سلسلة تطبيقات نموذجية

(ملخص الدرس + تمارين تطبيقية + فروض وامتحانات تدريبية)

المستوى: 3 علوم تجريبية إعداد الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم (تقرت – ورقلة) krimbench@yahoo.fr

الدرس 1 : النهايات و الإستمرار

ملخص درس النهايات

العمليات على النهايات			حالات عدم التعيين
$+\infty + a = +\infty$ $-\infty + a = -\infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$(a \neq 0)$ $a \times \infty = \infty$ $\infty \times \infty = \infty$	$\frac{a}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{a} = \infty$ $\frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0)$	$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \times \infty \quad \infty - \infty$

التفسير الهندسي للنهاية

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ معناه المستقيم $y = l$ مستقيم مقارب ل (C_f) عند ∞
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ معناه المستقيم ذا المعادلة $x = a$ مستقيم مقارب ل (C_f)
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ معناه احتمال وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند

المستقيم المقارب المائل

- (Δ) $y = ax + b$ مستقيم مقارب ل (C_f) عند ∞ يعني $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
- إذا $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ يعني $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند ∞
- لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى $(D): y = ax + b$ ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (ax+b)]$

نهاية دالة مركبة

إذا $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ $\quad f = v \circ u$

النهايات و الترتيب

إذا $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

إذا $f(x) \geq g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

إذا $f(x) \leq g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

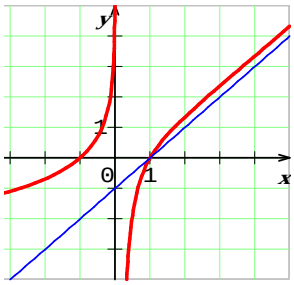
التمرين 01 (تذكير والتدرب على حساب النهاية)

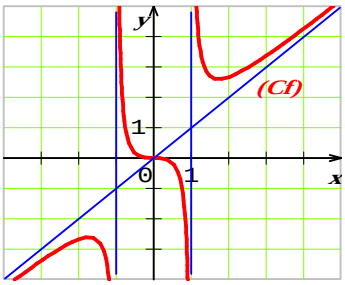
① ادرس نهاية الدالة f ، إذا كانت f غير معرفة عند a ادرس النهاية على يمين و على يسار a

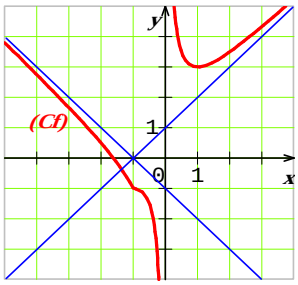
1	$f(x) = 2x^3 - x + 1$ عند $-\infty$ ، $+\infty$	4	$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 2
2	$f(x) = -3x^4 + 2x + 4$ عند $-\infty$ ، $+\infty$	5	$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، 0
3	$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند -1	6	$f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x-3}$ عند $-\infty$ ، عند $+\infty$ ، عند 3

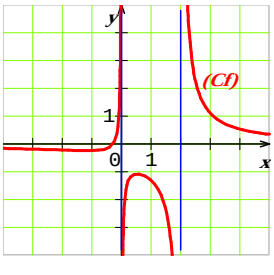
التمرين 02 (تخمين النهاية)

في كل حالة من الحالات الثلاث خمّن النهايات في أطراف مجموعة التعريف D و أعط معادلة لكل مستقيم مقارب لمنحنى C_f الدالة f .









2- لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	1

1) عين مجموعة تعريف الدالة f والنهايات عند حدود مجموعة التعريف.

3) أعط معادلة لكل مستقيم مقارب لمنحنى الدالة f .

