الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

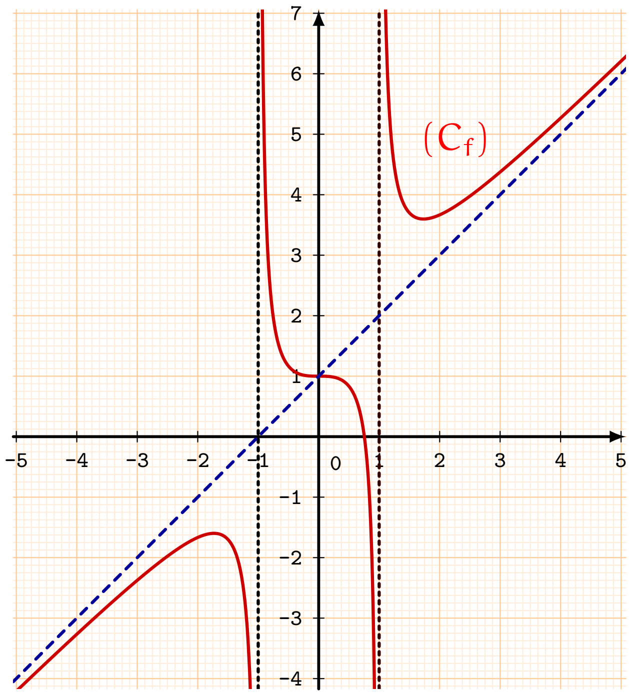
ثانوية:مفدي زكرياء – الأزهرية | الشعبة : ثالثة علوم تجريبية

إختبارات الفصل الأول | السنة الدراسية : 2018–2019

إختبار في مادة:الرياضيات | المــدة: 02 سا

التمرين الأول: (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجموعة D حيث $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ كما في الشكل المقابل .



1. بقراءة بيانية أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)$ ، و عين معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f).
2. أحسب $f'(x)$ من أجل كلّ x من D ، ثمّ أدرس إتجاه تغيّر f و شكّل جدول تغيّراتها .
3. من أجل كلّ x من D ، أحسب $f(x)+f(-x)$ ثمّ فسر هذه النتيجة بيانيا.
4. نعتبر الدالّة g المعرّفة على D بـ $g(x)=f(|x|)$.

أ) أدرس قابلية إشتقاق الدالة g عند القيمة 0.

ب) تحقق أنّ g زوجية ؛ ثمّ إشرح كيف يمكن رسم (C_g) إنطلاقا من (C_f) و أرسمهما في نفس المعلم .

5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $g(x)=|m|$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (E_0) التّالية : $y'-2y=0\cdots(E_0)$.
2. نعتبر المعادلة التفاضلية (E) التّالية : $y'-2y=5\cos x\cdots(E)$.

أ) تحقق أنّ الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\sin x-2\cos x$ هي حل لـ (E).

ب) أثبت أنّ f حل لـ E إذا و فقط إذا كان $f-g$ حل لــ (E_0) .

3. استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E) ؛ ثمّ عين الحل الذي ينعدم من أجل $\dfrac{\pi}{2}$.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

I) g الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x-xe^x+1$.

1. أ) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

ب) أدرس إتجاه تغيّر g و شكّل جدول تغيّراتها .

2. بيّن أنّ المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ؛ ثمّ تحقّق أنّ : $1.2<\alpha<1.3$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) نعتبر الدالّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x}{e^x+1}$ ، $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلي المعلم المتعامد $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ (وحدة الطول $\|\overrightarrow{i}\|=1cm, \|\overrightarrow{j}\|=4cm$) .

1 أ) أثبت أنّ : $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$ من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر f و شكّل جدول تغيّراتها .

