BAC 2020

تمارين محلولة

في النهايات و الاستمرارية

علوم تجريبية

تقني رياضي

رياضيات

تسيير و اقتصاد ☑

5min Maths

من اعداد الأستاذ: شعبان أسامة

نوفمبر 2019

1.

أذكر صحة أم خطأ الجمل الآتية مع التعليل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+3}=2$

3) إذا كانت $f(x)=ax+b+g(x)$ فإن : $y=ax+b$ معادلة مستقيم مقارب مائل لبيان الدالة f.

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+4x-1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}x=0$

5) إذا كانت : $-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

6) إذا كانت : $f(x)\ge x^2$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

7) إذا كانت : $f(x)\le x-1$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

8) الدالة $f: x\mapsto\dfrac{1}{x}$ مستمرة على □ .

9) الدالة $f: x\mapsto x+\sqrt{x}$ مستمرة على $[0;+\infty[$

10) الدالة $f: x\mapsto\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$ مستمرة على $[0;+\infty[$

11) الدالة $f: x\mapsto\sqrt{x^2+4}$ مستمرة على □ .

12) إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a;b]$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a;b[$.

13) إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[1;5]$ فإن الدالة f مستمرة عند 3 .

14) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\dfrac{1}{f}$ مستمرة على المجال I .

15) إذا كانت الدالة f سالبة تماما على مجال I فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

16) إذا كانت الدالة f غير مستمرة عند عدد x_0 فإنها غير معرفة عند x_0.

17) إذا كانت الدالة f معرفة عند عدد x_0 فإنها غير مستمرة عند x_0.

18) إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على المجال I .

19) الدالة $\sqrt{f}$ مستمرة على I .

20) الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ مستمرة على □ لأن :

الدالة $x \mapsto x^2-1$ مستمرة على □

و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على □.

19) الدالة : $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ مستمرة على □

لأن الدال $x \mapsto x^2-1$ مستمرة على □

و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على □ .

20) المعادلة $x\sin x = 1$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

الحل:

1) صحيحة لأن $+\infty \longrightarrow -x$ لما $-\infty \longrightarrow x$ وعليه :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty$$

2) صحيحة لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=2$$

3) خاطئة لأننا لا نعلم $\lim\limits_{|x|\to+\infty} g(x)$ التي يجب أن تكون معدومة لكي تكون الجملة صحيحة .

4) خاطئة لأن x يؤول إلى 0 و ليس إلى $-\infty$ و $+\infty$.

5) صحيحة لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

6) صحيحة لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و لدينا : $f(x)\geq x^2$

7) صحيحة لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-3)=-\infty$ و $f(x)\leq x-3$

8) خاطئة لأن الدالة f غير معرفة عند 0 وعليه فهي غير معرفة على □ ومن ثم غير مستمرة على □ .

9) صحيحة لأن الدالة هي مجموع دالتين مستمرتان على $[0;+\infty[$ هما : $x\mapsto\sqrt{x}$ و $x\mapsto x$

10) خاطئة لأن الدالة غير معرفة عند 0 .

11) صحيحة لأن الدالة هي مركب دالتين مستمرتان

الأولى : $x\mapsto x^2+4$ مستمرة على □ و موجبة

الثانية : $x\mapsto\sqrt{x}$ مستمرة على $□_+$.

12) خاطئة فمثلا الدالة f : $x\mapsto x^2-1$ مستمرة على المجال $[2\,؛\,4]$ لكن المعادلة $x^2-1=0$ ليس لها حل في المجال $]2\,;\,4[$ و حتى تقبل حل أكيد يجب أن يكون $f(a).f(b)<0$.

13) صحيحة لأن الدالة f مستمرة عند كل قيمة من المجال $]1\,;\,5[$.

14) خاطئة إلا إذا كانت f غير معدومة على I .