4) في معلم متعامد ومتجانس ، ارسم تمثيل بياني C_f للدالة f وأيضا المستقيمات المقاربة لـ C_f

التمرين 03 (حساب نهاية)

أحسب النهايات التالية

حساب نهاية دالة مركبة	حساب النهاية لدوال جذرية	حساب النهاية باستعمال العدد المشتق
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-1}{2x-4}}$	• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$	• $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$
• $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-x+3}$	• $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x+2$	• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$
• $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{x+4}{x^2-3}\right)$	• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4}-2x+1$	• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$
	• $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x}$ عند $+\infty$	

التمرين 04 (حساب النهاية باستعمال المقارنة و الحصر)

① نعتبر الدالة f المعرفة على R^* ب $f(x)=1+\frac{\cos x}{x^2}$

1. بين أنه من أجل كل x من R^* ، $1-\frac{1}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x^2}$. أستنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② نعتبر الدالة f المعرفة على R ب $f(x)=\frac{x}{2+\sin x}$

1. بين أنه من أجل كل x من R ، $\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin x}\le 1$ استنتج نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

التمرين 05 (حساب النهاية باستعمال طرق أخرى)

بين باستعمال طريقة مناسبة أن :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=-3 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}=2\sqrt{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=2$$

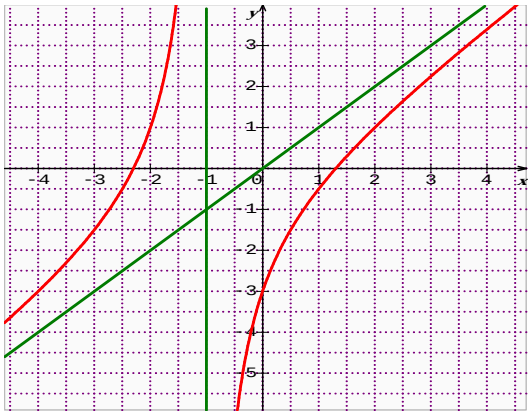
التمرين 06 (التفسير الهندسي للنهايات)

فسر هندسيا النهايات التالية

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2 \qquad \lim_{x\to 3}f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)-x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)-2x=1$$

التمرين 07 المستقيمات المقاربة – الوضعية



- f دالة معرفة على $D_f = R-\{-2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x+1}$

و (C_f) منحنيها في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. عين بيانيا ثم حسابيا نهايات الدالة f على أطراف D_f
2. حدد الأعداد الحقيقة a, b و c بحيث $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$
3. استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)
4. من البيان ثم بالحساب حدد الوضع النسبي لـ (C_f) و المقارب المائل

التمرين 08 حساب النهاية – التفسر الهندسي

- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة x^2+x-2.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. فسر هندسيا

التمرين 09 المستقيمات المقاربة – الوضعية النسبية

- نعتبر الدالة f المعرفة على $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب.
2. بين أنه من أجل كل x من D_f، $f(x)=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$
3. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
4. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

التمرين 10 المستقيمات المقاربة – الوضعية النسبية

- f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم.

① بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x+3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ ادرس الوضعية النسبية لـ (C) و Δ.

التمرين 11 المستقيمات المقاربة – الوضعية النسبية

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$.

1) عين a، b، c و d بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$.

2) استنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ و $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

3) حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ).

إعداد الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم

التمرين 12 حساب النهاية – المستقيمات المقاربة – الوضعية النسبية

- نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$: $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$.

2) استنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

3) أ/- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

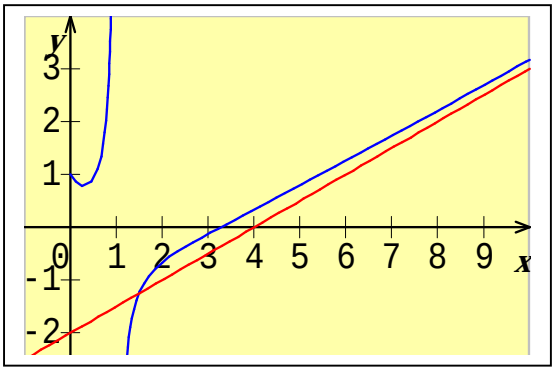
ب/- بين انه يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\alpha$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\alpha x\right]=\beta$.

