الموضوع التجريبي رقم 01 — ثانوية 18 فيفري بالحمادية

الشعبة : العلوم التجريبية — دورة : أفريل 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كرات لا نميز بينها عند اللمس منها:4 كرات سوداء تحمل الأرقام : 1،1،2،0 .

و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام : 1،1،2، 2 .

1) نسحب ثلاث كرات في آن واحد من هذا الكيس.

ـ احسب احتمال الحوادث التالية:

A : " الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم".

B : " الكرات المسحوبة من نفس اللون".

C : " الكرات المسحوبة أرقامها مختلفة مثنى مثنى" .

2) X هو المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقم 1.

ـ اكتب قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ احسب أمله الرياضياتي.

ـ احسب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

3) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{1}{2} + ln\sqrt{u_n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \frac{1}{1+lnu_1} + \frac{1}{1+lnu_2} + ... + \frac{1}{1+lnu_n}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z^2+6z+17=0$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

لتكن النقط A ، B ، C لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4$ ، $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

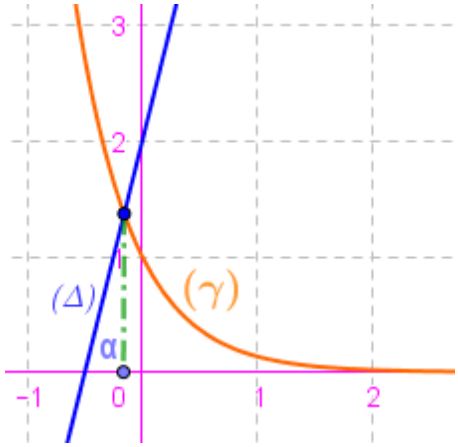
ـ احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) أ) عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D وE على الترتيب حتى يكون الرباعي BCDE مربعا مركزه A

ب) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=10\sqrt{2}$

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ثم عيّن المجموعة (Γ_2).



التمرين الرابع: (07 نقاط)

1) (γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto e^{-2x}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=4x+2$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ) .

g الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-2x}-4x-2$.

أ) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $\mathbb{R}$ ،

ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

ب) تحقق أن: $-0.16<\alpha<-0.15$.

2) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x+3-2xe^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وحدة الطول $2cm$.

أ) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)=e^{2x}g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يُطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D).

4) بين أن: $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$.

5) أرسم المستقيم (D) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\simeq 3.07$) .

6) أ) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (D) يطلب تعيين معادلة له .

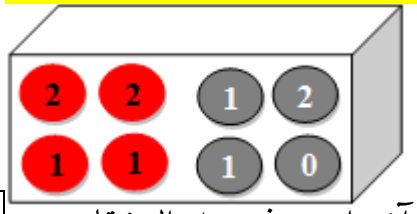
ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين .

7) أ) x عدد حقيقي ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_0^x 2te^{2t}dt$.

ب) λ عدد حقيقي أصغر تماما من 0 ، احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات ذات المعادلات: $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y=x+3$ ، ثم جد $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$.

مديرية التربية لولاية برج بوعريريج	تصحيح الموضوع التجريبي01	ثانوية 18 فيفري بالحمادية
المستوى: 3 علوم تجريبية	2019 . 2018	الأستاذ: مالجي حسام

حل التمرين01:



1) نسحب 3 كرات في آن واحد : نستعمل التوفيقات

عدد الحالات الممكنة(توفيقة3لـ عناصر من8): $C_8^3 = 56$

أ) حساب احتمال الحوادث:

- الحادثة A الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم:

معناه 3 كرات تحمل الرقم 1 أو 3 تحمل الرقم 2

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{5}{56}$$

- الحادثة B الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون:

أي $(3N)$ أو $(3R)$:

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_4^3}{C_8^3} = \frac{1}{7}$$

-الحادثة Cالحصول على ثلاث كريات أرقامها مختلفة مثنى مثنى:

أي كل الأرقام مختلفة:

$$P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1}{C_8^3} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات التي تحمل الرقم ❶.

2)أ)تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X:

. قيم X الممكنة هي : 0 ، 1 ، 2 و 3

- لما $(X=0)$: (سحب 3 كرات لا تحمل الرقم ❶)

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56}$$

- لما $(X=1)$:سحب(1 تحمل الرقم ❶و2 لا تحمل الرقم ❶)

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_4^2}{C_8^3} = \frac{24}{56}$$

- لما $(X=2)$:سحب(2 تحمل الرقم ❶و1 لا تحمل الرقم ❶)

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_8^3} = \frac{24}{56}$$

- لما $(X=3)$: (سحب 3 كرات تحمل الرقم ❶)

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = = \frac{4}{56}$$

ومنه :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي ، التباين ، الإنحراف :

- الأمل الرياضياتي: $E(X) = \sum_1^4 X_i P_i = \frac{84}{56} = \frac{3}{2}$

-الإنحراف المعياري: $V(X) = \sum_1^4 (X_i - E(X))^2 P_i = \frac{15}{28} \approx 0,53$

- التباين : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{44}{75}}$

حل التمرين02:

I) 1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n > \frac{1}{e}$.

❶ من أجل $n=1$ لدينا : $u_1 = e^2$ و $e^2 > \frac{1}{e}$

ومنه $p(1)$ صحيحة .

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي غير معدوم n أي $u_n > \frac{1}{e}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$.

لدينا : $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}}$

بضرب طرفي هذه المتباينة في $e^{-\frac{1}{2}}$ نجد

$e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{e}}$ أي $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > \frac{1}{\sqrt{e}} \times \frac{1}{\sqrt{e}}$

ومنه $u_{n+1} > \frac{1}{e}$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $u_n > \frac{1}{e}$

2) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}\sqrt{u_n}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}}$$

لدينا $u_n>\frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}$ وبالتالي $\frac{1}{\sqrt{u_n}}<\sqrt{e}$

ومنه $e^{-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\sqrt{u_n}}<e^{-\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{2}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$

*استنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n): لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ومنه $u_{n+1}<u_n$

وبالتالي فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ب) استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{1}{e}$ فإنها متقاربة

*حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

نضع $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ حيث $l\in[1;+\infty[$

إذن $f(l)=l$ ومنه $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{l}=l$

إذن $l=\frac{1}{e}$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{e}$

3) أ) البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}+\ln(u_{n+1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u_{n+1})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\ln e^{-\frac{1}{2}}+\ln\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln\sqrt{u_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_1=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_1}=\frac{3}{2}$$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n: $v_n=v_1\times q^{n-1}=\boxed{\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

*استنتاج u_n بدلالة n :

$\ln(u_n)=2v_n-1$ تكافئ $v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u_n)$

$u_n=e^{2v_n-1}=e^{2\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$ ومنه $u_n=\boxed{e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}}$ تكافئ

ج) حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^{-1}=\boxed{\frac{1}{e}}$

4) حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n=\frac{1}{1+\ln u_1}+\frac{1}{1+\ln u_2}+.....+\frac{1}{1+\ln u_n}$$

ومنه $2v_n=1+\ln(u_n)$ تكافئ $v_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(u_n)$

$$S_n=\frac{1}{2v_1}+\frac{1}{2v_2}+.....+\frac{1}{2v_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+.....+\frac{1}{v_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_1q}+.....+\frac{1}{v_1q^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v_1}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}.....+\frac{1}{q^{n-1}}\right)\right]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{v_1}\left[\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n-1}{\frac{1}{q}-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)=\boxed{\frac{1}{3}\left(2^n-1\right)}$$

حل التمرين03:

1) حل في المعادلة : لدينا $(\Delta)=-100=(10i)^2$

ومنه : $S=\left\{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\ ;-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\right\}$

2)أ) طويلة وعمدة: لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$

يعني: $\begin{cases}\frac{AB}{AC}=1\\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ب) طبيعة المثلث: المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A

3)أ) تعيين z_D و z_E حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا:

أي أن A منتصف القطعتين $[BD]$ و $[CE]$:

ومنه :

$$\begin{cases} z_D = 2z_A - z_B = \boxed{-\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i} \\ z_E = 2z_A - z_C = \boxed{-\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i} \end{cases}$$

ب) تعيين طبيعة مجموعة النقط (Γ_1) :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\| = 4MA$ لأن :

(A مركز الرباعي ومرجح الجملة $\{(B;1),(C;1),(D;1),(E;1)\}$)

معناه : $4MA = 10\sqrt{2}$ ومنه: $\boxed{MA = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$

إذن (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$

4) التحقق أن B تنتمي إلى (Γ_2) :

معناه B تحقق العلاقة : $\arg(z_B+4) = \frac{\pi}{4}$

لدينا : B تحقق العلاقة : $z_B + 4 = \frac{5}{2}(1+i)$

ومنه : $\arg(z_B+4) = \frac{\pi}{4}$ إذن : $\boxed{B \in (\Gamma_2)}$

تعيين المجموعة (Γ_2) :

لدينا: $\arg(z_B+4) = \frac{\pi}{4}$ أي: $\arg(z_B+z_A) = \frac{\pi}{4}$

وتعني: $\left(\vec{U};\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4}$

إذن (Γ_2) هي نصف المستقيم $[AM)$ والذي يشمل النقطة B باستثناء النقطة A

حل التمرين04:

1)أ) تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على $\mathbb{R}$:

(γ) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty;\alpha[$ و تحت (Δ) على $]\alpha;+\infty[$ و (γ) يقطع (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة α

* استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−

ب) التحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$:

لدينا: $g(-0.16)\cdot g(-0.15) = 0.017\times(-0.05) < 0$

ومنه $-0.16 < \alpha < -0.15$.

2) لدينا : $f(x) = x+3-2xe^{2x}$ ، $D_f = \mathbb{R}$.

أ) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+3-2xe^{2x}\right) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-2e^{2x}\right) = \boxed{-\infty}$$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$f'(x) = e^{2x}g(x)$ الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = 1-2e^{2x}-4xe^{2x} = e^{2x}\left(e^{-2x}-4x-2\right) = \boxed{e^{2x}g(x)}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن :

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

3) تبيان أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D):

لدينا $\lim_{x\to-\infty}(-2xe^{2x}) = 0$ و منه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x+3$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

* دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D):

لدينا $[f(x)-(x+3)] = -2xe^{2x}$ و منه إشارة الفرق $[f(x)-(x+3)]$ هي عكس إشارة x إذن (C_f) يقع تحت (D) على المجال $]0;+\infty[$ و فوق (D) على المجال $]-\infty;0[$ و (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(0;3)$.

4) تبيان أنّ : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}$:

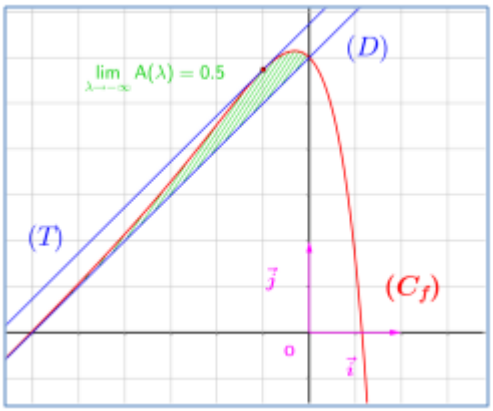
لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه: $e^{-2\alpha}-4\alpha-2 = 0$ أي:

$e^{2\alpha} = \frac{1}{4\alpha+2}$ نعوض في عبارة f فنجد:

$$f(\alpha) = \alpha+3-2\alpha\times\frac{1}{4\alpha+2}$$

$$= \alpha+3-\alpha\times\frac{1}{2\alpha+1} = \boxed{\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha+1}}$$

5) رسم المستقيم (D) والمنحنى (C_f) :



6) أ) إثبات أن (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (D) :

لدينا $f'(x)=1$ تكافئ $-2\ e^{2x}-4\,x\,e^{2x}=0$ أي أن

$-2e^{2x}(2x+1)=0$ ومنه $2x+1=0$ إذن $x=\frac{-1}{2}$.

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) عند النقطة

ذات الفاصلة $\frac{-1}{2}$ معادلته $\boxed{y=x+3+\frac{1}{e}}$.

ب) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m :

يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين متمايزين إذا و فقط إذا

كان $3<m<3+\frac{1}{e}$

7) أ) إيجاد: $\int_0^x 2te^{2t}dt$:

نضع $u(t)=t$ ، $v'(t)=2e^{2t}$

و منه $u'(t)=1$ ، $v(t)=e^{2t}$ إذن

$$\int_0^x 2te^{2t}dt=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)\,dt$$

$$=\left[te^{2t}\right]_0^x-\int_0^x e^{2t}\,dt=xe^{2x}-\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^x$$

$$=xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$$

ب) حساب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$:

لدينا (C_f) يقع فوق المستقيم (D) على المجال $[\lambda,0]$ ومنه

$$A(\lambda)=\int_\lambda^0\left(f(x)-(x+3)\right)dx=\int_0^\lambda 2xe^{2x}dx$$

$$=\left[xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\right]_0^\lambda=\left(\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)ua$$

ومنه :

$$\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\lambda e^{2\lambda}-\frac{1}{2}e^{2\lambda}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}ua$$

تريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 02 — ثانوية 18 فيفري بالحمادية

الشعبة : العلوم التجريبية — دورة : أفريل 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول : (04 نقاط)

صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 سوداء

و صندوق U_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 1 كرية سوداء و 1 كرية زرقاء ، جميع الكرات متماثلة .

1) نسحب عشوائيا ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع من الصندوق U_1.

أ) شكل شجرة الإحتمال المناسبة لهذه الوضعية . ب) احسب احتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون .

جـ) احسب احتمال الحصول على كرية حمراء على الأقل .

2) نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1. وكرية واحدة من الصندوق U_2.

ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة .

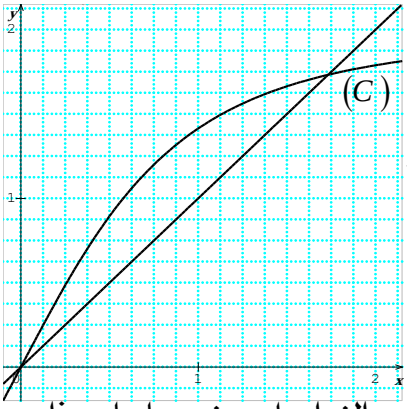
أ) عين قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، . ب) احسب أمله الرياضياتي. التباين والا نحراف المعياري

3) نضيف n كرية سوداء إلى الصندوق U_1. و n كرية حمراء إلى الصندوق U_2.