15) خاطئة . فمثلا الدالة f : $x\mapsto -x^2-1$ سالبة تماما على □ لكن غير متناقصة تماما لأن : $f'(x)=-2x$ وعليه فهي متناقصة تماما من أجل $x>0$ و متزايدة تماما من أجل $x<0$.

16) خاطئة . فمثلا الدالة f حيث :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

معرفة عند 1 $\left(f(1) = 3\right)$ لكنها غير مستمرة عند 1 لكون :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

17) صحيحة . لأنه حتى تكون دالة مستمرة عند x_0 يجب أن تكون : معرفة عند x_0 وتحقق $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

18) خاطئة لأنه قد تكون f سالبة و عليه فالدالة $\sqrt{f}$ غير معرفة.

19) خاطئة إلا إذا كانت $x^2 - 1 > 0$ وهذا غير محقق في $\mathbb{R}$.

20) صحيحة لأن الدالة f حيث : $f(x) = x\sin x$ مستمرة على $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ و $1 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

.2

عين مجموعة تعريف كل دالة فيما يلي ثم احسب النهايات عند أطرافها.

1) $f(x) = \dfrac{3x^3 + x - 4}{x - 1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$ 4) $f(x) = \dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$

الحل:

1) لدينا : $f(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$

- $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{3x^2 + x - 4}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{(x - 1)(3x + 4)}{x - 1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (3x + 4) = 7$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (3x + 4) = 7$

2) لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x^2 - 5x + 6 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $x^2 - 5x + 6 = 0$ فنجد : $x = 2$ أو $x = 3$

ومنه : $D_f = \mathbb{R} - \{2 ; 3\}$

أي : $D_f =]-\infty ; 2[\cup]2 ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

لحساب بقية النهايات : نكتب جدول إشارة المقام

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	0	−	0	+	

نلاحظ أن البسط هومتطابقة شهيرة نقوم بتحليله

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \dfrac{x + 2}{x - 3} = -4$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{x + 2}{x - 3} = -4$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} x^2 - 4 \longrightarrow 5 \\ x^2 - 5x + 6 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

3) لدينا : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 \neq 0\}$

نحل المعادلة $x^2 + 4x + 3 = 0$ فنجد $x = -1$ أو $x = -3$

إذن : $D_f = \mathbb{R} - \{-3 ; -1\}$

وعليه : $D_f = \left]-\infty ; -3\right[\cup \left]-3 ; -1\right[\cup \left]-1 ; +\infty\right[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ < \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3}$

$= \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)(x^2 - 4)}{(x + 3)(x + 1)}$

$= \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1} = \dfrac{-5}{2}$

إشارة المقام لحساب النهايات :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$3x^2+4x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \overset{<}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 4x + 3} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \longrightarrow -6 \\ x^2 + 4x + 3 \overset{>}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

4) لدينا : $f(x) = \dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 4x - 3 \neq 0\}$

نحل المعادلة : $4x^2 - 4x - 3 = 0$ نجد : $x = -\dfrac{1}{2}$ أو $x = \dfrac{3}{2}$

و منه : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right\}$

أي : $D_f = \left]-\infty ; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^4}{4x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^4}{4x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{(2x + 1)(2x^3 + 1)}{(2x + 1)(2x - 3)}$

$= \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^3 + 1}{2x - 3} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-4} = \dfrac{-3}{16}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ <}} \dfrac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = -\infty$

لأن :
$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x^2-4x-3$		+	0	−	0	+	

- $$\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{3}{2}} \frac{4x^4 + 2x^3 + 2x + 1}{4x^2 - 4x - 3} = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \longrightarrow 41 \\ 4x^2 - 4x - 3 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

.3

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$ 2) $\lim_{x\to2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x-2}}$

3) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1}$ 4) $\lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$

الحل:

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{\left(\sqrt{x+5} - 3\right)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