ج/- استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ') عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

التمرين 13 إختيار من متعدد

عين الإجابة الصحيحة دون تبرير

في الشكل الموالي لدينا الرسم البياني C_f لدالة f معرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:



$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+3x-2}{2\left(x^2-1\right)}$$

والمستقيم Δ الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x-2$

1. المستقيم الذي معادلته

C_f مقارب لـ $y=1$	C_f مقارب لـ $x=1$	C_f لا يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ولا عموديا

2. من أجل كل من $]1;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+a+\dfrac{bx+c}{2\left(x^2-1\right)}$

$c=-3$ ، $b=2$ ، $a=-2$	$c=-3$ ، $b=-2$ ، $a=2$	$c=3$ ، $b=2$ ، $a=1$

3. C_f يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته:

$y=\dfrac{1}{2}x+1$	$y=\dfrac{1}{2}x+2$	$y=\dfrac{1}{2}x-2$

4. C_f يقطع المستقيم المقارب في

النقطة $A\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$	النقطة $B\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$	C_f لا يقطع المستقيم المقارب في أية نقطة.

التمرين 14 (من مسائل الباكالوريا)

لتكن الدالة f المعرفة على $\Re-\{+1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ C_f تمثيلها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد (O,I,J).

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$: $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{(x-1)^2}$

3. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C_f والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$ ؟ برر.

4. حدد وضعية C_f بالنسبة لـ (d) ، لتكن A نقطة تقاطع C_f و (d).

إعداد الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم

الإستمرارية

المستوى: 3 علوم تجريبية إعداد الأستاذ: بن الشيخ عبد الكريم (تقرت-ورقلة) krimbench@yahoo.fr

ملخص درس الإستمرارية

f مستمرة عند a يعني $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ،
• القول أن الدالة f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I.
• التفسير البياني: تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم [اليد].
• نقبل بأن كل الدوال المقررة في هذا المستوى و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها
نتائج • الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها. • الدوال كثيرات الحدود، $\sin$ و $\cos$ مستمرة على R. • الدوال الناطقة [حاصل قسمة كثيري حدود] مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
مبرهنة القيم المتوسطة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$. من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.
المعادلة $f(x)=k$ إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b. إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a;b]$
حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة على $[a;b]$ و كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $[a;b]$

التمرين 01 الإستمرارية

1. لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2-2x+1 \; ; & x\le 2 \\ f(x)=x^2+x-5 \; ; & x>2 \end{cases}$

ادرس استمرارية الدالة f عند 2 ، هل الدالة f مستمرة على R ؟ لماذا ؟

2. ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على R بـ: $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+2 \; ; & x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x+1 \; ; & x>1 \end{cases}$

3. f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ إذا كان $x\neq 1$ و $f(1)=3$ ادرس استمرارية f عند 1. هل الدالة f مستمرة على R ؟

4. f دالة معرفة على $[-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ;x>0 \\ \dfrac{1-x^2}{x-2} & ;x\le 0 \end{cases}$ أدرس استمرارية f عند 0. ثم استنتج أن f مستمرة على $[-1;+\infty[$

5. حدد العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ;x\neq 0 \\ \alpha & ;x=0 \end{cases}$ مستمرة على R

التمرين 02 رمز القيمة المطلقة

- نعتبر الدالة f المعرفة على $R-\{2,4\}$ ب:

$$f(x)=\frac{|x-3|+1}{(x-2)(x-4)}$$

1. أكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.
2. ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 3

التمرين 03 دالة الجزء الصحيح

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ ب:

$$f(x)=xE(x)+1$$

حيث الدالة $x\mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحنى الممثل للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ ؟ على المجال $[-1;2[$ ؟.

التمرين 04 مبرهنة القيم المتوسطة

1. برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $x^3-4x=-2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-3;-2]$
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2]$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=2x+1 & ;\ 0<x\le 1 \\ f(x)=-2x+3 & ;\ 1\le x<2 \end{cases}$
   - هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلولا في المجال $[0;2]$ ؟
   - تحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا في $[0;2]$.
3. لتكن f دالة مستمرة على المجال $]-3;+\infty[$ وجدول تغيراتها هو الآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما. ثم عين اشارة $f(x)$

4. نعتبر الدالة f المعرفة ب:- $f(x)=2x^3-3x^2-1$ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في R
5. نعتبر الدالة f المعرفة على R ب:- $f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$

ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها ثم بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في R. ثم عين اشارة $f(x)$

6. نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ ب: $f(x)=x^4-x^2+1$
   - ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
   - بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا وحيدا α في $]1;2[$. ما التفسير البياني
   - باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا سعته 0.25 للعدد α

نموذج1الفرض الاول في مادة الرياضيات

التمرين الاول :

- لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{-2\}$ بحيث :

$$f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2+4x+4}$$

وليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$

1. أحسب النهايات على اطراف مجموعة التعريف
2. عين الاعداد $a;b;c;d$ بحيث : $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+2)^2}$
3. استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) لـ (C_f)
4. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

التمرين الثاني :

- اليك جدول تغيرات f دالة عددية معرفة علي $R-\{1\}$:

x	$-\infty$	α	1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	-2010 ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	-7 ↗	-5

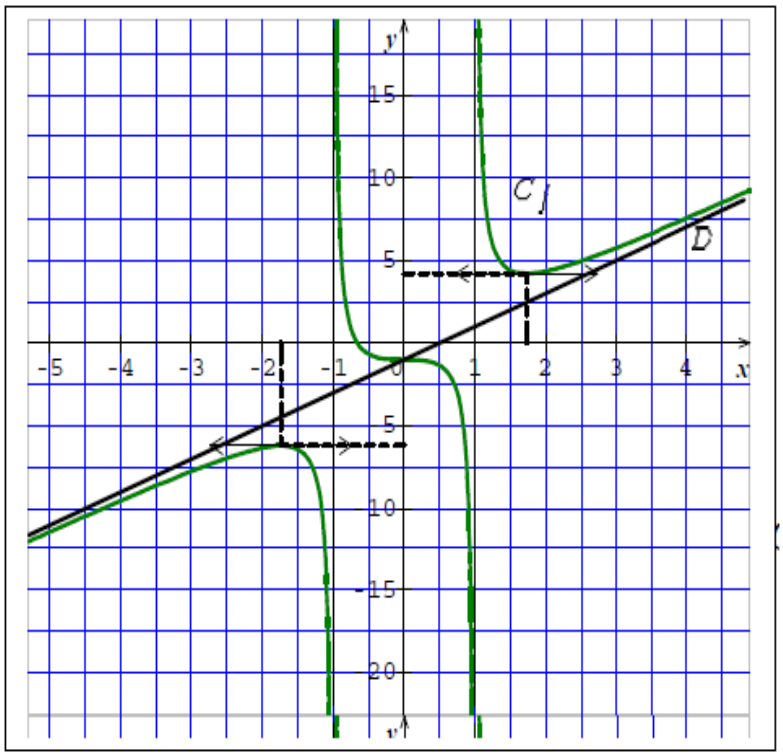
من خلال قراءتك لجدول التغيرات اجب عن ما يلي :

1- حدد اتجاه تغير الدالة f .
2- عين حلول المعادلة $f(x)=0$.
3- حدد إشارة $f(x)$.
4- عين معادلات المستقيمات المقاربة .
5- نضع :

$$g(x)=\sqrt{f(x)}$$

- حدد D_g مجموعة تعريف g
- حدد اتجاه تغير الدالة g

نموذج 2 الفرض الاول في مادة الرياضيات



التمثيل البياني C_f المقابل هو للدالة f في معلم متعامد ($1cm = 1u$ على محور الفواصل و $1cm = 5u$ على محور التراتيب)

المستقيم D يشترك مع C_f في النقطة $(0,-1)$ و هو خط مقارب مائل بالنسبة لـ C_f

نعلم أيضا أن C_f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

1) انطلاقا من المعطيات و الشكل

أ) عين مجموعة تعريف الدالة f

ب) حدد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفها

ج) أكتب معادلة D و المستقيمات المقاربة للمنحنى C_f

2) أنشئ جدول تغيرات f.

3) في الحقيقة نعلم أن عبارة الدالة f هي من الشكل $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{2x}{ax^2 + bx + c}$ باستعمال النتائج السابقة

عين الأعداد α, β و a, b, c (علل بدقة)