نسحب كرية واحدة من من الصندوق U_1. وكرية واحدة من الصندوق U_2.

لتكن A حادثة الحصول على كريتن من نفس اللون : ـ عين قيمة n حتى يكون $P(A)=\frac{3}{7}$

التمرين الثاني : (04 نقاط)



1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$

بـ : $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في م م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

ب) بين أنه إذا كان $x\in[1,\sqrt{3}]$ فإن $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 , u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n<\sqrt{3}$.

جـ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د) استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n . جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) أحسب p_n بدلالة n حيث : $p_n=\frac{(u_0\times u_1\times.....u_n)^2}{(3-u_0^2)(3-u_1^2).....(3-u_n^2)}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $z^2-6z+21=0....(I)$.

ب) استنتج حلول المعادلة : $\left(\bar{z}+3+i\sqrt{3}\right)^2-6\bar{z}-i\sqrt{108}+3=0....(II)$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

أ) بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$ ويطلب تعيين نصف قطرها .

ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O ، بيّن أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC

3) بيّن أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زاويته .

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right)$.

أ) عيّن طبيعة التحويل S و حدد عناصره المميزة.

ب) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $(z-z_\Omega)(\bar{z}-z_\Omega)=-(z_A-z_B)^2$.

جـ) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S ، محددا عناصرها المميزة .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

1) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{\ln x}{x}+e$.

أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) أحسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

2) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب) عيّن نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T).

5) أرسم (T) و المنحنى (C_f).

6) h الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x\left[(\ln x)^2+a\ln x+b\right]$ ، حيث a و b عددان حقيقيان .

أ) عيّن a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$.

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=\frac{1}{e}$ ، $x=1$ و $y=ex-e$.

7) لتكن k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $k(x)=e^{2x+1}+2x^2-e$.

أ) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $k(x)=f\left(e^{2x}\right)$.

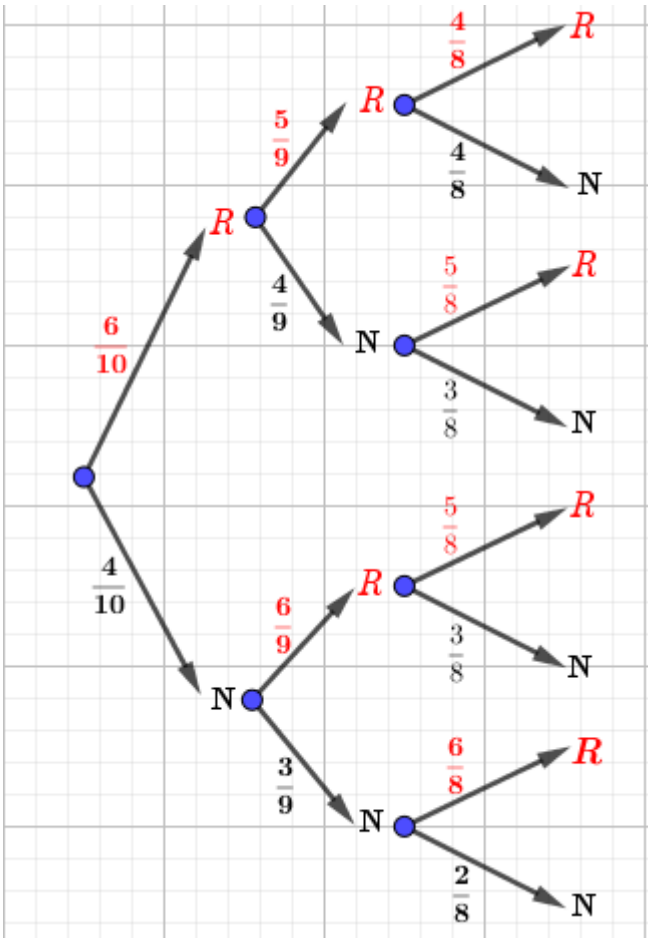
ب) باستعمال مشتقة دالة مركبة عيّن اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

حل التمرين01:

I) 1) صندوق U_1 يحتوي على 6 كريات حمراء و 4 سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع

أ) تشكيل شجرة الإحتمالات:



أ) احتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون:

معناه (ثلاث كريات حمراء) أو (ثلاث كريات سوداء)

نسمي الحادثة B ومن الشجرة نجد :

$$P(B)=\frac{(6\times5\times4)+(4\times4\times2)}{10\times9\times8}=\frac{120+24}{720}=\boxed{\frac{1}{5}}$$

ب) احتمال الحصول على كرية حمراء على الأقل:

أي الحصول على (1 كرية) أو (2 كريات) أو (3 كريات) حمراء

نسميها الحادثة C وحادثتها العكسية هي عدم الحصول على أي كرية حمراء أي (3 كريات سوداء) ولتكن الحادثة $\overline{C}$:

ومنه: $P(\overline{C})=\frac{(4\times3\times2)}{10\times9\times8}=\frac{24}{720}=\boxed{\frac{1}{30}}$

ومنه: $P(C)=1-P(\overline{C})=\boxed{\frac{29}{30}}$

طريقة (2) يمكننا إستعمال الترتيبات في الإجابة عن السؤالين السابقين

II) 1) نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وكرية واحدة من الصندوق U_2 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .

2) أ) تعيين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X:

. قيم X الممكنة هي : 0 ، 1 ، 2 و 3

بما أن السحب في آن واحد نستخدم التوفيقات :

عدد الحالات الممكنة: $C_{10}^2\times C_5^1=45\times5=\boxed{225}$

- لما $(X=0)$: عدم سحب أي كرية سوداء (سحب 2حمراء من U_1 و1 غيرسوداء من U_2)

$$P(X=0)=\frac{C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^2\times C_5^1}=\frac{60}{225}=\boxed{\frac{20}{75}}$$

- لما $(X=1)$: سحب (1سوداء و1حمراء من U_1 و1غير سوداء من U_2) أو (2حمراء من U_1 و 1سوداء من U_2)

$$P(X=1)=\frac{\left(C_4^1\times C_6^1\times C_4^1\right)+\left(C_6^2\times C_1^1\right)}{C_{10}^2\times C_5^1}=\frac{111}{225}=\boxed{\frac{37}{75}}$$

- لما $(X=2)$: سحب (2سوداء من U_1 و1غير سوداء من U_2) أو (1سوداء و 1حمراء من U_1 و 1سوداء من U_2)

$$P(X=1)=\frac{\left(C_4^2\times C_4^1\right)+\left(C_6^1\times C_4^1\times C_1^1\right)}{C_{10}^2\times C_5^1}=\frac{48}{225}=\boxed{\frac{16}{75}}$$

- لما $(X=3)$: سحب (2سوداء من U_1 و1سوداء من U_2)

$$P(X=3)=\frac{C_4^2\times C_1^1}{C_{10}^2\times C_5^1}=\frac{6}{225}=\boxed{\frac{2}{75}}$$

ومنه :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{75}$	$\frac{37}{75}$	$\frac{16}{75}$	$\frac{2}{75}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي ، التباين ، الإنحراف :

- الأمل الرياضياتي: $E(X)=\sum_1^4 X_i P_i=\frac{75}{75}=\boxed{1}$

- الإنحراف المعياري: $V(X)=\sum_{1}^{4}(X_i-E(X))^2 P_i=\boxed{\frac{44}{75}}$

- التباين : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\boxed{\sqrt{\frac{44}{75}}}$

حل التمرين02:

1)أ) دراسة إتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ و من أجل كل $x\in[0,+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

من أجل كل $x\in[0,+\infty[$, $f'(x)>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$

ب) تبيان أنه إذا كان $x\in[1,\sqrt{3}]$ فإن $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$

لدينا $x\in[1,\sqrt{3}]$ ومنه $1\le x\le\sqrt{3}$

وبالتالي $f(1)\le f(x)\le f(\sqrt{3})$ (لأن الدالة f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ أي أنها تحافظ على ترتيبها)

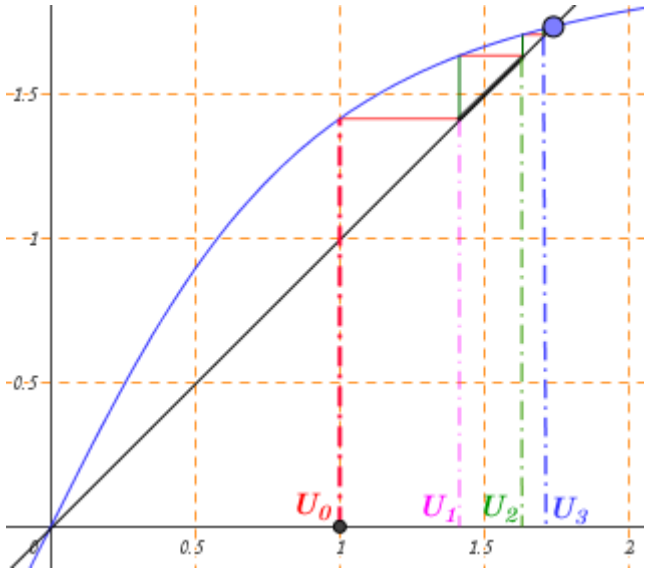
أي $1\le\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{3}$ وبالتالي فإن $f(x)\in[1,\sqrt{3}]$

2)أ) تمثيل الحدود u_0 , u_1 و u_2 على محور الفواصل :

لدينا : $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,u_1)$

نسقط M_0 على (Δ) وفق (ox), ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C) وفق (oy) فنحصل على M_1

وهكذا نكرر نفس العملية فنحصل على M_2



التخمين : المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو $\sqrt{3}$

ب) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1\le u_n\le\sqrt{3}$:

نسمي $p(n)$ الخاصية : $1\le u_n\le\sqrt{3}$

❶ من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=1$ و $1\le1\le\sqrt{3}$

ومنه $p(0)$ صحيحة .

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n

أي $1\le u_n\le\sqrt{3}$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$

لدينا $1\le u_n\le\sqrt{3}$ ومنه $1\le f(u_n)\le\sqrt{3}$ حسب سؤال (1-ب)

أي $1\le u_{n+1}\le\sqrt{3}$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ج) تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$،

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n\left(2-\sqrt{1+u_n}\right)}{\sqrt{1+u_n}}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}-u_n=\frac{2u_n-u_n\sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

$$=\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}$$

* استنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n\le\sqrt{3}$ ومنه $u_n^2\le3$

وبالتالي فإن $u_n^2+1\le4$ ومنه $\sqrt{u_n^2+1}\le2$

وبالتالي $-\sqrt{u_n^2+1}\ge-2$ ومنه $2-\sqrt{u_n^2+1}\ge0$

ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $u_n\ge1$ وبالتالي $u_n>0$

ينتج أن $u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)>0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا $\sqrt{u_n^2+1}>0$

ومنه $\frac{u_n\left(2-\sqrt{u_n^2+1}\right)}{\sqrt{u_n^2+1}}>0$

أي $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

د) استنتاج أن (u_n) متقاربة :

بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$ إذن (u_n) متقاربة

3 / أ / البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2}=\frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}{3-\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}=\frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\frac{3-u_n^2}{u_n^2+1}}$$

ومنه $v_{n+1}=4\left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2}\right)=\boxed{4v_n}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$ وحدها الأول

$$v_0=\frac{u_0^2}{3-u_0^2}=\frac{1}{2}$$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n

$$v_n=v_0\times q^n=\frac{1}{2}\times 4^n=2^{2n-1}$$

* استنتاج u_n بدلالة n

$v_n=\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$ تكافئ $v_n\left(3-u_n^2\right)=u_n^2$

تكافئ $u_n=\sqrt{\frac{3v_n}{v_n+1}}$ ومنه $u_n=\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}+1}}$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا : $\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}+1}}=\sqrt{\frac{3\times 2^{2n-1}}{2^{2n-1}\left(1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)}}=\sqrt{\frac{3}{1+\frac{1}{2^{2n-1}}}}$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}=0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{3}$

4) حساب p_n بدلالة n :

$$p_n=\frac{\left(u_0\times u_1\times.....\times u_n\right)^2}{\left(3-u_0^2\right)\left(3-u_1^2\right)\times.....\left(3-u_n^2\right)}$$

$$=\frac{u_0^2}{3-u_0^2}\times\frac{u_1^2}{3-u_1^2}\times.....\times\frac{u_n^2}{3-u_n^2}$$

$$=v_0\times v_1\times.....\times v_n$$

$$=v_0\times\left(v_0\times q\right)\times.....\times\left(v_0\times q^n\right)$$

$$=v_0^{n+1}\left(q\times q^2\times.....\times q^n\right)$$

$$=v_0^{n+1}q^{1+2+....+n}=v_0^{n+1}q^{\frac{n(1+n)}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\times 4^{\frac{n(1+n)}{2}}=2^{-n-1}\times 2^{n^2+n}=2^{n^2-1}$$

حل التمرين03:

I) 1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2-6z+21=0$$

$S=\left\{3+2i\sqrt{3}\,,3-2i\sqrt{3}\right\}$.

ب) استنتاج حلول المعادلة (II): لدينا (II) تكافئ

$$\left(\bar{z}+3+i\sqrt{3}\right)^2-6\left(\bar{z}+3+i\sqrt{3}\right)+21=0$$

ومنه $\bar{z}+3+i\sqrt{3}=3+2i\sqrt{3}$ أو $\bar{z}+3+i\sqrt{3}=3-2i\sqrt{3}$

ومنه $\bar{z}=i\sqrt{3}$ أو $\bar{z}=-3i\sqrt{3}$

إذن $z=-i\sqrt{3}$ أو $z=3i\sqrt{3}$ ومنه

$S'=\left\{-i\sqrt{3}\,,3i\sqrt{3}\right\}$

2) أ) تبيان أن النقط A,B,C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$:

$\Omega A=\left|z_A-z_\Omega\right|=\left|i\sqrt{3}-3\right|=2\sqrt{3}.$ و

$\Omega B=\Omega C=\Omega D=2\sqrt{3}.$ و منه النقط A,B,C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(3)$ و طول نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$.

ب) تبيان أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

لدينا : $z_D=3-2i\sqrt{3}$ ومنه: $z_E=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

طبيعة المثلث BEC :

لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني : $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{3}.$ و $BC=BE.$ ومنه

المثلث BEC متقايس الأضلاع.