نضرب و نقسم على مرافق كل من البسط و المقام

$$= \lim_{x\to4} \frac{(x + 5 - 9)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{[x - (2x - 4)]\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{(x - 4)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}\right)}{-(x - 4)\left(\sqrt{x+5} + 3\right)}$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x-4}}{-\left(\sqrt{x+5} + 3\right)} = \frac{2+2}{-(3+3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to2} \frac{(x^2 + x - 6)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\,.\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+3)\sqrt{x-2}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2} (x+3)\sqrt{x-2} = 0$$

$$3)\ \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} = \lim_{x\to} \frac{\left[\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}\right]\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}\right]}{(x-1)\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{x - (2x-1)}{(x-1)\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left[\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}\right]}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2}$$

$$4)\ \lim_{x\to0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x\to0} \frac{x\left[\sqrt{x+1} + 1\right]}{\left[\sqrt{x+1} - 1\right]\left[\sqrt{x+1} + 1\right]}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x\left[\sqrt{x+1} + 1\right]}{(x+1) - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left[\sqrt{x+1}+1\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1}+1 = 2$$

.4

احسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{4x^2+x}}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}}$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+\sqrt{x}$

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$ (6 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}}$

الحل:

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{4x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[1-\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \frac{2-1}{1-2} = -1$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{4x^2+x+1}}{-4x-\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{-4x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x-\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left[-1-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left[-4+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{-4+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1-2}{-4+1} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]\left[\sqrt{x^2+1}+x\right]}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} \left[-x+\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[-\sqrt{x}\,.\,\sqrt{x}+\sqrt{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(-\sqrt{x}+1\right) = -\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2}\right]\left[\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}\right]}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}} = 0$$

$$6)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{-x-\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{\left[-x-\sqrt{x^2+4}\right]\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5\left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)}{x^2-(x^2+4)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{4}\left[-x+\sqrt{x^2+4}\right] = -\infty$$

.5

احسب النهايات التالية :

$$(1\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 3x} \qquad (2\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x} \qquad (3\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x}$$

$$(4\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \qquad (5\ \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$

باستعمال
العدد
المشتق

الحل:

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 3x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{3\,.\,\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to0} 2\times\frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

$$3)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin x}\times\cos x$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2.\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}}\times\cos x = 2$$

$$4)\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$5)\ \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{x\,.\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-\left(1-2\sin\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\,.\,\frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

.6

احسب النهايات التالية :

(1 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$ (2 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$

(3 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x}$

الحل:

حساب النهايات :

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

بوضع : $x-\frac{\pi}{2}=z$ أي $x=\frac{\pi}{2}+z$

لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ فإن : $z\longrightarrow 0$ وعليه :

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos 3\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3z\right)}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z\to0}\frac{\cos\frac{3\pi}{2}\cos 3z-\sin\frac{3\pi}{2}\sin 3z}{-\sin z}$$

$$= \lim_{z\to0}\frac{\sin 3z}{-\sin z} = \lim_{z\to0}\frac{3.\frac{\sin 3z}{3z}}{\frac{-\sin z}{z}} = -3$$

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x}$$

بوضع $x-\frac{\pi}{4}=z$ أي $x=\frac{\pi}{4}+z$

لما $x\longrightarrow\frac{\pi}{4}$ فإن : $z\longrightarrow 0$ وعليه

تغيير المتغير

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{1+\cos 4x} = \lim_{z\to0}\frac{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}{1+\cos 4\left(\frac{\pi}{4}+z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - 2\left[\sin\frac{\pi}{4}\ \cos z + \cos\frac{\pi}{4}\ \sin z\right]^2}{1 + \cos\left(\pi + 4z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cos z + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \sin z\right)^2}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - 2 \times \frac{1}{2}\left(\cos z + \sin z\right)^2}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - \left(\cos^2 z + \sin^2 z + 2\sin z\ \cos z\right)}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - \left(1 + 2\sin z\ \cos z\right)}{1 - \cos 4z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z\ .\ \cos z}{1 - \cos 4z} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z\ .\ \cos z}{1 - \left(1 - 2\sin^2 2z\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z\ .\ \cos z}{2\sin^2 2z} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z\ .\ \cos z}{\left(2\sin z\ .\ \cos z\right)^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z\ .\ \cos z}{4\sin^2 z\ .\ \cos^2 z} = \lim_{z\to 0} \frac{-1}{4\sin z\ .\ \cos z}$$