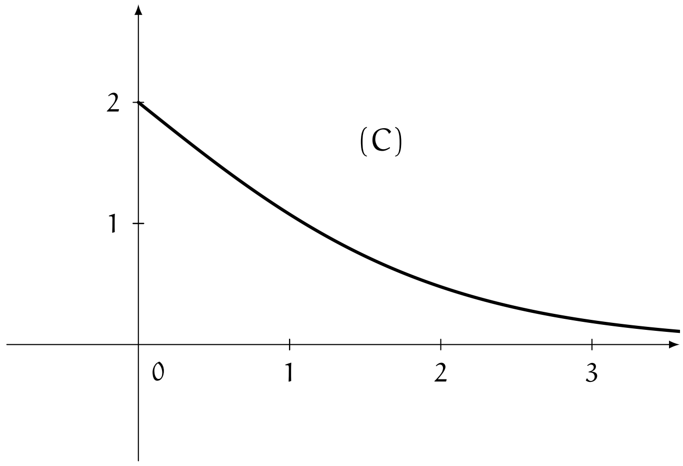
2 أ) أثبت أنّ : $f(\alpha)=4(\alpha-1)$.

ب) أرسم $(\mathcal{C}_f)$.

III) نمثّل في الشكل أدناه (C) المنحنى البياني للدالّة h المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{4}{e^x+1}$ و من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب نسمي M،P،Q النّقط التي إحداثياتها على التّرتيب $(x,h(x))$ ؛ $(x;0)$ ، $(0,h(x))$.

1 بيّن أنّ مساحة المستطيل $OPMQ$ تكون أعظميّة ، إذا كانت α فاصلة M.

2 نفرض أنّ فاصلة M هي α ، أثبت أنّ المماس (T) في النقطة M لـ (C) يوازي المستقيم (PQ) .



التصحيح المفصل لإمتحان الرياضيات للفصل الأول 3 علوم تجريبية

عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: المجموع

التمرين الأول

/1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ ،
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$ — **1.5**

◁ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما $x=-1$ و $x=1$ ومستقيم مقارب مائل معادلته : $y=x+1$ — **0.75**

/2 $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ — **0.5**

◁ $f'(x)=0$ معناه : $x^2-3=0$ معناه : $x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$
◁ $f'(x)>0$ معناه : $x\in]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[$
◁ $f'(x)<0$ معناه : $x\in]-\sqrt{3},-1[\cup]-1,1[\cup]1,\sqrt{3}[$
ومنه: f متزايدة على المجالين $]-\infty,-\sqrt{3}[$ و $]\sqrt{3},+\infty[$ و متناقصة تماما على المجالات $]-\sqrt{3},-1[$ ، $]1,\sqrt{3}[$ ، $]-1,1[$ — **0.75**

◁ جدول التغيرات :

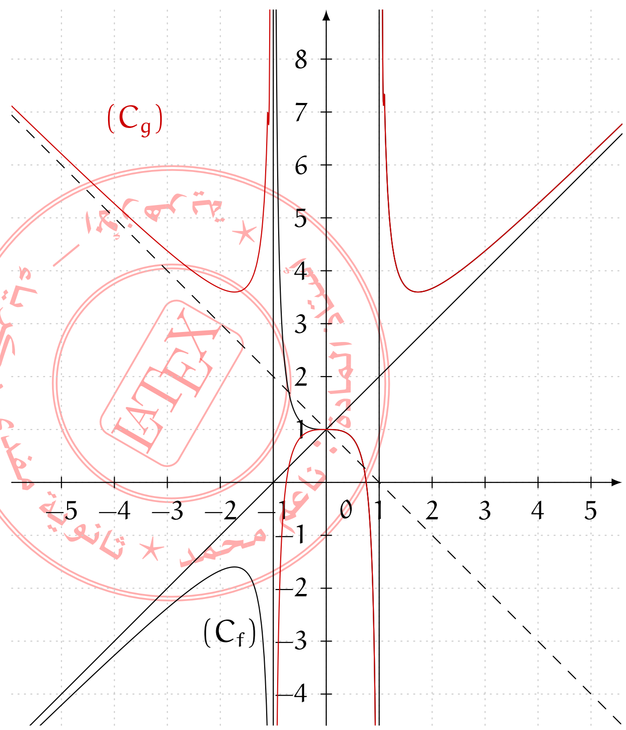
x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\sqrt{3})$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