3) إثبات أنه يوجد دوران r مركزه B و يحول E الى C:

$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يعني $z_C-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_E-z_B\right)$ ومنه يوجد دوران r مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ يحول النقطة E الى C.

4) أ) طبيعة S و عناصره:

S تشابه مباشر مركزه $B\left(-i\sqrt{3}\right)$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ و نسبته 2.

ب) تعيين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي

تحقق: $(z-z_\Omega)\left(\bar{z}-z_\Omega\right)=-\left(z_A-z_B\right)^2$.....(*) :

(*) تكافئ $(z-z_\Omega)\overline{(z-z_\Omega)}=-\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

أي أن $|z-z_\Omega|^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$ ومنه $|z-z_\Omega|=2\sqrt{3}$

أي أن : $\Omega M=2\sqrt{3}$ ومنه مجموعة النقط (Γ) هي الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(3)$ و نصف قطرها $R=2\sqrt{3}$.

ج) طبيعة (Γ') صورة (Γ) بـ S و عناصرها:

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي دائرة (C') مركزها Ω'

صورة Ω بـ S إذن $z_{\Omega'}=6-3i\sqrt{3}$

وطول نصف قطرها $R'=2R=2\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

حل التمرين04:

1) * g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+e$

أ) دراسة تغيرات الدالة g

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=e$ ، $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}g(x)=-\infty$

g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$g'(x)=0$ تكافئ $1-\ln x=0$ أي أن $x=e$

$g'(x)>0$ تكافئ $1-\ln x>0$ أي أن $x<e$

ومنه إشارة $g'(x)$:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

*جدول التغيرات :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}+e$	↘	e

ب) حساب $g\left(\dfrac{1}{e}\right)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$ ومنه إشارة $g(x)$:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e$

أ) تبيان أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$f'(x)=g(x)$

واستنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{1}{x}\ln x+e=\dfrac{\ln x}{x}+e=g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ إذن :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$

ومتزايدة تماما على المجال $\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right[$

ب) تعيين نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$:

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e\right)=+\infty$ ،

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}\left(\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+ex-e\right)=+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}-e$	↗	$+\infty$

3) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$(T):y=ex-e$

4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T):

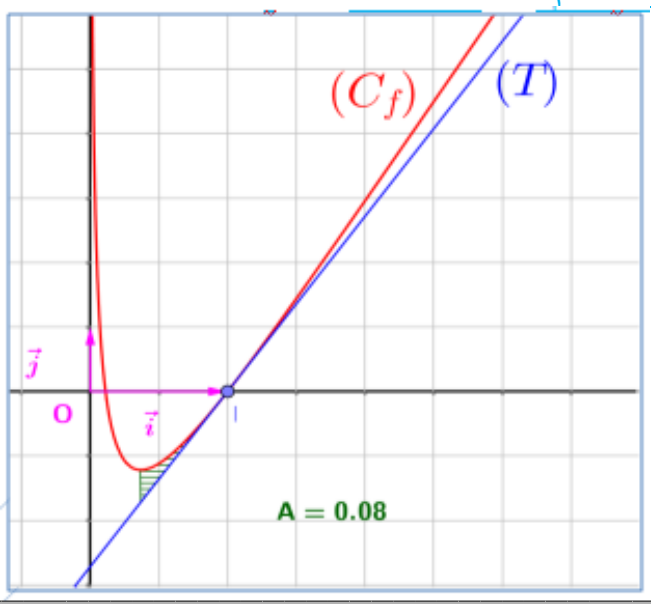
لدينا : $f(x)-(ex-e)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

ومنه من أجل كل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$ لدينا :

$f(x)-(ex-e)>0$ و $f(x)-(ex-e)=0$ من أجل $x=1$

إذن (C_f) يقع فوق (T) على المجالين $]0;1[\cup]1;+\infty[$ و (C_f) يقطع (T) في النقطة $I(1;0)$.

5 / رسم (T) و المنحنى (C_f):



6)أ) تعيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$:

الدالة h تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا :

$$h'(x)=(\ln x)^2+(a+2)\ln x+a+b$$

ولدينا $h'(x)=(\ln x)^2$

بالمطابقة نجد $\begin{cases}a+2=0\\a+b=0\end{cases}$ أي أن : $\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$

ب * حساب المساحة A :

لدينا (C_f) يقع فوق المستقيم (T) على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ومنه

$$A=\int_{e^{-1}}^{1}\left(f(x)-(ex-e)\right)dx=\int_{e^{-1}}^{1}\frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\left((\ln x)^2-2\ln x+2\right)\right]_{e^{-1}}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{5}{e}\right)=\frac{2e-5}{2e}\quad ua$$

ومنه $A=\frac{2e-5}{2e}\times 2\times 1\,cm^2=\frac{2e-5}{e}cm^2\simeq 0.16\,cm^2$

7/أ *إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$k(x)=f\left(e^{2x}\right)$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f\left(e^{2x}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln e^{2x}\right)^2+ee^{2x}-e=\frac{1}{2}(2x)^2+e^{2x+1}-e$$

$$=2x^2+e^{2x+1}-e=k(x)$$

ب / تعيين اتجاه تغير الدالة k :

الدالة k تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $k'(x)=\left(f\left(e^{2x}\right)\right)'=2e^{2x}\,f'\left(e^{2x}\right)$

ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'\left(e^{2x}\right)$

$f'\left(e^{2x}\right)=0$ تكافئ $e^{2x}=e^{-1}$ أي أن $x=\frac{-1}{2}$

$f'\left(e^{2x}\right)<0$ تكافئ $0<e^{2x}<e^{-1}$ أي أن $x<\frac{-1}{2}$

إذن :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$

ومنه الدالة k متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right]$

ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات الدالة k :

$$k\left(\frac{-1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{3}{2}-e$$

$$\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}f\left(e^{2x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}k(x)=\lim_{x\to+\infty}f\left(e^{2x}\right)=+\infty$$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$
$k(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}-e$	↗ $+\infty$

تريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 03 — ثانوية 18 فيفري بالحمادية

الشعبة : 3 علوم تجريبية — دورة : أفريل 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول : (05 نقاط)

I) يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، حيث : $(n \geq 2)$ و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء :

1) ما إحتمال سحب كرتين بيضاوين ؟ .

2) نسمي $p(n)$ إحتمال سحب كرتين من نفس اللون

أ) بيّن أنّ : $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.

ب) أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$ ، ثمّ فسّر النتيجة المحصّل عليها .

II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب و يقوم بنفس التجربة الأولى : في البداية يدفع $30DA$ إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب $40DA$ ، و إذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب $5DA$.

و ليكن المتغيّر العشوائي X هو الربح الصافي للاعب : 1) ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X ؟ .

2) أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

III) فيما يلي نعتبر $n = 2$ ، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع :

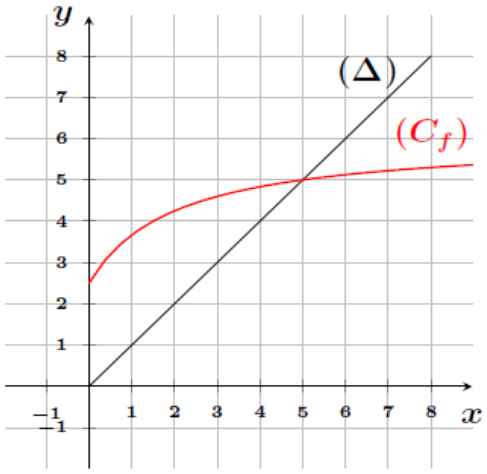
1) شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج التجربة .

2) أحسب إحتمال الحوادث: A : "سحب كرتين من نفس اللون" ، B : "سحب كرة خضراء واحدة على الأقل" .

3) نفرض أنّ الكرية في السحبة الأولى كانت خضراء، ما إحتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية ؟ .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{6x+5}{x+2}$ ، و ليكن (C_f) المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل)



I) تحقق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 5$.

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة ؟ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \dfrac{u_n - 5}{u_n + 1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n . ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

5) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \dfrac{1}{u_0+1} + \dfrac{1}{u_1+1} + ... + \dfrac{1}{u_n+1}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب Z حيث: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ) بيّن أنه إذا كان: Z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ ، فإن $\overline{Z_0}$ حلا لها أيضا ($\overline{Z_0}$ مرافق Z_0)

ب) أحسب $P(-1)$ ، ثم بيّن أنه من أجل كل Z من $\mathbb{C}$: $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) $(O;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد و متجانس للمستوى المركب .

نعتبر النقط A ، B و C والتي لواحقها على الترتيب $Z_A=-1$ ، $Z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $Z_C=2-i\sqrt{3}$.

أ) أحسب $|Z_C-Z_A|$ ، $|Z_B-Z_A|$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$.

ج) أحسب طويلة وعمدة للعدد المركب $L=\dfrac{Z_A-Z_C}{Z_G-Z_C}$ ، ثم أكتب L على الشكل الأسي .

د) استنتج طبيعة المثلث GAC هـ) بيّن أن L^{2019} تخيلي صرف .

و) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد L^n حقيقيا .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+2-e^x$.

1) أدرس تغيرات الدالة g على $[0;+\infty[$ ، و عين نهاية g عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;+\infty[$.

ب) تحقق أن: $1,14<\alpha<1,15$ .. ثم إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0;+\infty[$.

II) نعرّف على المجال $[0;+\infty[$ الدالة f كما يلي: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، وليكن (C_f) منحناها البياني في م م م م

1) أ) بيّن أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل ، x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $[0;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث: $u(x)=e^x-xe^x-1$

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة u على $[0;+\infty[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$.

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

د) أرسم كلا من (T) و المنحني (C_f) ، الوحدة: $4cm$.

III) 1) عيّن دالة أصلية F للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

حل التمرين01:

I) أوّلا نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب :

$$C_{n+8}^{2}=\frac{(n+8)!}{2!(n+6)!}=\frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!}$$

$$=\boxed{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$$

1) إحتمال سحب كرتين بيضاوين :

أولا نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب :

$$C_{n}^{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^{2}-n}{2}$$

إذن إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو:

$$\frac{\frac{n^{2}-n}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}=\boxed{\frac{n^{2}-n}{(n+8)(n+7)}}\ .$$

2) أ) بيان أنّ : $P(n)=\frac{n^{2}-n+26}{(n+8)(n+7)}$:

$P(n)$ هي إحتمال سحب كرتين من نفس اللون ، إذن :

$$P(n)=\frac{C_{n}^{2}+C_{5}^{2}+C_{3}^{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}+10+3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}\ ،$$

أي: $P(n)=\frac{n^{2}-n+20+6}{(n+8)(n+7)}$ ومنه $P(n)=\boxed{\frac{n^{2}-n+26}{(n+8)(n+7)}}$

ب) حساب $\lim_{n\to\infty}P(n)$ ، ثم تفسيرالنتيجة :

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}-n+26}{(n+8)(n+7)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2}}{n^{2}}=\boxed{1}\ .$$

التفسير : الحادثة " **سحب كرتين من نفس اللون** " تكون حادثة أكيدة لما n يكون كبيرا بالقدر الكافي .

II) 1) قيم المتغير العشوائي X :

المتغير العشوائي يعبّر عن الربح الجبري للاعب (الفرق بين المبلغ المدفوع أولا و المبلغ الذي يكسبه) ،

و منه قيم المتغير العشوائي X هي: $(X=10):X=40-30=\boxed{10}$

$(X=-25):X=5-30=\boxed{-25}$

2) تعيين قانون الإحتمال ،و حساب أمله الرياضي:

- حالة $(X=10)$: أي الكرتان المسحوبتان من نفس اللون ،

إذن : $P(X=10)=P(n).....(n=4)$ ، أي :

$$P(X=10)=\frac{38}{132}=\boxed{\frac{19}{66}}\ .$$

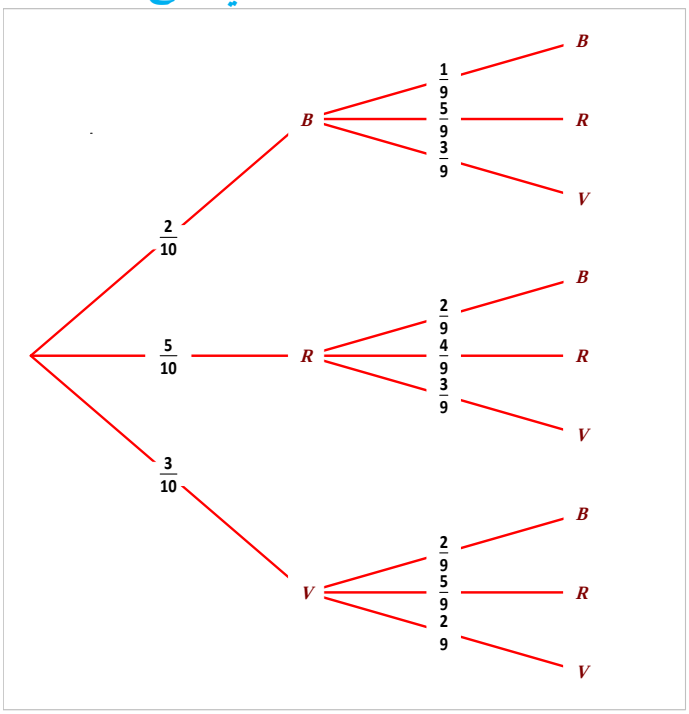
- حالة $P(X=-25)$: أي الكرتان المسحوبتان مختلفتان في اللون (الحادثة العكسية لـ $P(n)$) ، إذن :

$$P(X=-25)=1-\frac{19}{66}=\boxed{\frac{47}{66}}$$

حساب الأمل الرياضي : $E(X)=\sum_{i=1}^{2}X_i.P_i$ ، أي :

$$E(X)=\frac{(10\times19)+(-25\times47)}{66}=\boxed{\frac{-985}{66}}$$

III) 1) تشكيل شجرة الإحتمالات التي تنمذج الوضعية :



2) حساب إحتمال الحوادث التالية:

- سحب كرتين من نفس اللون :

$$P(A)=\left(\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)$$

أي: $P(A)=\frac{28}{90}=\boxed{\frac{14}{45}}$

- سحب كرة خضراء واحدة على الأقل :

$$P_1(B)=\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\right)$$

أي: $P(B)=\frac{48}{90}=\boxed{\frac{8}{15}}$

3) حساب الإحتمال الشرطي: علما أنّ الكرة المسحوبة أولا خضراء فإحتمال أن سحب كرة حمراء ثانيا هو : $\frac{5}{9}$

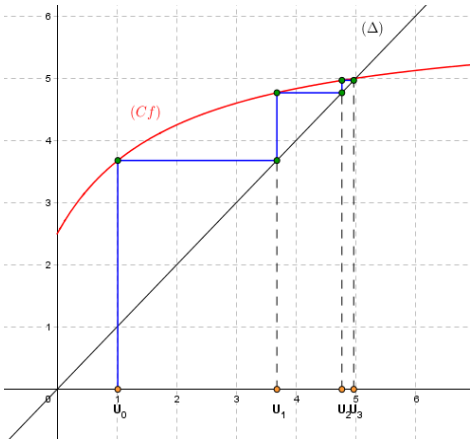
(أنظر شجرة الإحتمالات)

حل التمرين02:

I) التحقق أنّ f متزايدة على $[0;+\infty[$:لدينا :

$f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}>0$ ،ومنه الدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$

II) 1) أ) تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3:(الشكل)



ب) التخمين:

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ، و تتقارب حدودها نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

2) البرهان أنّ: $1\le u_n\le 5$:نسمي الخاصية: $P(n):1\le u_n\le 5$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي : $1\le u_0\le 5$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $1\le u_n\le 5$ صحيحة و نبين أن $1\le u_{n+1}\le 5$.

- لدينا فرضا أنّ: $1\le u_n\le 5$ ، و بما أنّ f متزايدة على $[1;5]$ ، فإنّ: $f(1)\le f(u_n)\le f(5)$ ، أي :

$5\le u_{n+1}\le \frac{11}{3}$ ، ومنه : $1\le u_{n+1}\le 5$.

وأخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها:

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة : $u_{n+1}-u_n$:

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{6u_n+5}{u_n+2}-u_n=\frac{-u_n^2+4u_n+5}{u_n+2}$. الآن

ندرس إشارة $-u_n^2+4u_n+5$ على المجال $[1;5]$:

بعد الدراسة نلاحظ أنّه على المجال $[1;5]$:

$-u_n^2+4u_n+5\ge 0$ ، و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

- المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى ، فهي متقاربة.

4)أ) بيان أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا: $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$ ،أي : $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{6u_n+5}{u_n+2}-5}{\frac{6u_n+5}{u_n+2}+1}$

$=\frac{\frac{6u_n+5-5u_n-10}{u_n+2}}{\frac{6u_n+5+u_n+2}{u_n+2}}=\frac{u_n-5}{7u_n+7}=\frac{1}{7}\times\frac{u_n-5}{u_n+1}$

و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{7}v_n$ ، إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$ ، و حدها الأول : $v_0=-2$.

ب) التعبير عن v_n بدلالة n و u_n بدلالة n:

- عبارة v_n : $v_n=v_0\times q^n$ ، أي : $v_n=-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$.

- عبارة u_n : لدينا $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$ أي: $v_n(u_n+1)=u_n-5$

، أي: $v_nu_n+v_n=u_n-5$ ، أي :

$v_nu_n-u_n=-v_n-5$ ، أي : $u_n(v_n-1)=-v_n-5$ ، و

منه : $u_n=\frac{-v_n-5}{v_n-1}$ ، أي: $u_n=\frac{-2\left(\frac{1}{7}\right)^n-5}{-2\left(\frac{1}{7}\right)^n-1}$.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n): نعلم أنّ : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ ،

لأنّ : $-1<\frac{1}{7}<1$ ، و منه : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=5$.

5) حساب المجموع S_n :

لدينا : $S_n=\frac{1}{u_0+1}+\frac{1}{u_1+1}+....+\frac{1}{u_n+1}$. نعلم أنّ :

$v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$،أي: $v_n=\frac{u_n+1-6}{u_n+1}$ أي: $v_n=1-\frac{6}{u_n+1}$ ومنه:

$1-v_n=\frac{6}{u_n+1}$ ، أي: $\frac{1}{u_n+1}=\frac{1-v_n}{6}$ (بعد القسمة على6).

إذن: $S_n=\frac{1-v_0}{6}+\frac{1-v_2}{6}+....+\frac{1-v_n}{6}$

أي : $S_n=\frac{1}{6}\left[\underbrace{(1+1+....1)}_{n\text{ مرة}}-(v_0+v_2+....+v_n)\right]$،

أي : $S_n = \frac{1}{6}\left[(n+1) - v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ ،

أي : $S_n = \frac{1}{6}\left[(n+1) - 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{7}}\right]$ ،

أي : $S_n = \frac{1}{6}\left[n+1+2\times\frac{7}{6}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)\right]$ ،

و منه : $S_n = \boxed{\frac{1}{6}\left[n+1+\frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)\right]}$.

حل التمرين03:

1) أ) نضع: $P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 \ldots\ldots (I)$.

Z_0 حل للمعادلة $P(z)=0$ معناه: $Z_0^3 - 3Z_0^2 + 3Z_0 + 7 = 0$

ومنه $\overline{Z_0^3 - 3Z_0^2 + 3Z_0 + 7} = 0$ وبتطبيق خواص المرافق نجد:

$\left(\overline{Z_0}\right)^3 - 3\left(\overline{Z_0}\right)^2 + 3\overline{Z_0} + 7 = 0$ إذن: $\boxed{\overline{Z_0}}$ حل للمعادلة $\boxed{(I)}$

ب) حساب: $P(-1)$ بالتعويض في (I) نجد $P(-1)=0$

- تعيين a, b بحيث: $P(z) = (z+1)\left(z^2 + az + b\right)$

باستعمال المطابقة نجد: $a=-4$, $b=7$

معناه: $P(z) = (z+1)\left(z^2 - 4z + 7\right)$

ج) حل المعادلة $P(z)=0$ معناه: $\begin{cases} z+1=0 \\ z^2 - 4z + 7 = 0 \ldots\ldots (1) \end{cases}$

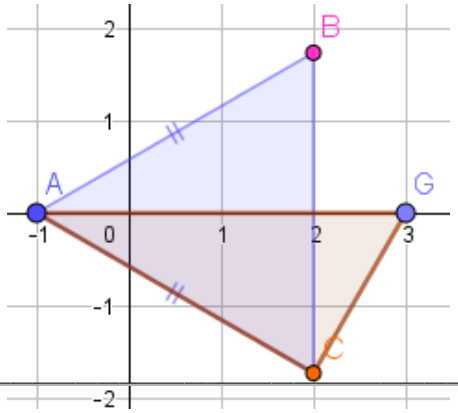
من (1) فإن : $\Delta = -12 = \left(i2\sqrt{3}\right)^2$ للمعادلة حلان هما :

$Z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ و $Z_1 = 2 - i\sqrt{3}$

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي:

$S = \boxed{\left\{-1\ ;\ 2-i\sqrt{3}\ ;\ 2-i\sqrt{3}\right\}}$

2) في المستوى المركب نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب: $Z_A = -1$ ، $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$



أ) $|Z_C - Z_A| = \left|2 - i\sqrt{3} - (-1)\right| = \left|3 - i\sqrt{3}\right| = \boxed{2\sqrt{3}}$

$|Z_B - Z_A| = \left|2 + i\sqrt{3} - (-1)\right| = \left|3 + i\sqrt{3}\right| = \boxed{2\sqrt{3}}$

معناه: $|Z_C - Z_A| = |Z_B - Z_A|$ يكافئ : $\boxed{AB = AC}$

ومنه: المثلث ABC متساوي الساقين

ب) تعيين Z_G لاحقة G مرجح: $\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$

$$Z_G = \frac{(-1)Z_A + 2Z_B + 2Z_C}{3}$$

$$= \frac{(-1)(-1) + 2\left(2 + i\sqrt{3}\right) + 2\left(2 - i\sqrt{3}\right)}{3} = \boxed{3}$$

- ومنه: $Z_G = \boxed{3}$

ج) حساب طويلة وعمدة L حيث : $L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$

$$L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C} = \frac{(-1) - \left(2 - i\sqrt{3}\right)}{(3) - \left(2 - i\sqrt{3}\right)}$$ لدينا :

$$= \frac{-3 + i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \boxed{i\sqrt{3}}$$

إذن : $\begin{cases} |L| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} \\ A\,rg(L) = A\,rg\left(i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

ومنه الشكل الأسي للعدد L هو : $L = \boxed{\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$

د) استنتاج طبيعة المثلث GAC :

$Arg(L) = \frac{\pi}{2}$ وتكافئ : $\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

إذن المثلث GAC قائم في النقطة C .

هـ) تبيان أن L^{2019} تخيلي صرف:

$$\left(L\right)^{2019} = \left(\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{2019}$$

لدينا حسب موافر: $= \left(\left(\sqrt{3}\right)^{2019} e^{i\left(\frac{2019\pi}{2}\right)}\right)$

حيث: $\frac{2019\pi}{2} = 1008\pi + \frac{3\pi}{2} \equiv \boxed{\frac{3\pi}{2}}\ [2\pi]$

ومنه: $\left(L\right)^{2019} = \boxed{\left(\sqrt{3}\right)^{2019} \times (-i)}$

وهذا معناه أن: L^{2019} تخيلي صرف

و) تعيين قيم n التي يكون من أجلها العدد L^n حقيقيا:

لدينا $(L)^n=\left(i\sqrt{3}\right)^n$ معناه: $(L)^n=\left(\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}}\right)^n$

ومنه $(L)^n=\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$

$(L)^n$ حقيقي معناه عمدته تكون من الشكل: $\theta=k\pi$

أي أن: $Arg\,(L)^n=k\pi$

إذن: $\frac{n\pi}{2}=k\pi$ ومنه: $n=2k$

حل التمرين04:

الجزء الأول: 1) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=1-e^x$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g'(x)\le 0$.

الخلاصة: الدالة g متناقصة على $[0;+\infty[$.

- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-e^x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	↘	$-\infty$

2)أ) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;+\infty[$:

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $[0;+\infty[$ و لدينا، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\times\lim\limits_{x\to 0} g(x)<0$ و بتالي حسب ن ق م فإنه يوجد عدد حقيقي α من $[0;+\infty[$ حيث $g(\alpha)=0$.

ب) التحقّق أنّ: $1,14<\alpha<1,15$: بما أنّ :

$\begin{cases} g(1,14)=0,01 \\ g(1,15)=-0,008 \end{cases}$ أي $g(1,14)\times g(1,15)<0$ ، فإن :

$g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $1,14<\alpha<1,15$.

ج) إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$	

الجزء الثاني: لدينا : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$

1)أ) بيان أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

لدينا: $f(x)=\frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{xe^x+1}{e^x}}=\frac{e^x-1}{xe^x+1}=\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x+\frac{1}{e^x}}=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ،

إذن : $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، و هو المطلوب .

ب) إستنتاج نهاية f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\right)$ ، نضع $\begin{cases} -x=t \\ x\to+\infty \\ t\to-\infty \end{cases}$ ، أي :

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\frac{1-e^t}{-t+e^t}\right)=0$ ، لأنّ : $\begin{cases} \lim\limits_{t\to-\infty} e^t=0 \\ \lim\limits_{t\to-\infty}\frac{1}{-t}=0 \end{cases}$.

2) أ) بيان أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$:

$f'(x)=\frac{e^x\times g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$:

الدالة f قابلة للإستقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{e^x\left(xe^x+1\right)-\left(e^x+xe^x\right)\left(e^x-1\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{\left(xe^x+1\right)^2}=\frac{xe^x+2e^x-e^{2x}}{\left(xe^x+1\right)^2}$$

أي: $f'(x)=\frac{e^x\times\left(x+2-e^x\right)}{\left(xe^x+1\right)^2}$ ،ومنه: $f'(x)=\frac{e^x\times g(x)}{\left(xe^x+1\right)^2}$

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ،و تشكيل جدول تغيّراتها :

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	

- الدالة f متزايدة تماما على $[0;\alpha[$

- الدالة f متناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$

-جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	0 ↗ $f(\alpha)$ ↘		0
4			

ج) بيان أنّ : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ ، واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$ ، و لدينا أيضا : $g(\alpha)=0$ ،

أي : $\alpha+2-e^{\alpha}=0$ ، أي : $e^{\alpha}=\alpha+2$ ، الآن نعوض قيمة e^{α} في $f(\alpha)$ فنجد :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$$ ،

و منه : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ وهو المطلوب .

- إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$: لدينا $1,14<\alpha<1,15$ ،أي :

$2,14<\alpha+1<2,15$ ،أي : $\frac{1}{2,15}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{2,14}$

و منه : $0,465<f(\alpha)<0,467$.

3) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

، أي : $(T):y=x$ ، لأنّ : $\begin{cases}f'(0)=1\\f(0)=0\end{cases}$.

4) أ) التحقق أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$:

لدينا : $f(x)-x=\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$. $u(x)=e^x-xe^x-1$

$$f(x)-x=\frac{e^x-1}{xe^x+1}-x$$

$$=\frac{e^x-1-x\left(xe^x+1\right)}{xe^x+1}=\frac{(x+1)\left(e^x-xe^x-1\right)}{xe^x+1}$$

و منه : $f(x)-x=\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة u ، واستنتاج إشارة $u(x)$:

الدالة u قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$:

$u'(x)=e^x-\left(e^x+xe^x\right)=-xe^x$ ، و منه : $u'(x)\le 0$.

إذن u متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ، و لدينا أيضا :

، من هذا و ذاك نستنتج أن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=-\infty\\u(0)=0\end{cases}$

$u(x)\le 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$.

ج) إستنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة لـ (T):

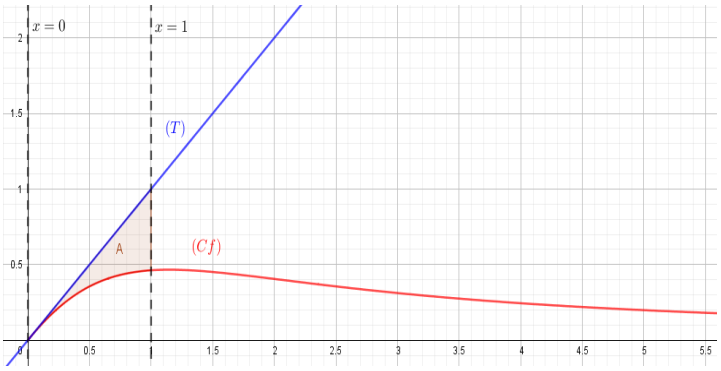
لاستنتاج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) يكفي دراسة إشارة : $\frac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$.

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $xe^x+1\ge 0$ ، إذن الإشارة من إشارة $(x+1)\times u(x)$.

إذن نلخص الوضعية في الجدول المقابل .

x	0	$+\infty$
$(x+1)$	$+$	
$u(x)$	$-$	
$(x+1)u(x)$	$-$	
الوضعية	(C_f) يقع تحت (T) / (T) يمس (C_f)	

د) رسم كلا من (T) و المنحني (C_f) :



الجزء الثالث :

1) تعيين دالة أصلية F للدالة f على المجال $[0;+\infty[$:

نستعمل هنا العبارة التالية : $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، نلاحظ أنّ : $f(x)=\frac{U'}{U}$ ، و منه : $F(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)+c$ ،

حيث c ثابت حقيقي .

2) حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) وَ (T) و محور التراتيب و $x=1$:

أي : $A=\int_0^1 x-f(x)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx$ ،

$$A=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}-\left(\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\right)\approx 0,1867$$

حساب A بـ cm^2 : أي : $0,1867\times 16=2,9872cm^2$.

و منه : $A=2,9872cm^2$.

نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 04 — التحضير الجيد للبكالوريا

الشعبة : علوم تجريبية — دورة : ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمسابقة توظيف ، يسحب مترشح عشوائيا بالتتالي وبدون إرجاع بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات ، 8 بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات وبطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية ، لايمكن التمييز بين البطاقات باللمس .

1) نعتبر الحادثتين A و B حيث : A هي الحادثة : "سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية"

B هي الحادثة : "سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين"

- احسب $P(A)$ و $P(B)$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

جـ) احسب الأمل الرياضي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

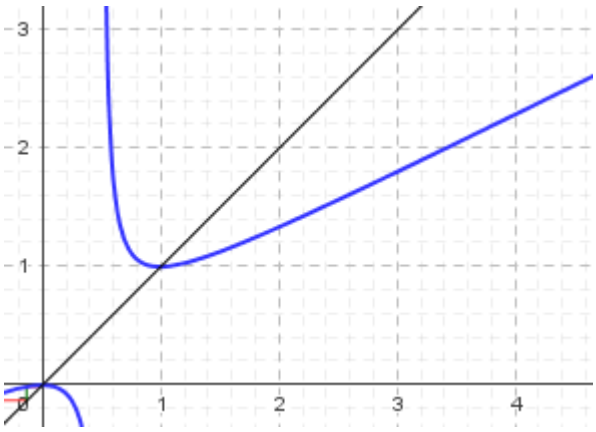
و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

ـ برهن أنه إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 1$

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$

أ) باستعمال الشكل المقابل , مثل الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n)



3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > 1$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بـ :

من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n=1-\frac{1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$

أ) برهن أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) اكتب عبارة w_n بدلالة n , ثم استنتج v_n بدلالة n

ج) بين أن $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$, ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots\ldots\ldots \times v_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = w_0 + w_1 + \ldots\ldots\ldots + w_n$.

الأستاذين: بلقاسم ع /مالجي ح

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ) عين الجذران التربيعيان للعدد المركب z_1 حيث $z_1 = 3+4i$

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركبة z : $(z^2+1)(z^2-3-4i)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب $z_A = 2+i$ ، $z_B = 2-i$ ، $z_C = i$ ، $z_D = -i$ و $z_E = -3i$ على الترتيب

أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

3) أ) عين العبارة المركبة للتشابة المباشر S الذي يحقق $S(C)=C$ و $S(A)=B$ محددا نسبته وزاويته

ب) عين صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه S

جـ) استنتج مساحة المثلث BCE بالتشابه S

4) أ) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $iz = 1+2ie^{i\theta}$ لما θ يمسح المجموعة $\mathbb{R}$

ب) بين أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x)=1+x+e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α . تحقق أن α من المجال $]-1.3;-1.2[$.

3) حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=\frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها .

1) أ) أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f .

ب) برهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$ . .

جـ) برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y=x$.

د) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم ، ثم ادرس وضعية (Γ) بالنسبة للمماس (T) .

هـ) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

2) H نقطة فاصلتها x (حيث $x \succ 0$) وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x)=MN$.

أ) بين أن $\varphi(x)=\frac{x}{1+e^x}$. ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\varphi'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot g(-x)$.

واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x=-\alpha$.

جـ) برهن أن $f(-\alpha)=1$.

د) برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) .اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x+m+x=0$.

4) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$.

ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0$ ، $x=1$ و $x=-\alpha$.

مديرية التربية لولاية برج بوعريريج	تصحيح الموضوع التجريبي 04	مديرية التربية لولاية البليدة
المستوى: 3 علوم تجريبية	2019 . 2018	الأستاذين: مالجي ع / بلقاسم ع

تصحيح التمرين 01:

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$

عدد عناصر مجموعة الإمكانيات هو

$$card(\Omega)=A_{10}^{2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=\frac{10\times 9\times 8!}{8!}=\boxed{90}$$

$$P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{A_{2}^{2}}{90}=\boxed{\frac{1}{45}}$$

$$P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{2\left(A_{8}^{1}\times A_{2}^{1}\right)}{90}=\boxed{\frac{16}{45}}$$

2) أ) تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X:

يمكن سحب بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية أو سحب بطاقتان تتعلقان بمادة الرياضيات أو سحب بطاقة تتعلق باللغة الفرنسيةواخرى بالرياضيات أوسحب بطاقة تتعلق بالرياضيات وأخرى تتعلق بالفرنسية ومنه $\boxed{X\in\{0,1,2\}}$

ب) تعيين قانون إحتمال المتغير العشوائي X

$$P(X=0)=\frac{A_{8}^{2}}{90}=\boxed{\frac{28}{45}}\quad ،$$

$$P(X=1)=P(B)=\boxed{\frac{16}{45}}$$

$$P(X=2)=P(A)=\boxed{\frac{1}{45}}$$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي X:

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

ج) حساب الأمل الرياضي والإنحراف المعياري:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_iP_i=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\boxed{\frac{18}{45}}$$

$$V(X)=\left[\sum_{i=i}^{3}(x_i)^2P_i\right]-E(X)^2$$

$$=0^2\times\frac{28}{45}+1^2\times\frac{16}{45}+2^2\times\frac{1}{45}-\left(\frac{18}{45}\right)^2=\boxed{\frac{64}{225}}$$

ومنه الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\simeq\boxed{0,53}$$

تصحيح التمرين 02:

1) البرهان على أنه إذا كان $x>1$ فإن $f(x)>1$

لندرس تغيرات الدالة f على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

* $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}}f(x)=\boxed{+\infty}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\boxed{+\infty}$

* الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ و من أجل كل $x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$: $f'(x)=\boxed{\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}}$

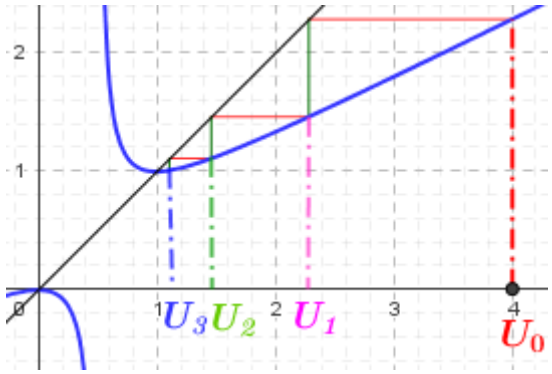
إشارة المشتقة:

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

وبما الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$، فهي تحافظ على ترتيبها معناه من أجل كل $x>1$ فإن $f(x)>f(1)$ أي $\boxed{f(x)>1}$

2) أ) تمثيل الحدود u_0 , u_1 , u_3 و u_4 على محور الفواصل :



التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة نحو 1

3)أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n>1$

من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=4$ أي $4>0$

ومنه $p(0)$ صحيحة .

نفـرض أن $p(n)$ صحيحـة من أجـل عـدد طبيعي n أي $u_n>1$ ونبرهن صحـة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$.

لدينـا $u_n>1$ ومنـه $\boxed{f(u_n)>1}$

(لأن الدالة f متزايدة على $]1,+\infty[$ فهي تحافظ على ترتيبها أي من أجل كل $x_1<x_2$ يكون $f(x_1)<f(x_2)$)

أي $u_{n+1}>1$ وهـذا يعنـي أن $p(n+1)$ صحيحـة

اذن: $\boxed{p(n) \text{ صحيحـة من أجـل كل عدد طبيعي } n}$

ب) تبيين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$،

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\frac{u_n^2-2u_n^2+u_n}{2u_n-1}$$

$$=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}=\boxed{\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}}$$

*** استنتـاج إتجـاه تغيرالمتتالية (u_n)**

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>1$ ومنه

$1-u_n<0$ و $2u_n-1>0$ وبالتالي فإن $u_n(1-u_n)<0$

ومنه $\dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}<0$ أي $\boxed{u_{n+1}-u_n<0}$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

*** استنتـاج أن (u_n) متقاربة :** بمـأن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقـاربة .

-أ) البرهـان على أن (w_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$w_{n+1}=ln(v_{n+1})=ln\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=ln\left(1-\frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n-1}}\right)$$

$$=ln\left(1-\frac{2u_n-1}{u_n^2}\right)=ln\left(\frac{u_n^2-2u_n-1}{u_n^2}\right)$$

$$=ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)^2=2ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)=2ln(v_n)=\boxed{2w_n}$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول

$$w_0=ln(v_0)=ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

ب) كتابة عبـارة w_n بدلالة n:

لدينا $\boxed{w_n=w_0\times q^n=2^n ln\left(\frac{3}{4}\right)}$

استنتـاج v_n بدلالة n : لدينا : $w_n=ln(v_n)$ تكافىء $v_n=e^{w_n}$

ومنه $v_n=e^{2^n ln\left(\frac{3}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

د) تبيين أن $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

$v_n=1-\dfrac{1}{u_n}$ تكافىء $u_n=\dfrac{1}{1-v_n}$ ومنه $\boxed{u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}}$

حسـاب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ بمـأن $0<\dfrac{3}{4}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}=0$

وبالتالي فإن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$

5) حساب بدلالة n الجداء P_n

لدينا : $P_n=v_0\times v_1\times.....\times v_n$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^{2^0}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2^1}\times.....\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2^0+2^1+.....+2^n}$$

لدينا $2^0+2^1+.....+2^n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول 1

وبالتالي فإن : $2^0+2^1+.....+2^n=\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}=2^{n+1}-1$

ومنه $P_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{2^0+2^1+.....+2^n}=\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1}-1}}$

استنتـاج بدلالة n المجموع S_n

$$S_n=w_0+w_1+.....+w_n$$

$$=ln(v_0)+ln(v_1)+.....+ln(v_n)$$

$$=ln(v_0\times v_1\times.....\times v_n)$$

$$=ln\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1}-1}\right)=\boxed{(2^{n+1}-1)ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

تصحيح التمرين03:

-أ) تعيين الجذران التربيعيان للعدد المركب z_1

ليكن $w=x+iy$ جذرا تربيعيا لـ z_1 ومنه $w^2=z_1$

$$w^2=z_1 \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$$

تكافئ $x=2$ و $y=1$ أو $x=-2$ و $y=-1$

إذن الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما: $2+i$ و $-2-i$

ب) الحل في $\mathbb{C}$ للمعادلة $(z+1)^2\left(z^2-3-4i\right)=0....(I)$

(I) تكافئ $z^2+1=0$ أو $z^2-3-4i=0$

تكافئ $z=i$ أو $z=-i$ أو $z=2+i$ أو $z=-2-i$

2)أ) كتابة z_2 على الشكل الأسي

$$z_2=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{i-2-i}{2-i-2-i}=-i$$

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC: لدينا :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{ومنه :} \quad \text{أي :} \begin{cases} \left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \end{cases}$$

إذن المثلث ABC قائم في A $\begin{cases} AC=AB \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

ومتساوي الساقين

3)أ) تعيين العبارة المركبة للتشابة المباشر S

العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل $z'=az+b$

حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$

لدينا : $S(A)=B$ تكافئ $z_B=az_A+b$

و $S(C)=C$ تكافئ $z_C=az_C+b$

ومنه $a=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=1-i$ و $b=(1-a)z_C=-1$

اذن العبارة المركبة للتشابه S هي $z'=(1-i)z-1$

تحديد نسبة وزاوية التشابه S لدينا : $a=1-i=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{4}\right)}$

اذن نسبة التشابه المباشر S هي $\sqrt{2}$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$

ب) تعيين صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه S

لدينا $S(A)=B$ ، لنعين صورة B بالتشابه S

لدينا $z'_B=(1-i)z_B-1=(1-i)(2-i)-1=-3i=z_E$

اذن $S(B)=E$ وبالتالي فإن صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه S هي القطعة المستقيمة $[BE]$

ج) استنتاج مساحة المثلث BCE بالتشابه S

لدينا $S(A)=B$, $S(C)=C$ و $S(B)=E$

ومنه صورة المثلث ABC بالتشابه S هي المثلث BCE

لدينا مساحة المثلث ABC هي

$$S_{ABC}=\frac{AC^2}{2}=\frac{|z_C-z_A|^2}{2}=2US \quad \text{وبالتالي فإن مساحة}$$

المثلث BCE هي $S_{BCE}=\left(\sqrt{2}\right)^2 S_{ABC}=4US$

4)أ) تعيين المجموعة (Γ)

$iz=1+2ie^{i\theta}$ تكافئ $-i(iz)=-i\left(1+2ie^{i\theta}\right)$

$z=-i+2e^{i\theta}$ تكافئ $z+i=2e^{i\theta}$

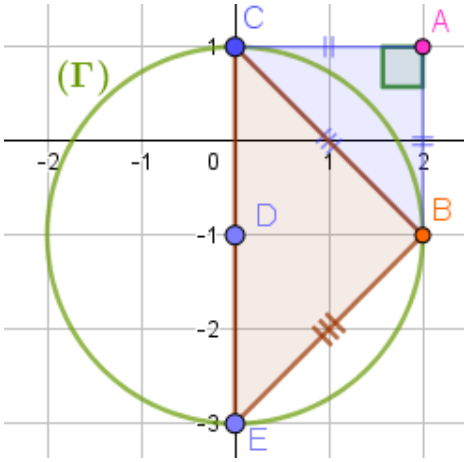
تكافئ $|z-z_D|=2$

اذن (Γ) هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=2$

ب) تبيين أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

لدينا : $DE=|z_E-z_D|=|-3i-(-i)|=2=r$

محققة إذن : E تنتمي إلى المجموعة (Γ)



تصحيح التمرين04:

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+x+e^x$

1) * $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\boxed{-\infty}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\boxed{+\infty}$

g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $g'(x)=1+e^x \succ 0$

*جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد في $\mathbb{R}$:

* g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\prec 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $\mathbb{R}$.

*لدينا: $g(-1.2)\,g(-1.3)=(-0.03)(0.10)\prec 0$

ومنه $-1.3\prec\alpha\prec-1.2$.

3) إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

* استنتاج إشارة $g(-x)$:

$g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ ومنه $x=-\alpha$.

$g(-x)\prec 0$ معناه $-x\prec\alpha$ ومنه $x\succ-\alpha$.

ومنه:

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$+$	0	$-$

II) f معرفة على $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$

1)أ) f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(1+e^x)-e^x(xe^x)}{(1+e^x)^2}=\boxed{\frac{e^x\cdot g(x)}{(1+e^x)^2}}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن: $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\succ 0$

إذن :الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{0}$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{1+e^x}\right)=\boxed{+\infty}$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

ب) نبرهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$: لدينا $g(\alpha)=0$ معناه:

$1+\alpha+e^\alpha=0$ أي: $e^\alpha=-(1+\alpha)$ نعوض نجد:

$$f(\alpha)=\frac{\alpha e^\alpha}{1+e^\alpha}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1}=\boxed{1+\alpha}$$

جـ) نبرهن أن (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته $y=x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{1+e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\left(\frac{-1}{e^{-x}+1}\right)\right]=0$$

د) كتابة معادلة المماس (T) لـ (Γ) عند مبدأ المعلم: $(T): y=\dfrac{1}{2}x$

*الوضعية: ندرس إشارة الفرق $f(x)-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}$

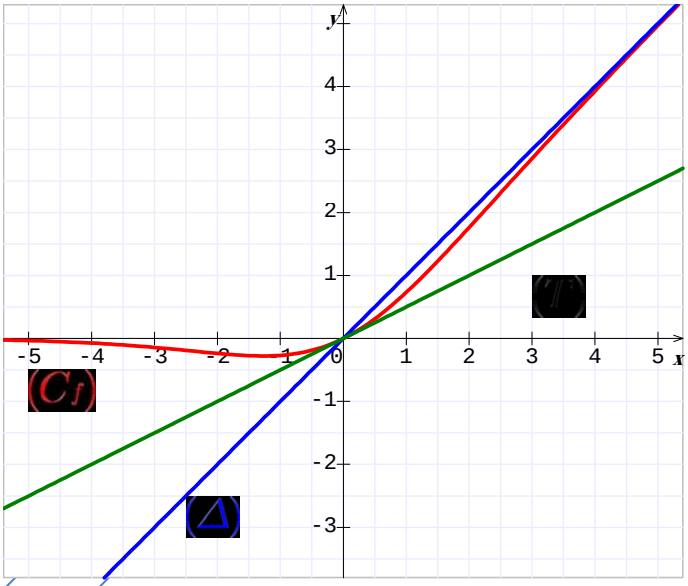
من إشارة الجداء $x(e^x-1)$ نجد :

من أجل $x\prec 0$ المنحنى (Γ) فوق المستقيم (T).

من أجل $x\succ 0$ المنحنى (Γ) فوق المستقيم (T).

من أجل $x=0$ يتقاطعان في النقطة $(0;0)$

هـ) الرسم:



2)أ) $\varphi(x)=MN=|x-f(x)|=\frac{x}{1+e^x}$.

ب) من أجل $x\succ 0$ الدالة φ قابلة للإشتقاق :

$$\varphi'(x)=\frac{(1+e^x)-xe^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x(e^{-x}+1-x)}{(1+e^x)^2}=\boxed{\frac{e^x\cdot g(-x)}{(1+e^x)^2}}$$

إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $g(-x)$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$

ومنه

نستنتج أن $\varphi(x)$ تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $x=-\alpha$

ومنه MN يكون أكبر ما يمكن حيث

$$MN=\varphi(-\alpha)=\frac{-\alpha}{1+e^{-\alpha}}$$

ج) نبرهن أن $f(-\alpha)=1$:

$$f(-\alpha)=\frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\frac{-\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{-\alpha}{-1-\alpha+1}=1$$

د) نبرهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي (Δ) :

$$f'(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}\cdot g(-\alpha)}{(1+e^{-\alpha})^2}=\frac{e^{-\alpha}(1-\alpha+e^{-\alpha})}{e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}+1}$$

ولدينا : $e^{\alpha}=-1-\alpha$ نعوض نجد:

$$f'(-\alpha)=\frac{e^{-2\alpha}(e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1)}{e^{-2\alpha}(1+2e^{\alpha}+e^{2\alpha})}$$

$$=\frac{-1-\alpha-\alpha(-1-\alpha)+1}{1+2(-1-\alpha)+(-1-\alpha)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\boxed{1}$$

معادلته: $(\Delta'):y=x+\alpha+1$

3) مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة حسب قيم الوسيط m :

$me^x+m+x=0$ يكافئ $m=\frac{-x}{(e^x+1)}$

أي أن $m+x=\frac{-x}{1+e^x}+x$ معناه $f(x)=x+m$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f)

مع المستقيم ذو المعادلة: $y=x+m$ الموازي لـ (Δ') و (Δ):

* $m\in]-\infty;\alpha+1[$ المعادلة: لا تقبل حلول

* $m=\alpha+1$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

* $m\in]\alpha+1;0[$ المعادلة تقبل حلين متمايزين موجبين تماما.

* $m=0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

* $m\in]0;+\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب تماما.

4)أ) البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$

لدينا $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$: ندرس إشارة الفرق نجد:

$f(x)-x=\frac{xe^x}{1+e^x}-x=\frac{-x}{1+e^x}\leq 0$ معناه: $f(x)\leq x$ ... (1)

من جهة أخرى ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{xe^x-e^x}{1+e^x}=\frac{e^x(x-1)}{1+e^x}\geq 0$$

معناه: من أجل $x\geq 1$: $f(x)\geq\frac{e^x}{1+e^x}$ ... (2)

من (1) و(2) نجد: من أجل $x\geq 1$: $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$

ب) إيجاد حصر لمساحة الحيز المستوي المحدد بـالمنحنى (Γ) والمستقيمات $x=1;y=0$ و $x=-\alpha$:

بما أن: $\frac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ فإن: $\int_1^{-\alpha}\frac{e^x}{1+e^x}dx\leq\int_1^{-\alpha}f(x)dx\leq\int_1^{-\alpha}xdx$

أي: $\left[\ln(1+e^x)\right]_1^{-\alpha}\leq\int_1^{-\alpha}f(x)dx\leq\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{-\alpha}$

ومنه $\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right)u.a\leq\int_1^{-\alpha}f(x)dx\leq\frac{1}{2}(\alpha^2-1)u.a$.

نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 05 — التحضير الجيد للبكالوريا

الشعبة : 3 علوم تجريبية — دورة : ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

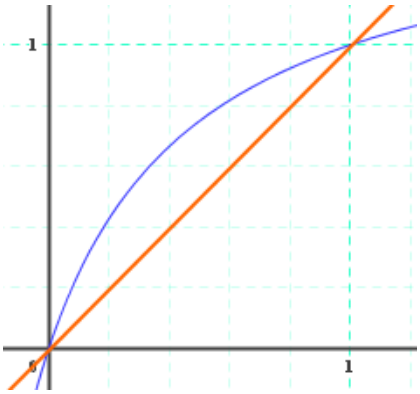
التمرين الأول: (04 نقاط)

الشكل التالي هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\dfrac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 للمتتالية (u_n) دون حسابها .مبرزا خطوط التمثيل .



ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) اثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\dfrac{1-u_n}{2u_n}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n=v_0+2\,v_1+2^2\,v_2+..+2^n\,v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times ...\times v_n$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : (E).... $z^2+2|z|^2-\dfrac{3}{4}=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) لتكن A , B و C ثلاث نقط من المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$$z_A=\frac{-1}{2}\ ،\ z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ،\ z_C=-(z_A+z_B)$$

أ) اكتب كلا من العددين z_A+z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بين أن : $z_C{}^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=z_A+z_B$

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة A وزاويته $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ونسبته $k=2$

أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S.

ب) أوجد لاحقتا النقطتين B' و C' صورتا النقطتين B و C على الترتيب بالتشابه المباشر S.

4) بين ان المبدأ O هو مركز ثقل المثلث ABC ثم عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$$

5) أنشئ النقطة H ذات اللاحقة z_H حيث: $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب .

الأستاذين: بلقاسم ع/مالجي ح

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق (علما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس).

1) احسب احتمالات الأحداث الآتية :

A : " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء " . B : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " .

C : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها .

- أحسب كلا من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج $P(X=2)$.

ب) اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، و يكسب $25\,DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .هل اللعبة مربحة له؟

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_2 .

- احسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

- ادرس اتجاه تغير الدالة h ،استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$.

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x)=-h(x)$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$.ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.3;0.4[$.

- استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصر له .

4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f) .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $(E)\ldots f(x)=-\frac{1}{2}x+m$

5) لتكن k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى (C_f) إلى المنحنى (C_k) (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}^*$

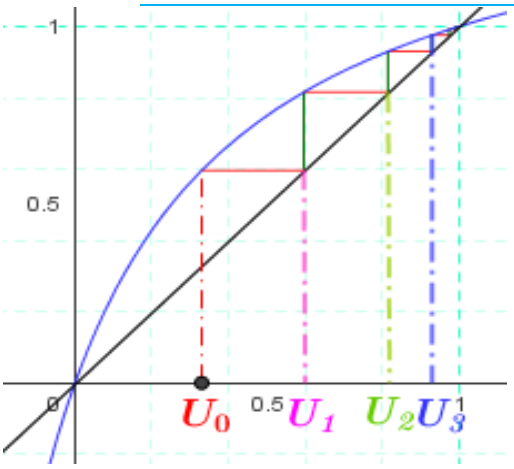
ب) اوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$.

ج) λ عدد حقيقي حيث: $\lambda>1$. أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ وفسر النتيجة هندسيا.

- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda)$.

تصحيح التمرين01:

1)أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$:



ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2)أ) اثبات من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec 1$

نبرهن البرهان بالتراجع

① من أجل $n=0$: $0\prec u_0\prec 1$ محققة لان: $u_0=\frac{1}{3}$

② نفرض أنمن أجل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec 1$ صحيحة

ونبرهن ان : $0\prec u_{n+1}\prec 1$

لدينا: $0\prec u_n\prec 1$ و $f(1)=1$; $f(0)=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

بما أن f متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$

ومنه : $0\prec u_{n+1}\prec 1$.

من ① و ② نستنتج حسب البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n: $\boxed{0\prec u_n\prec 1}$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة:

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n^2+2u_n}{2u_n+1}=\boxed{\frac{-2u_n(u_n-1)}{2u_n+1}}$

بما أن: $0\prec u_n\prec 1$ فإن $0\prec u_n$ ، $u_n-1\prec 0$ ومنه: $u_{n+1}-u_n\succ 0$

نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي ℓ لأنها:محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.

****حساب** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3u_n}{2u_n+1}$ يكافئ $\ell=\frac{3\ell}{2\ell+1}$ يكافئ $\frac{-2\ell(\ell-1)}{2\ell+1}=0$

ومنه $\ell=0$ (مرفوض) أو $\boxed{\ell=1}$ (مقبول لأن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما) ،ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\boxed{1}$

3) أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا: $v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}}=\frac{1-\frac{3u_n}{2u_n+1}}{2\left(\frac{3u_n}{2u_n+1}\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1-u_n}{2u_n}\right)=\boxed{\frac{1}{3}v_n}$

ومنه (v_n) م.هـ أساسها $q=\boxed{\frac{1}{3}}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1-u_0}{2u_0}=1$

ب) كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n: $v_n=v_0q^n=\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

لدينا $u_n=\frac{1}{2v_n+1}$ ومنه $u_n=\boxed{\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

ج) حساب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n:

$$S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+\ldots+2^nv_n$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

هو مجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول يساوي 1 وأساسها $\frac{2}{3}$ ومنه:

$$S_n=1\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]=\boxed{3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$$
$$=v_0\times(v_0q)\times(v_0q^2)\times\ldots\times(v_0q^n)$$
$$=(v_0)^{n+1}\times q^{0+1+2+\ldots+n}=(1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

تصحيح التمرين02:

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E): $z^2+2|z|^2-\frac{3}{4}=0$

ليكن $z=x+iy$ حيث: x ; y عددان حقيقيان

(E) تكافئ $(x+iy)^2+2(x^2+y^2)-\frac{3}{4}=0$ تكافئ $3x^2+y^2-\frac{3}{4}+2xyi=0$

$$\begin{cases}3x^2+y^2-\frac{3}{4}=0\ldots(1)\\ 2xy=0\quad\ldots(2)\end{cases}$$

(2) تكافئ $x=0$ أو $y=0$ ثم بالتعويض في المعادلة (1)

من أجل: $x=0$ يكون: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل: $y=0$ يكون: $x=\frac{1}{2}$ أو $y=-\frac{1}{2}$

ومنه: $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

2)أ) كتابة كلا من العددين z_A+z_B و z_C على الشكل الأسي

$z_A+z_B=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ ، $z_C=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\boxed{e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}}$

ب) نبين أن: $z_C{}^{2018}.\left(z_A+z_B\right)^{1439}=z_A+z_B$

$z_C{}^{2018}.\left(z_A+z_B\right)^{1439}=\left(-\left(z_A+z_B\right)\right)^{2018}\left(z_A+z_B\right)^{1439}$

$=\left(z_A+z_B\right)^{3457}=e^{i\left(\frac{2\times3457\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{6912+2\pi}{3}\right)}=e^{i\left(2304+\frac{2\pi}{3}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\boxed{z_A+z_B}$

3)أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر $S\left(A;2;\frac{\pi}{2}\right)$:

$z'-z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-z_A\right)$ ومنه: $\boxed{z'=2iz-\frac{1}{2}+i}$

ب) إيجاد لاحقتا النقطتين B' و C' صورتا النقطتين B و C على الترتيب بالتشابه المباشر S:

$z_{B'}=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i$ ، $z_{C'}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+2i$

4) نبين ان المبدأ O هو مركز ثقل المثلث ABC: لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\boxed{0=z_O}$

نعين (μ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق:

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$،

$M\in(\mu)$ معناه $3\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\right)=0$

معناه $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}=0$

ومنه: (μ) هي مستقيم يشمل المبدأ وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$

لاحقته: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ معادلته $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

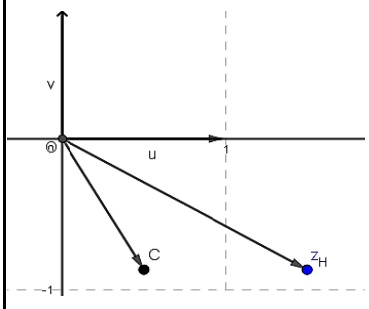
4) إنشاء النقطة H ذات اللاحقة $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب:

لدينا: لاحقة الشعاع $\vec{u}$ هي 1،

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OC}$ هي $e^{i\frac{-\pi}{3}}$

ومنه: $\overrightarrow{OH}=\vec{u}+\overrightarrow{OC}$ ،

الشعاع $\overrightarrow{OH}$ هو محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OC}$ و $\vec{u}$



تصحيح التمرين03:

عدد الحالات الممكنة: $C_9^3=84$

1) حساب احتمال الأحداث:

$p(A)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}\approx0.07$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}\approx0.06$

الحدث C: سحب كرة بيضاء على الأقل

الحدث $\overline{C}$: عدم سحب كرة بيضاء

ط1: $p(C)=1-p\left(\overline{C}\right)=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{74}{84}}\approx0.88$

ط2: $p(C)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\boxed{\frac{74}{84}}\approx0.88$

2)أ) حساب $p(X=1)$ و $p(X=3)$ ثم استنتاج $p(X=1)$:

قيم المتغير العشوائي X هي: $1;2;3$

$X=1$: "سحب 3 كرات بلون واحد"

$p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\boxed{\frac{5}{84}}$

$X=3$: "سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة"

$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\boxed{\frac{24}{84}}$

$X=2$: "سحب 3 كرات بلونين مختلفين"

$(B;B;\overline{B})$ أو $(N;N;\overline{N})$ أو $(R;R;\overline{R})$

ط1: $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\boxed{\frac{55}{84}}$

ط2: $p(X=2)=1-\left[p(X=3)+p(X=1)\right]=\boxed{\frac{55}{84}}$

ب) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه: $-25\;;\;0\;;\;+25$،

$E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\boxed{\frac{475}{84}}\approx5.65$

بما أن: $E(Y)\succ0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب

3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

ليكن الحدث F: سحب كرتان من U_2 بيضاوين

لدينا: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

$$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$$

ومنه: $p_B(F)=\dfrac{p(B\cap F)}{p(B)}=\dfrac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\boxed{\frac{41}{75}}\approx 0.55$

تصحيح التمرين 04:

I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=x^2-\ln x^2$

دراسة اتجاه تغير الدالة h: h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث $h'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x}$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[0;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1;0[$ و $[1;+\infty[$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}h(x)=+\infty$ و $h(-1)=h(1)=1$

اذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)\succ 0$

II) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(x^2)}{x}-x-\dfrac{2}{x}\right)$

1)أ) حساب:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\underbrace{\left(\frac{2\ln|x|}{x}\right)}_{\to 0^+}-\underbrace{x}_{\to+\infty}-\underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0^+}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{2\ln|x|}{-x}\right)}_{\to 0^+}-\underbrace{x}_{\to-\infty}-\underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{\to 0^+}\right)=\boxed{+\infty}$$

ب) حساب:

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}.\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to+\infty}\left(\underbrace{-\ln(x^2)}_{\to-\infty}-x^2-2\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}.\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to-\infty}\left(\underbrace{-\ln(x^2)}_{\to-\infty}-x^2-2\right)=\boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجة بيانيا: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

2)أ) نبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $2x^2f'(x)=-h(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\frac{2x}{x^2}.x-1.\ln(x^2)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right]=\frac{-2+\ln(x^2)-x^2+2}{2x^2}$$

ومنه: $2x^2f'(x)=-\left(x^2-\ln(x^2)\right)=\boxed{-h(x)}$: $f'(x)=\boxed{\dfrac{-h(x)}{2x^2}}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)\prec 0$ ومنه:

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	-1	B	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\|$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$3/2$	0	$+\infty$	0	$-3/2$	$-\infty$

ج) نبين أن $(\Delta):y=-\dfrac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f):

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{2\ln|x|}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$$

ومنه: $(\Delta):y=-\dfrac{1}{2}x$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ): ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x^2-2}{x}\right]$$

$f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x\right)=0$ يكافئ $-\ln x^2-2=0$ و $x\neq0$

$-\ln x^2-2=0$ يكافئ $\ln x^2=-2$ يكافئ $x^2=e^{-2}$ يكافئ $x=\dfrac{1}{e}$ أو $x=-\dfrac{1}{e}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}\approx-0.37$		0		$\frac{1}{e}\approx0.37$	$+\infty$
$-\ln x^2-2$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-1}{e};0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{1}{e};-0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)

3) أ) التحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$:

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+x-\frac{2}{-x}\right)=0$$

نستنتج أن الدالة f فردية .

تفسير النتيجة بيانيا: النقطة O مركز تناظر للمنحنى (C_f).

ب) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.3;0.4[$

لدينا الدالة f معرفة ومستمرة (قابلة للإشتقاق) ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]0.3;0.4[$

و $f(0.4)\times f(0.3)\prec 0$ ، $f(0.3)\approx0.53$; $f(0.4)\approx-0.41$

حسب مبرهنة ق المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

α على $]0.3;0.4[$ حيث $f(\alpha)=0$

استنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر β يطلب تعيين حصرا له: بما أن النقطة O مركز تناظر لـ (C_f) و المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0.3;0.4[$ فإن (C_f) يقطع حامل محورالفواصل في نقطة فاصلتها α ويقطعه كذلك في نظيرتها فاصلتها β بالنسبة للنقطة O حيث $0.3 \prec \alpha \prec 0.4$ و عليه يكون $-0.4 \prec \beta \prec -0.3$

4) أ) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما: $f'(x_0)=\frac{-1}{2}$

يكافئ $\frac{-\left(x_0^2-\ln\left(x_0^2\right)\right)}{2x_0^2}=\frac{-1}{2}$ ومنه: $\ln\left(x_0^2\right)=0$ أو $x_0=1$ أو $x_0=-1$

ومنه: $(T_1): y=\frac{-1}{2}x+1$ ، $(T_2): y=\frac{-1}{2}x-1$

ب) إنشاء (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f):

ج) مناقشة بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة (E): هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث: $(\Delta_m): y=-\frac{1}{2}x+m$

m	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
عدد و إشارة حلول (E)	حل وحيد سالب		حل مضاعف موجب + حل سالب		حلين موجبين + حل سالب		حلين مختلفين في الإشارة		حل موجب + حلان سالبان		حل موجب + حل مضاعف سالب		حل وحيد موجب

5) نبين انه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_k)

$D_k=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$

بما أن: $k(x)=f(x+1)+2$ فإن (C_k) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{V}=-\vec{i}+2\vec{j}$

6) أ) نبين ان الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)$

تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$ إذا كانت الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $F'(x)=f(x)$

لدينا: الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$F'(x)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{4}.2\ln\left(x^2\right).\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}-\frac{2}{x}\right)=f(x)$

ومنه: F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

ب) إيجاد الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$:

بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ فإنها تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}^*$ من الشكل: $x \to F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$F(1)+c=0$ يكافئ $c=\frac{1}{4}$ ومنه الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدالة:

$x \to \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)+\frac{1}{4}$

ج) حساب التكامل: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ حيث $\lambda \succ 1$

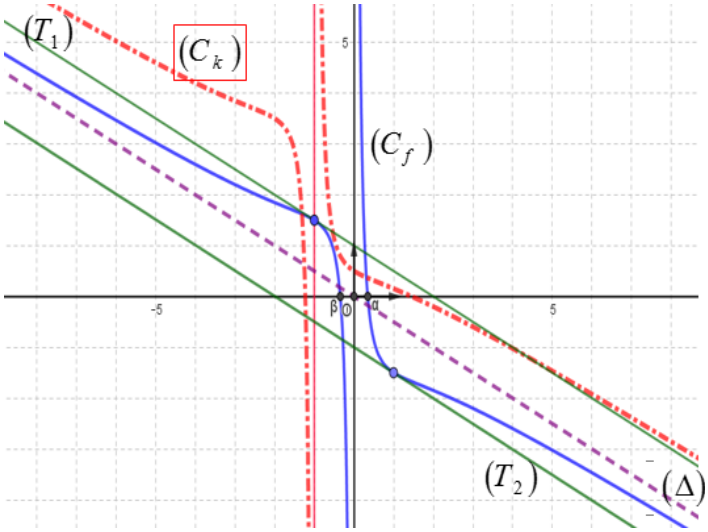
$A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-2\ln|x|\right)\right]_1^{\lambda}$

$=\left[\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\ (u.a)\right]$

تفسيرالنتيجة هندسيا: $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1$; $x=\lambda$; $y=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln\left(\lambda^2\right)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\right)=+\infty$



نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر

الموضوع التجريبي رقم 06 . التحضير الجيد للبكالوريا

الشعبة : 3 علوم تجريبية دورة : ماي 2019

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 03 سا و 30 د

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)(z^2+2z+2)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط A ، B ، C و D لواحقها :

$z_A=i$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1-i$ ، $z_D=1-2i$ على الترتيب .

أ) تحقق أن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$.

ب) اكتب العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي، ثم فسّر النتيجة هندسيا . برّر طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج) اكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ، ثم أحسب $(-4+4i)^{2018}$.

3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن B ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\dfrac{iz-4+2i}{z-2}$.

أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$.

ب) بين أن : $AM'\times BM=4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\arg(z'-i)=\dfrac{\pi}{4}$.

ـ تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=2+i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر المستوي (P) معادلته : $2x+y-2z+4=0$

و النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

1) أ) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا . ب) تحقق أن (P) هو المستوي (ABC) .

2) أ) بيّن أن المثلث ABC قائم .

ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O و العمودي على (P) .

ج) النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة O على (P) ، أحسب الطول OK .

3) النقطة G هي مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$

أ) احسب إحداثيات النقطة G .

ب) احسب المسافة بين النقطة G و المستوي (P) .

4) (Γ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

أ) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة .

ب) ما طبيعة $(P)\cap(\Gamma)$ ؟ .

ج) احسب حجم رباعي الوجوه $GABC$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.

1) اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .

4) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_n \leq (\dfrac{4}{5})^n$ ، ثمّ عيّن نهاية المتتالية (u_n) من جديد

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$.

ب) عيّن نهايات الدالة g عند 0 وعند $+\infty$.

2) أ) ادرس إتجاه تغيّر الدالة g وشكل جدول تغيّراتها .

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x \in]0;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

ـ حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) ادرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

5) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة $A(1;0)$.

6) ارسم كلا من (Δ) ، (T) والمنحنى (C) .

7) لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ: $y = mx - m$ ، حيث m وسيط حقيقي

أ) تحقق أنّ جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A .

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = mx - m$ حلان متمايزان .

III) 1) باستعمال التكامل بالتجزئة ، بيّن أنّ: $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$.

2) احسب بـ $u.a$ مساحة الحيّز للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما : $x = 1$ و $x = e$ (يجب تقديم القيمة المضبوطة لمساحة الحيز .

تصحيح التمرين 01:

1) حل المعادلة: $(z-i)(z^2+2z+2)=0$ ...(①):

لدينا: $\begin{cases} z-i=0 \ ; \ \boxed{z=i} \\ z^2+2z+2=0 \ ...(♦) \end{cases}$

حلول المعادلة(♦): $\Delta=-4=(2i)^2$ ومنه

$z_1=\dfrac{-2+2i}{2}=\boxed{-1+i}$ و $z_2=\overline{z_1}=\boxed{-1-i}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (①) هي $S=\{i\ ;-1-i\ ;-1+i\}$

2) أ) التحقق أن D مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$:

يكفي التحقق أن $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي

$z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}=0$

$z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}$

$=(z_A-z_D)-(z_B-z_D)-(z_C-z_D)$

$=z_A-z_B-z_C-z_D=i-2+1+i-1+2i=\boxed{0}$

لدينا

الخلاصة: D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

ب) كتابة العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي:

$\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}=\dfrac{1-2i-i}{2+1+i}=\dfrac{1-3i}{3+i}=\dfrac{-i(i+3)}{3+i}=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$

التفسير الهندسي: $\left|\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right|=1$ يكافئ $AD=BC$

$\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ يكافئ $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD})=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \ / \ k\in\mathbb{R}$

طبيعة الرباعي $ABDC$: بما أن $AD=BC$ و $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

فإن الرباعي $ABDC$ مربع

لأن قطريه متساويين و متعامدين

ج) كتابة العدد $-4+4i$ على الشكل الأسي:

الشكل الاسي: لدينا: $|-4+4i|=|-4(1-i)|=|-4||1-i|=4\sqrt{2}$

لتكن θ عمدة لـ $-4+4i$ ومنه $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{-4}{4\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

ومنه نجد: $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ إذن: $-4+4i=\boxed{4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}$

- حساب $(-4+4i)^{2018}$:

$(-4+4i)^{2018}=\left(4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{2018}=\left(4\sqrt{2}\right)^{2018}e^{\frac{6054\pi}{4}i}$

$=\left(4\sqrt{2}\right)^{2018}e^{\frac{3\pi}{2}i}=\boxed{\left(4\sqrt{2}\right)^{2018}(-i)}$

3) أ) حساب $z'-i$:

$z'-i=\dfrac{iz-4+2i}{z-2}-i=\dfrac{iz-4+2i-i(z-2)}{z-2}$

$=\dfrac{iz-4+2i+iz+2i}{z-2}=\boxed{\dfrac{-4+4i}{z-2}}$

ب) اثبات أن: $AM'\times BM=4\sqrt{2}$

لدينا، $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$ ، أي: $|z'-z_A|=\dfrac{|-4+4i|}{|z-z_B|}$ ،

ومنه: $AM'=\dfrac{4\sqrt{2}}{BM}$ أي: $AM'\times BM=4\sqrt{2}$

ومن جهة أخرى نجد: $\arg(z'-i)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-2}\right)$ ،

ومنه: $\arg(z'-z_A)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-z_B}\right)$ ، أي:

ومنه: $\arg(z'-z_A)=\arg(-4+4i)-\arg(z-z_B)$ ،

$\arg(z'-z_A)+\arg(z-z_B)=\arg(-4+4i)$

إذن: $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k \ / \ k\in\mathbb{R}$.

