقة، أنّ (u_{n}) متقاربة.

جـ) أعْطِ نهاية المتتالية (u_{n})، في حالة $a=0$.

3. في هذا السّؤال، نفرض أنّ $a\succ 0$.

ا) برهن أنه، من أجل كلّ عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_{n}\geq g(a)$.

ب) برهن بالتّراجع، من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n}\geq a+n.g(a)$.

جـ) عيّن نهاية المتتالية (u_{n}).

التمرين65:دورة 2014 - تونس

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n>-1$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{1}{u_n+1}$

أ- بيّن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- عبّر عن v_n ثم u_n بدلالة n .   جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين66:دورة 2014 - المغرب

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=13$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+7$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<14$.

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-14$.

أ- بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

جـ- حدّد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 13.99$.

التمرين67:دورة 2014 Polynésie

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_{n+1} - u_n$. أ- جد v_n بدلالة n. ماطبيعة المتتالية (v_n)؟

ب- نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = (n+1)(n+2)$

جـ- بيّن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $S_n = u_{n+1} - u_0$ ثم استنتج u_n بدلالة n .

التمرين68:دورة 2009 - تونس

(U_n)متتالية عددية معرفة بـ: $U_0=6$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $3U_{n+1} = U_n + 6$

1أ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_n \succ 3$

ب)بين أن المتتالية (U_n) متناقصة، ثم استنتج أنها متقاربة. جـ) عين نهاية المتتالية (U_n) .

2) (V_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \ln(U_n - 3)$

أ) بين أ (V_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$

ب)عبرعن V_n ثم U_n بدلالة n . ثم عين ثانية ، نهاية (U_n)

التمرين69:دورة 2004 - الهند

1- (u_n)متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

أ) احسب u_1 ، u_2 وu_3 عبر عن كل حد على شكل كسر غير قابل للإختزال.

ب) قارن بين الأربع حدود الأولى للمتتالية (u_n) والأربع حدود الأولى للمتتالية (w_n)

والمعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \frac{n}{n+1}$.

جـ)برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = u_n$.

2-لتكن المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

أ) برهن أن: $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، ثم احسب نهاية S_n عندما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين70:دورة 2010 - فرنسا

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1) احسب u_1 ، u_2 و u_3

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$، $u_n \geq 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$، $u_n \geq n-3$.

جـ)استنتج نهاية المتتالية (u_n).

3) نعرف المتتالية (v_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

جـ)ليكن المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.عين عبارة S_n بدلالة n.

التمرين71: فرنسا Metropole2010

(u_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي:$u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

1-أ)أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم ذو المعادلة $y = x$ والمنحنى (C) الممثل للدالة f والمعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$.

ب) باستعمال الرسم السابق ، مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها على محور الفواصل .

جـ)ماتخمينك اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

2)برهن بالتراجع على أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \succ 1$

3) من أجل كل عدد طبيعي نضع: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ) برهن على أن (v_n) حسابية وأكتب v_n بدلالة n.

ب)اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{x \to +\infty} u_n$

التمرين72: فرنسا A-Guyane2012

لتكن المتتالية العدديّة (u_n) المعرّفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$.

1-احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

2- أ-بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن u_n موجب تماما

بـ- ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة، ثم احسب نهايتها l .

3) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدو نضع: $v_n=\frac{u_n}{n}$.

ا- أثبت أنّ (v_n) متتالية هندسيّة يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل v_1 .

ب- أستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم n ، $u_n=\frac{n}{2^n}$

4) نعتبر الدالة f والمعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x-x\ln 2$.

أ-عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. ب – استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 73: Pondichéry 2010

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_0=1$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+n-1$.

1) هل المتتالية (u_n) حسابية ؟ هندسية ؟

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ بـ: $v_n=4u_n-8n+24$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- بيّن أنه ، من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، $u_n=7\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$.

جـ- احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$.

التمرين 74: Polynésie 2010

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\frac{3u_n}{1+2u_n}$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ- برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0<u_n<1$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n}{1-u_n}$.

أ- بيّن أن (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{3^n}{3^n+1}$.

جـ- احسب نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين75: 2010تونس ع. تجريبية

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي : $u_0=1$ ، $v_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n

$u_{n+1}=\alpha u_n+(1-\alpha)v_n$ وَ $v_{n+1}=(1-\alpha)u_n+\alpha v_n$ حيث α عدد حقيقي مع $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

1) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n=v_n-u_n$.

أ- احسب w_0 و w_1 .

ب- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=(2\alpha-1)^n$.

جـ- استنتج نهاية المتتالية (w_n) .

2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le v_n$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة وأن المتتالية (v_n) متناقصة .

جـ- استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية l .

د- بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n+v_n=3$ وستنتج قيمة النهاية l .

التمرين76: N Calédonie2011

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$.

1) حل ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة : $f(x)=x$.

2)ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0;1]$.استنتج أنه إذا كان $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$

II- لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n-\ln\left(u_n^2+1\right)$

1) برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le 1$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .