# الفرض الثّاني للثّلاثي الأوّل في مادّة الرّياضيات

**المستوى: ثالثة علوم تجريبيّة – ثالثة تقني رياضي**

## الجزء الأوّل:

لتكن $g$ دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ و تُحقق العلاقة $g(x)-2g(1-x)=e^{x}-2e^{1-x}-3x+3$.

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة $x$. (**إرشاد:** ضع $t=x$ تارةً و $t=1-x$ تارةً أخرى)
2) أدرُس تغيّرات الدّالّة $g$ ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.
3) استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة $h$ المُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=1-g(-x)$.
4) أثبت أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلّين $\alpha$ و $\beta$ حيثُ $-1{,}15<\alpha<-1{,}14$ و $1{,}84<\beta<1{,}85$ .
5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعاً لقيم العدد الحقيقي $x$.

## الجزء الثّاني:

لتكن $f$ دالّة عدديّة مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{x+g(x)}{1+g(x)}$، و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أُحسُب نهايات الدّالّة $f$ بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسِّر هندسيّاً النّتائج.
2) أ) أثبت أنّ الدّالّة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنّ $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times h(x)}{\left[1+g(x)\right]^{2}}$.

   ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة $f$ ثُمّ شكّل جدول تغيُّراتها.
3) أحسُب $f(0)$ ثُمّ أرسم $(C_f)$.

الأستاذ

قرايرية سمير

# الإجابة النموذجية

## الجزء الأوّل:

1) من أجل $t=x$ يكون لدينا

$$g(t)-2g(1-t)=e^{t}-2e^{1-t}-3t+3....(1)$$

من أجل $t=1-x$ يكون لدينا

$$g(1-t)-2g(t)=e^{1-t}-2e^{t}+3t....(2)$$

بضرب المعادلة $(2)$ في $2$ والجمع مع المعادلة $(1)$ طرفاً لطرف نجد أنّ $g(t)=e^{t}-t-1$ ، إذن الدّالّة $g$ مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=e^{x}-x-1$.

2) الدّالّة $g$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $g'(x)=e^{x}-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

الدّالّة $g$ متزايدة تماماً على $]0,+\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty,0[$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

، و تغيُّرات الدّالّة $g$ مُوضّحة في الجدول الآتي

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3) الدّالّة $h$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالّتها المشتقّة $h'(x)=e^{-x}-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدّالّة $h$ متناقصة تماماً على $]0,+\infty[$ و متزايدة تماماً على $]-\infty,0[$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ ، و تغيُّرات الدّالّة $h$ مُوضّحة في الجدول الآتي

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

4) الدّالّة $h$ مستمرّة و رتيبة تماماً على كلّ مجال من المجالين $]-1{,}15;-1{,}14[$ و $]1,84;1,85[$ و لدينا $h(-1{,}15)\times h(-1{,}14)<0$ و كذلك $h(1,85)\times h(1,84)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسّطة المعادلة $h(x)=0$ **تقبل حلّين** $\alpha$ و $\beta$ حيثُ $-1{,}15<\alpha<-1{,}14$ و $1,84<\beta<1,85$.

5) إشارة $g(x)$ و $h(x)$ مُوضّحتان في الجدولين

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## الجزء الثاني:

الدّالّة $f$ مُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$.

1) لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{e^{x}}}{1-\dfrac{x}{e^{x}}}=1$$

، و منه المستقيمان $(\Delta):y=1$ و $(\Delta'):y=0$ مقاربان أفقيّان لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على التّرتيب.

2) أ) الدّالّتان $x\mapsto x$ و $x\mapsto e^{x}$ قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و عليه تكون الدّالّة $f$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times h(x)}{\left[e^{x}-x\right]^{2}}$.

ب) بما أنّ $\dfrac{e^x}{\left[e^x - x\right]^2} > 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

الدّالّة $f$ متناقصة تماماً على $\left]-\infty,\alpha\right]\cup\left[\beta,+\infty\right[$ و متزايدة تماماً على $\left[\alpha,\beta\right]$، و جدول تغيُّراتها هو

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $f(\beta)$ | $\searrow$ | $1$ |

3) لدينا $f(0)=0$ ، و $\left(C_f\right)$ مُوضّح في الرّسم المُرفق