4) - التحقق أن E تنتمي إلى (Γ) :

لدينا، $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z_E-2}=\dfrac{-4+4i}{2+i-2}=\dfrac{-4+4i}{i}=4+4i$

ومنه: $\arg(z'-i)=\arg(4+4i)=\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ (محققة)

الخلاصة: النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

- تعيين طبيعة المجموعة (Γ) :

$\arg(z'-i)=\dfrac{\pi}{4}$ يكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\dfrac{\pi}{4}$ و لدينا،

$(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\dfrac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})$ ومنه $\dfrac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{\pi}{4}$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}$ ومنه : مجموعة النقط M من المستوي هي : نصف المستقيم المفتوح $[BE)$ الذي رأسه B و الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{2}$.

تصحيح التمرين 02:

لدينا : $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

1) أ) بيان أن النقط $A;B;C$ تعيّن مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ حيث $\left(\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{-2}\right)$

معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه النقط $A;B;C$ تعيّن مستويا .

ب) التحقق أنّ (P) هو المستوي (ABC):

لدينا : $(P):2x+y-2z+4=0$ ، و $A(3;2;6)$.

بالتعويض : $6+2-12+4=0$ ، و منه : $A\in(P)$.

بنفس الطريقة نبيّن أنّ : $B\in(P)$ و $C\in(P)$. و منه

نستنتج أنّ المستوي (P) هو (ABC) .

2)أ) بيان أنّ المثلث ABC قائم :

نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2=0$ ، إذن : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

و منه المثلث ABC قائم في A .

ب) كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) المار بـ O و يعامد (P):

(Δ) يعامد (P) أي : $\vec{n}(2;1;-2)$ يعتبر شعاع توجيه لـ (Δ) و منه التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو: $(\Delta)\ :\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}\ t\in\mathbb{R}$

ج) حساب الطول OK : بما أنّ k هي المسقط العمودي لـ O على (P)، إذن ستكون k نقطة تقاطع (Δ) مع (P) .

لحساب إحداثيات النقطة k نعوض تمثيل (Δ) في معادلة (P) نجد : $2(2t)+t-2(-2t)+4=0$ ، أي :

$9t=-4$ ، و منه : $t=\frac{-4}{9}$. و منه : $K\left(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

3) G مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$:

أ) حساب إحداثي النقطة G :

$$G\begin{cases}x=\frac{3(0)+1(3)+1(1)+1(4)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\\y=\frac{3(0)+1(2)+1(2)+1(-2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\\z=\frac{3(0)+1(6)+1(4)+1(5)}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}\end{cases}$$

و منه : $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$.

ب) حساب المسافة بين النقطة G و المستوي (P) :

$$d\left(G;(P)\right)=\frac{\left|\frac{4}{3}\times2+\frac{1}{3}\times1+\frac{5}{2}(-2)+4\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

، و منه : $d\left(G;(P)\right)=\frac{2}{3}$.

4) (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$:

أ) تعيين طبيعة مجموعة النقط (Γ) و عناصرها المميزة :

$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=5$ ، أي : $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{5}{6}$ ، و منه : $MG=\frac{5}{6}$ ،

إذن (Γ) هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها: $R=\frac{5}{6}$

ب) طبيعة $(\Gamma)\cap(P)$:

بما أنّ : $d\left(G;(P)\right)<R$ ، فإنّ : $(\Gamma)\cap(P)$ هي دائرة .

ج) حساب حجم رباعي الوجوه $GABC$:

$$V_{GABC}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h$$

حيث S_{ABC} مساحة المثلث ABC هي :

$S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{12}{2}=6$.

h : هي المسافة بين G و (P) ، و منه : $h=\frac{2}{3}$.

إذن حجم الرباعي $GABC$: $V_{GABC}=\frac{1}{3}\times6\times\frac{2}{3}$

ومنه: $V_{GABC}=\frac{4}{3}(u.a)$

تصحيح التمرين 03:

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} \end{cases}$.

1) إثبات أنّه من أجل كل عدد $0 < u_n < 2$:

نضع : $P(n): 0 < u_n < 2$

المرحلة1: من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ أي : $0 < u_0 < 2$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $0 < u_n < 2$ صحيحة و نبين أن : $0 < u_{n+1} < 2$.

- لدينا فرضا أنّ: $0 < u_n < 2$ ، إذن : $\dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} > 0$ ، أي :

$u_{n+1} > 0 \ldots\ldots(1)$. يبقى أن نبيّن أنّ : $u_{n+1} < 2$.

نحسب $u_{n+1} - 2$:

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} - 2 = \frac{u_n^3 + 2 - 2u_n^2 - 2}{u_n^2 + 1} = \frac{u_n^3 - 2u_n^2}{u_n^2 + 1} = \frac{u_n^2(u_n - 2)}{u_n^2 + 1}$$

، بما أنّ : $u_n < 2$ ،فرضا ، إذن : $u_n - 2 < 0$ ، و منه :

$u_{n+1} - 2 < 0$ ، إذن : $u_{n+1} < 2 \ldots\ldots(2)$

إذن من **(1)** و**(2)** فإن: $0 < u_{n+1} < 2$. ومنه $P(n+1)$ صحيحة

خلاصة :من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{0 < u_n < 2}$.

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n): من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} - u_n = \dfrac{-u_n^3 + 2 - u_n^3 - u_n}{u_n^2 + 1} = \dfrac{2 - u_n}{u_n^2 + 1} > 0$

، لأنّ : لدينا $u_n < 2$ ، إذن : $2 - u_n > 0$.

و منه المتتالية (u_n) **متزايدة** على $\mathbb{N}$.

3)إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و حساب نهايتها:

(u_n) متزايدة وَ محدودة من الأعلى بـ 2 ، إذن هي **متقاربة**.

- نهاية (u_n): (u_n) متقاربة معناه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$:

لدينا : $l = \dfrac{l_n^3 + 2}{l_n^2 + 1}$: أي ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

ومنه : $l^3 + l = l^3 + 2$ ، إذن : $\boxed{l = 2}$.

4)أ) بيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $2 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$

نحسب الفرق $2 - u_{n+1}$:

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1} = \frac{2u_n^2 + 2 - u_n^3 - 2}{u_n^2 + 1} = \frac{u_n^2(2 - u_n)}{u_n^2 + 1} .$$

نقارن النتيجة مع $\dfrac{4}{5}(2 - u_n)$:

$$\frac{u_n^2(2 - u_n)}{u_n^2 + 1} - \frac{4}{5}(2 - u_n) = (2 - u_n)\left[\frac{u_n^2}{u_n^2 + 1} - \frac{4}{5}\right]$$

$$= (2 - u_n)\left(\frac{5u_n^2 - 4u_n^2 - 4}{5(u_n^2 + 1)}\right) = (2 - u_n)\left(\frac{u_n^2 - 4}{5(u_n^2 + 1)}\right)$$

أي: $\dfrac{u_n^2(2 - u_n)}{u_n^2 + 1} - \dfrac{4}{5}(2 - u_n) = (2 - u_n)\left(\dfrac{(u_n - 2)(u_n + 2)}{5(u_n^2 + 1)}\right)$

$$= \frac{-(u_n - 2)^2(u_n + 2)}{5(u_n^2 + 1)} < 0$$

إذن : $\boxed{2 - u_{n+1} < \dfrac{4}{5}(2 - u_n)}$.

ب) إثبات أنّ $0 \le 2 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

لدينا من السؤال **أ)** : $0 \le 2 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(2 - u_n)$ ، إذن :

بالضرب نجد :

$$\begin{cases} 0 \le 2 - u_1 \le \dfrac{4}{5}(2 - u_0) \\ 0 \le 2 - u_2 \le \dfrac{4}{5}(2 - u_1) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \le 2 - u_n \le \dfrac{4}{5}(2 - u_{n-1}) \end{cases}$$

$$0 \le (2 - u_1)(2 - u_2) \times \ldots \times (2 - u_n)$$

$$\le \left(\frac{4}{5}\right)^n \times (2 - u_0)(2 - u_1) \times \ldots \times (2 - u_{n-1})$$ ،

بالإختزال نحصل على : $0 \le 2 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \times (2 - u_0)$ ، أي:

$0 \le 2 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \times (2 - 1)$ ، ومنه : $0 \le 2 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

نهاية (u_n): بما أنّ: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$ ، حسب النهايات

بالحصر: $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 - u_n) = 0$ ، ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 2$

تصحيح التمرين04:

الجزء الأول: لدينا: $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.

1) التحقق أنّ : $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$:

$(x-1)(3x^2+3x+2)$

$=3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2=3x^3-x-2$

ب) تعيين نهايات الدالة g :

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-x-2\ln x+3)=\boxed{+\infty}$

لأن : ($\lim\limits_{x\to 0^+} x^3-x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}-2\ln x=+\infty$).

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x^2-1-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{3}{x}\right)=\boxed{+\infty}$

لأنّ : ($\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$).

2)أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g **و تشكيل جدول تغيّراتها :**

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$g'(x)=3x^2-1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3x^3-x-2}{x}=\dfrac{(x-1)(3x^2+x+2)}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(x-1)(3x^2+3x+2)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+x+2$		$+$		$+$	
$3x^3-x-2$		$-$		$+$	

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

ب) إستنتاج إشارة $g(x)$:

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ : $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، (القيمة الصغرة لـ g هي 3) .

الجزء الثاني: لدينا $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **و تفسير النتيجة هندسيا :**

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1+\ln x)=-\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\boxed{-\infty}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$

التفسير(C)يقبل مقارب عمودي هو محور التراتيب بجوار$-\infty$

2) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$.

3) بيان أنّ المستقيم (Δ) **مقارب لـ** (C) **بجوار** $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x^2}\right)=0$ ، و منه (Δ)

مقارب مائل لـ (C) بجوار$+\infty$.

الوضعية النسبية : لدينا $f(x)-y=\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$ ،

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ ونلخصها في الجدول التالي:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	

وعليه فإن : $x-1+\ln x\geq 0$ على المجال $[1,+\infty[$

و $x-1+\ln x\leq 0$ على المجال $]0;1]$.

من الجدول السابق نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖ (C) يقع تحت (Δ)		(C) يقطع (Δ) عند $(1;0)$		(C) يقع فوق (Δ)

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f **و تشكيل جدول تغيّراتها**

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$f'(x)=1+\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)x^2-2x(x-1+\ln x)}{x^4}$

$=1+\dfrac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{x^4-x^2+3x-2x\ln x}{x^4}$

$$f'(x)=\frac{x\left(x^3-x-2\ln x+3\right)}{x^4}$$

أي:

$$=\frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}=\boxed{\frac{g(x)}{x^3}}$$

وَ منه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

جدول تغيرات الدالة f:

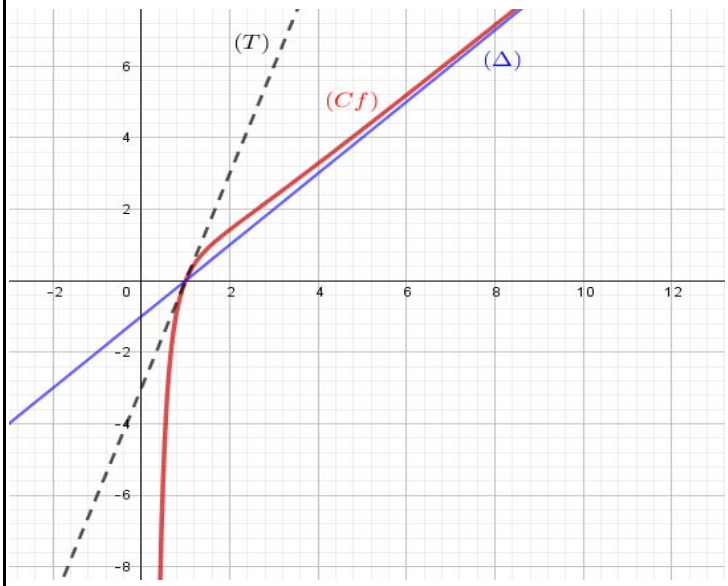
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↗	$+\infty$
	‖ $-\infty$		

5) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة $A(1;0)$:

$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي :

$(T):y=3(x-1)+0$ ، و منه : $(T):y=3x-3$.

6) رسم كلا من (T) و (Δ) و المنحنى (C):



7) لدينا $(d_m):y=mx-m$:

أ) التحقق أنّ (d_m) تمر بالنقطة A : أي $0=m(1)-m$

$m-m=0$ ، و منه A تنتمي إلى (d_m) .

ب) المعادلة $f(x)=mx-m$ تقبل حلان متمايزان إذا كان : $1<m<3$.

حيث : 1 هو معامل توجيه (Δ) و3 هو معامل توجيه (T) .

الجزء الثالث : 1) بيان أنّ : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=1-\frac{2}{e}$

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^e \left(\underbrace{\ln x}_{v}\times\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e -\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

أي :

$$=\left(-\frac{\ln e}{e}-\frac{1}{e}\right)-(-\ln 1-1)=1-\frac{2}{e}$$

و منه : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx=\boxed{1-\frac{2}{e}}$.

2) حساب مساحة الحيّز :

$$A=\int_1^e [f(x)-y]dx=\int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^e \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$A=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^e+\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

أي:

$$=\left(\ln e+\frac{1}{e}\right)-(\ln(1)+1)+\left(1-\frac{2}{e}\right)=1+\frac{1}{e}-1+1-\frac{2}{e}$$

و منه : $A=\boxed{1-\frac{1}{e}(ua)}$

نريد النجاح !!!... ابدأ العمل ماذا تنتظر