وعليه :

- $\lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{4\sin z\ .\ \cos z} = -\infty$
- $\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \cos 4x} = \lim_{z \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{4\sin z\ .\ \cos z} = +\infty$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$

بوضع $x - \frac{\pi}{2} = z$ نجد : $x = \frac{\pi}{2} + z$

وعليه : لما $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ فإن : $z \longrightarrow 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos z + \sin z}{1 - \cos z - \sin z} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{z}{2}\right) + 2\sin\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{z}{2}\right) - 2\sin\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2}}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2\frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2}}{2\sin^2\frac{z}{2} - 2\sin\frac{z}{2}\ \cos\frac{z}{2}}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}\right]}{2\sin\frac{z}{2}\left[\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}\right]}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

7

تعتبر الدالة f : $f(x) = \frac{x^2 + x - 4}{x + 1}$

(C) تمثيلها البياني .

1- عين مجموعة تعريف الدالة ثم أحسب النهايات عند أطرافها.

2- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة.

4- نفرض (Δ) المستقيم المقارب المائل.

ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) و المستقيم (Δ).

الحل:

1- مجموعة التعريف :

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ $D_f =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$

- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{x^2+x-4}{x+1} = +\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} x^2+x-4 \longrightarrow -4 \\ x+1 \xrightarrow{<} 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{x^2+x-4}{x+1} = -\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} x^2+x-4 \longrightarrow -4 \\ x+1 \xrightarrow{>} 0 \end{cases}$$

2) تبيان أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

إذن :
$$f(x) = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

باستعمال المطابقة

$$f(x) = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

ومنه :
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c = -4 \end{cases}$$
أي :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

إذن :
$$f(x) = x - \frac{4}{x+1}$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = +\infty$

فإن : $x=-1$ معادلة مستقيم مقارب.

و بما أن : $f(x) = x - \frac{4}{x+1}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x+1} = 0$

فإن : $y = x$ معادلة المستقيم المقارب المائل عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

4- دراسة الوضع النسبي لـ (Δ) و (C) :

$$f(x) - y = \frac{-4}{x+1}$$

ومنه :

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$
$f(x)-y$	$+$	$-$

إذن (Δ) لا يقطع (C) .

لما $x \in]-\infty\,;-1[$: (C) يقع فوق (Δ)

لما $x \in]1\,;+\infty[$: (C) يقع تحت (Δ)

.8

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = 2x + \sqrt{x^2+1}$

1- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- احسب : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - 3x\right]$ ثم $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right]$

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) .

الحل:

حساب النهايات :

$D_f =]-\infty ; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x + |x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x - x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x\left[2 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

2- حساب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - 3x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -x + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x-\sqrt{x^2+1}\right)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{-x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} 2x + \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-x-\sqrt{x^2+1}} = 0$$

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة :

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - 3x\right] = 0$

فإن : $y = 3x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.

بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right] = 0$

فإن : $y = x$ معادلة مستقيم مقارب مائل عند $-\infty$.

.9

نعتبر الدالة f حيث : $f(x) = \frac{4+\sin x}{x^2}$

1- عين عددان حقيقيان a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a \le 4 + \sin x \le b$$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x يكون :

$v(x) \le f(x) \le u(x)$ حيث u و v دالتان يطلب تعيينهما.

3- استنتج النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4- أحسب $\lim_{x\to0} f(x)$.

الحل:

1- تعيين a و b :

لدينا : $-1 \le \sin x \le 1$ ومنه : $3 \le 4+\sin x \le 5$

2- تبيان أن : $v(x) \le f(x) \le u(x)$

لدينا : $3 \le 4+\sin x \le 5$

وعليه : $\dfrac{3}{x^2} \le \dfrac{4+\sin x}{x^2} \le \dfrac{5}{x^2}$

ومنه : $\dfrac{3}{x^2} \le f(x) \le \dfrac{5}{x^2}$

3- استنتاج النهايات :

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4+\sin x}{x^2} = +\infty$

10.

f دالة معرفة بالعبارة : $f(x) = \dfrac{(\alpha-1)x+1}{(\alpha^2-1)x-3}$

حيث α عدد حقيقي .

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل:

حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

- إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$: $f(x) = -\dfrac{1}{3}$

وعليه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{3}$

- إذا كان : $\alpha^2 - 1 = 0$ و $\alpha - 1 \ne 0$ أي $\alpha + 1 = 0$

ومنه : $\alpha = -1$.

$$f(x) = \frac{-2x+1}{-3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$$

- إذا كان $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\alpha-1)x}{(\alpha^2-1)x} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\alpha-1)x}{(\alpha^2-1)x} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha+1}$$

11.

f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1} & ; \; x \neq 1 \;,\; x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

1− عين مجموعة تعريف الدالة f

2− ادرس استمرارية f عند -1 .

الحل:

1− تعيين مجموعة التعريف :

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ أي : $D_f =]-\infty \,;\, 1[\;\cup\;]1 \,;\, +\infty[$

2− دراسة الاستمرارية عند -1 :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = 3$$

وعليه : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = f(-1)$ ومنه f مستمرة عند -1 .

12.

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} & , \; x \geq 1 \\ f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1 & , \; x < 1 \end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

− دراسة الاستمرارية على $\mathbb{R}$ للدالة f :

- من أجل $x \in]1 \,;\, +\infty[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة ناطقة .
- من أجل $x \in]-\infty \,;\, 1[$: الدالة f مستمرة لأنها دالة كثيرة حدود .

- $f(1) = \dfrac{(1)^2}{(1)^2+1}$ ومنه : $f(1) = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{-1}{x^2} + 1 = 0$$

إذن f غير مستمرة عند 1 لأنها لا تقبل نهاية عند 1.

13.

f دالة معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+4} & , \; x > 0 \\ f(x) = \sqrt{2x^2+1} & , \; x \leq 0 \end{cases}$$

عين العدد الحقيقي b بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 0

الحل:

تعيين b بحيث تكون f مستمرة عند 0 :

لدينا : $f(0) = \sqrt{2(0)^2+1}$ ومنه : $f(0) = 1$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{ax+b}{x^2+4} = \frac{b}{4}$$

$$\lim_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0 \\ <}} \sqrt{2x^2+1} = 1$$

حتى تكون f مستمرة عند 0 يجب أن يكون :

$\dfrac{b}{4} = 1$ ومنه $b = 4$

14.

f دالة معرفة بجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		-2		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+4$	↘	3

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$.

الحل:

تعيين عدد حلول المعادلة : $f(x)=0$

1) في المجال : $]-\infty\,;\,-3]$ لدينا : f مستمرة و متزايدة تماما

و لدينا : $f(-3)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ومنه للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-\infty\,;\,-3[$.

2) في المجال $[-3\,;\,-2]$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما

ولدينا $f(-3)=1$ و $f(-2)=-3$ ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-3\,;\,-2[$.

3) في المجال $[-2\,;\,3]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما

ولدينا : $f(-2)=-3$ و $f(3)=4$ ومنه حسب نظرية القيم

المتوسطة للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]-2\,;\,3[$.

وبالتالي : عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$ هي ثلاث حلول.

15.

f دالة معرفة بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{|x-1|}{x-1} & ;\ x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

1- عين مجموعة التعريف

2- أدرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها

الحل:

1) مجموعة التعريف : $D_f=\mathbb{R}$

2) دراسة الاستمرارية على D_f :

لدينا :

$$\begin{cases} f(x)=x+\dfrac{x-1}{x-1} & ;\ x>1 \\ f(x)=x-\dfrac{x-1}{x-1} & ;\ x<1 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} f(x)=x+1\ ;\ x>1 \\ f(x)=x-1\ ;\ x<1 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

- الدالة f مستمرة على المجال $]1\,;\,+\infty[$ لأنها دالة كثيرة الحدود
- الدالة f مستمرة على $]-\infty\,;\,1[$ لأنها دالة كثيرة حدود .
- $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}}(x-1)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} x+1=2$

ومنه f غير مستمرة عند 1 وبالتالي f غير مستمرة على D_f .

16.

إليك جدول التغيرات لدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	-4	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=2$ في □ .

الحل:

تعيين عدد حلول المعادلة $f(x)=2$

1) في المجال $]-\infty\,;0]$: الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-4\,;4]$ و بما أن $2\in]-4\,;4]$ فإن للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة .

2) في المجال $[0\,;+\infty[$: الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-2\,;4]$ و بما أن $2\in]-2\,;4[$ فإن للمعادلة $f(x)=2$ حل وحيد حسب نظرية القيم المتوسطة.

إذن للمعادلة $f(x)=2$ حلين في □ .

17.

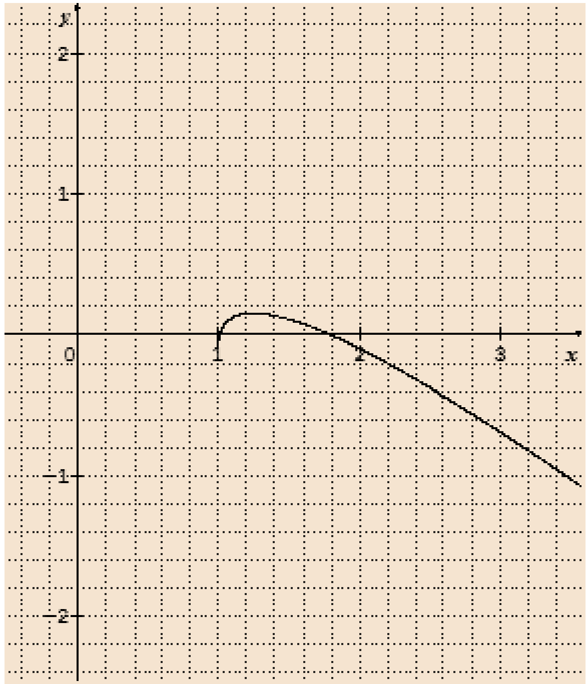
f دالة معرفة على المجال $[1\,;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=-x+\sqrt{x-1}+0{,}9$$

أنشئ التمثيل البياني للدالة f باستعمال آلة بيانية .ثم استنتج عدد حلول المعادلة : $f(x)=0$ مع إعطاء حصرا لكل منها بتقريب 10^{-2}

الحل:

تم انشاء هذا التمثيل البياني باستعمال المبرمج (Sin qua non)



المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا محصور في $]1{,}78\,;1{,}79[$.

18.

أثبت أن المعادلة : $2x-cosx=0$

تقبل على الأقل حلا في المجال : $\left]0\,;\frac{\pi}{6}\right[$

الحل:

إثبات أن المعادلة : $2x-cosx=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$

• الدالة f هي مجموع دالتين و منه فهي مستمرة على □ لأن الدالتين مستمرتين على □ .

• $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}$ و عليه : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$ وعليه : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

• $f(0) = 2(0) - \cos 0$ وعليه : $f(0) = -1$

إذن : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) , f(0) < 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في المجال $\left]0 ; \frac{\pi}{6}\right[$.

19.

f دالة معرفة على المجال $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ كمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} , x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند 0

2- ادرس استمرارية f على مجموعة التعريف .

الحل:

1- دراسة الاستمرارية عند 0 :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2$$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ وعليه f مستمرة عند 0 .

2- دراسة الاستمرارية على D_f :

لدينا : $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

ولدينا: $x \mapsto x \sin x$ مستمرة على □ لأنها جداء دالتين مستمرتين على □ .

ولدينا : $x \mapsto 1 - \cos x$ مستمرة على □ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على □ .

إذن الدالة f هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على □ فهي مستمرة على $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right[\cup \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ومنه الدالة f مستمرة على D_f .

.20

f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[0\,;1]$ ز تأخذ قيمها في المجال $[0\,;1]$.

1- برهن على وجود عدد α من المجال $[0\,;1]$ بحيث : $f(\alpha)=\alpha$.

2- فسر هندسيا هذه النتيجة .

3- هل تبقى النتائج السابقة صحيحة على مجال $[a\,;b]$ حيث $a<b$.

الحل:

1- البرهان على وجود α :

نعرف الدالة g كمايلي : $g(x)=f(x)-x$ على المجال $[0\,;1]$

• الدال g مستمرة على $[0\,;1]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[0\,;1]$.

• ولدينا $g(0)=f(0)$ و $g(1)=f(1)-1$

بما أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $[0\,;1]$ فإن : $0\le f(x)\le 1$

أي أن : $0\le f(0)\le 1$ و عليه $0\le g(0)\le 1$

إذن $g(0)\ge 0$.

وكذلك $0\le f(1)\le 1$ وعليه $-1\le f(1)-1\le 0$

إذن $g(1)\le 0$ ومنه : $g(0)\,.\,g(1)\le 0$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال $[0\,;1]$ بحيث $g(\alpha)=0$

أي $f(\alpha)-\alpha=0$ و عليه : $f(\alpha)=\alpha$

2- التفسير الهندسي للنتيجة :

العدد α هو حل للمعادلة $f(x)=x$ ومنه التمثيل البياني للدالة f يتقاطع مع المنصف الأول : $y=x$ في نقطة فاصلتها α .

3- لندرس صحة النتائج السابقة في المجال $[a\,;b]$.

لتكن الدالة g حيث : $g(x)=f(x)-x$.

• الدالة g مستمرة على $[a\,;b]$ لأنها مجموع دالتان مستمرتان على $[a\,;b]$

• $g(a)=f(a)-a$ و $g(b)=f(b)-b$

لدينا : $a\le f(x)\le b$ وعليه : $a\le f(a)\le b$

ومنه : $0\le f(a)-a\le b-a$ وبالتالي : $f(a)-a\ge 0$

أي أن : $g(a)\ge 0$

وكذلك : $a\le f(b)\le b$ وعليه : $g(b)\le 0$

إذن : $g(a)\,.\,g(b)\le 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد α من المجال $[a\,;b]$

بحيث $f(\alpha)-\alpha=0$ وعليه $f(\alpha)=\alpha$

وعليه (C_f) يتقاطع مع المنصف الأول في نقطة فاصلتها α .

إذن تبقى النتائج السابقة صحيحة

.21

برهن أن كل كثير حدود درجته فردية ينعدم على الأقل مرة في ℝ .

الحل:

نعتبر دالة كثيرة حدود من الدرجة n ودرجته فردية

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^n+\ldots+a_1x+a_0$$

حيث $a_n\ne 0$ و n عدد فردي نفرض $a_n>0$

• الدالة f مستمرة على ℝ .

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = -\infty$

وعليه حسب نظرية القيم المتوسطة للمعادلة $f(x) = 0$ حل على الأقل في

. $\mathbb{R}$

أي أن $f(x)$ ينعدم مرة واحدة على الأقل.

بالتوفيق في دورة 2020

أ- شعبان