0.75

/3 $f(-x)+f(x)=\dfrac{-x^3+x^2-1}{x^2-1}+\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}=\dfrac{2x^2-2}{x^2-1}$ ومنه :
$f(-x)+f(x)=2$ — **0.5**

(C_f) يقبل النقطة ذات الإحداثيات $(0,1)$ مركز تناظر — **0.5**

/4 $g(x)=f(|x|)$
أ) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1} & ,x\geq 0\\[2mm] \dfrac{-x^3+x^2-1}{x^2-1} & ,x\leq 0\end{cases}$ ومنه :

	0.25	$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^3}{x(x^2-1)}$ ومنه : $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ و ايضا : $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{-x^3}{x(x^2-1)}$ ومنه : $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ و عليه $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ ومنه g تقبل الإشتقاق عند القيمة $x=0$
	0.25	ب) من اجل x من D ، $-x$ عنصر من D و $g(-x)=f(\lvert -x\rvert)=f(\lvert x\rvert)$ لان : $\lvert -x\rvert=\lvert x\rvert$ ومنه : $g(-x)=g(x)$
	0.25	◄ (C_g) ينطبق على (C_f) على المجال $[0;+\infty[$ ثم نناظر هذا الجزء بالنسبة الى حامل محور التراتيب لان الدالة g زوجية .
	0.5	الرسم : 
7	0.5	5/ حلول المعادلة : $g(x)=\lvert m\rvert$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_g) و المستقيم ذو المعادلة : $y=\lvert m\rvert$ الذي يوازي حامل محور الفواصل مهما تغيرت قيمة m من البيان نجد : إذا كان : $0 \le \lvert m\rvert < 1$ اي : $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلين إذا كان : $\lvert m\rvert = 1$ اي : $m=-1$ أو $m=1$ المعادلة تقبل حلا واحدا إذا كان : $1 \le \lvert m\rvert < g(\sqrt{3})$ اي : $-g(\sqrt{3}) < m < -1$ او $1 < m < g(\sqrt{3})$ المعادلة لا تقبل حلول إذا كان : $\lvert m\rvert > g(\sqrt{3})$ اي : $m < -g(\sqrt{3})$ او $m > g(\sqrt{3})$ المعادلة تقبل أربعة حلول

التمرين الثاني

1/ حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 0$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = Ce^{2x}$
مع C عدد حقيقي ثابت 1

2/ أ) $g'(x) = \cos x + 2\sin x$ ومنه : $g'(x) - 2g(x) = 5\cos x$ ومنه : الدالة g هي
حل للمعادلة التفاضلية (E) 1

ب) f حل لـ (E) معناه : $(1) \quad f'(x) - 2f(x) = 5\cos x$ ومن السؤال السابق g حل لـ
(E) أي : $(2) \quad g'(x) - 2g(x) = 5\cos x$ بالطرح طرفا لطرف بين (1) و (2) نجد :
$f'(x) - g'(x) - 2(f(x) - g(x)) = 0$: اي $(f - g)'(x) - 2(f - g)(x) = 0$ ومنه
: الدالة $f - g$ هي حل لـ (E_0) 1

3/ حلول المعادلة (E) في $\mathbb{R}$ هي الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = Ce^{2x} + \sin x - 2\cos x$
مع C عدد حقيقي ثابت 0.5

◁ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ معناه : $Ce^{\pi} + 1 = 0$ ومنه : $C = -e^{-\pi}$ ومنه الحل للمعادلة (E) و الذي ينعدم
من اجل $x = \dfrac{\pi}{2}$ هو : f_1 حيث : $f_1(x) = -e^{2x-\pi} + \sin x - 2\cos x$ 0.5 4

التمرين الثالث

I) 1/ أ) لدينا : $g(x) = e^x\left(1 - x + \dfrac{1}{e^x}\right)$ و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$
، $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 - x) = -\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ 1

ب) $g'(x) = -xe^x$ 0.5

$g'(x) = 0$ من أجل $x = 0$
$g'(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty, 0[$
$g'(x) < 0$ من أجل $x \in]0, +\infty[$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 0[$ و متناقصة
تماما على المجال $]0, +\infty[$ 0.5
جدول التغيرات 0.5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	2	↘	$-\infty$

2/ على المجال $]0; +\infty[$ الدالة g مستمرة و متناقصة تماما و $0 \in]-\infty, 2[$ ومنه المعادلة : $g(x) = 0$
تقبل حلا وحيدا ، على المجال $]-\infty, 0[$ المعادلة $g(x) = 0$ ليس لها حل لان g موجبة تماما على
المجال السابق ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ 0.25
لدينا $g(1.2) \times g(1.3) < 0$ ومنه : $1.2 < \alpha < 1.3$ 0.25

1/ إشارة $g(x)$ 0.5

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) 1/ أ) $f'(x)=\dfrac{4\times(e^x+1)-e^x(4x)}{(e^x+1)^2}$ بعد التبسيط نجد : $f'(x)=\dfrac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$ 0.75

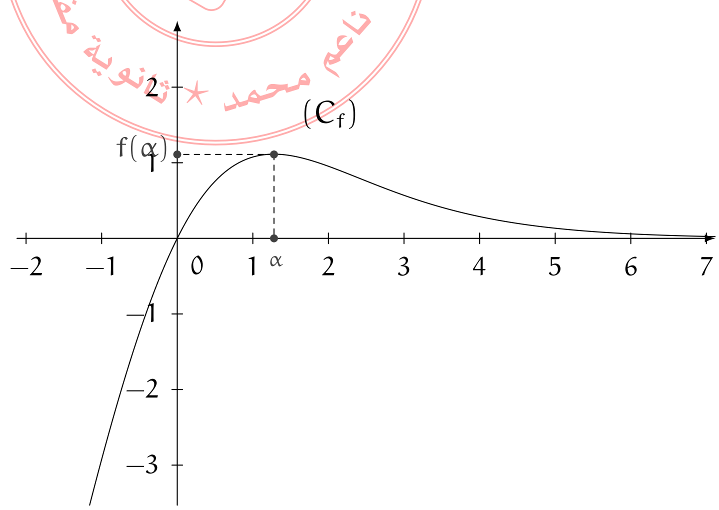
ب) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty,\alpha[$ و متناقصة تماما على المجال $]\alpha,+\infty[$ 0.75

جدول التغيرات 1

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

2/ أ) لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{e^\alpha+1}$ لكن : $g(\alpha)=0$ أي : $e^\alpha-\alpha\times e^\alpha+1=0$ أي :
$e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ ومنه : $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}$ ومنه $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha(\alpha-1)}{\alpha}$ ومنه :
$f(\alpha)=4(\alpha-1)$ 0.5

الرسم 1



III) 1/ مساحة المستطيل $OPMQ$ تساوي : $x\times h(x)$ أي مساحة المستطيل $OPMQ$ تساوي
: $\dfrac{4x}{e^x+1}$ و هي تمثل $f(x)$ 0.5

$f(x)$ أعظمية من أجل $x=\alpha$ (لاحظ جدول تغيرات الدالة f) ومنه المساحة تكون أعظمية إذا كانت فاصلة النقطة M هي α 0.25

9	0.75	2/ معامل توجيه المماس لـ (C) عند M هو $a_1 = h'(\alpha)$ لكن $h'(\alpha) = -\frac{4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2}$ إذن المماس لـ (C) معامل توجيهه هو $a_1 = -\frac{4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2}$ و المستقيم (PQ) معامل توجيهه : $a_2 = \frac{h(\alpha)}{-\alpha}$ أي $a_2 = \frac{-4}{\alpha(e^{\alpha}+1)}$ لكن $g(\alpha) = 0$ أي $e^{\alpha} - \alpha e^{\alpha} + 1 = 0$ ومنه : $e^{\alpha} + 1 = \alpha e^{\alpha}$ أي : $\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \frac{1}{\alpha}$ ومنه $a_1 = -\frac{4}{\alpha(e^{\alpha}+1)}$ وعليه : $a_1 = a_2$ مما يدل على ان المماس (T) و المستقيم (PQ) متوازيان