المستوى : نهائي رياضيات و تقني رياضي. **الموضوع : معالجة جميع المنحنيات تمر من نقطة أو أكثر**

الأستاذ المكون : علالو

إن معالجة موضوع كل المنحنيات تمر من نقطة أو أكثر يتم خلال السنة أولى جذع مشترك علمي و الذي عن طريقه يمكن تصنيف التلاميذ إلى عدة مستويات لينبثق عن ذلك قسم سنة ثانية رياضيات أو تقني رياضي ، ومن التطبيقات الممكن التطرق لها :

1) **التطبيق الأول:** متعلق بدرس المستقيم في المستوي (سنة أولى جذع مشترك علمي)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، $\left(\Delta_m\right)$ المستقيم المعرف بالمعادلة الديكارتية التالية :

$\left(m-1\right)x+\left(m+1\right)y+m-2=0$. حيث m وسيط حقيقي

السؤال : بين أن كل المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعينها

الجواب :

الطريقة الأولى : كل المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من نقطة ثابتة معناه :

من أجل كل m من $\mathbb{R}$ ، توجد نقطة $M\left(x;y\right)$ بحيث $\left(m-1\right)x+\left(m+1\right)y+m-2=0$

$\left(m-1\right)x+\left(m+1\right)y+m-2=0$ تكافئ $\left(x+y+1\right)m+y-x-2=0$

و منه المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من نقطة ثابتة معناه من أجل كل m من $\mathbb{R}$ ، $\left(x+y+1\right)m+y-x-2=0$

وعليه المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من نقطة ثابتة معناه : $\begin{cases}x+y+1=0\\y-x-2=0\end{cases}$ نجد بعد حل الجملة : $\begin{cases}x=\dfrac{-3}{2}\\y=\dfrac{-1}{2}\end{cases}$

وبالتالي المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من النقطة $A\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$

الطريقة الثانية : نعتبر m و m' عددان حقيقيان حيث $m\neq m'$ و $M\left(x;y\right)$ نقطة من المستوي

$M\in\left(\Delta_m\right)\cap\left(\Delta_{m'}\right)$ تكافئ $\left(m-1\right)x+\left(m+1\right)y+m-2=0$ و $\left(m'-1\right)x+\left(m'+1\right)y+m'-2=0$

$M\in\left(\Delta_m\right)\cap\left(\Delta_{m'}\right)$ تكافئ $\left(m-1\right)x+\left(m+1\right)y+m-2=\left(m'-1\right)x+\left(m'+1\right)y+m'-2$

$M\in\left(\Delta_m\right)\cap\left(\Delta_{m'}\right)$ تكافئ $\left(m-m'\right)\left(x+y-1\right)=0$

و بما أن $m\neq m'$ فإن $M\in\left(\Delta_m\right)\cap\left(\Delta_{m'}\right)$ تكافئ $x+y-1=0$

أي أن $M\in\left(\Delta_m\right)\cap\left(\Delta_{m'}\right)$ تكافئ $y=-x+1\ldots\left(1\right)$

و بالتعويض في معادلة المستقيم $\left(\Delta_m\right)$ نجد $x=\dfrac{-3}{2}$ و بالتعويض في معادلة $\left(1\right)$ نجد $y=\dfrac{-1}{2}$

و بالتالي جميع المستقيمات $\left(\Delta_m\right)$ تمر من النقطة $A\left(\dfrac{-3}{2};\dfrac{-1}{2}\right)$

2) **التطبيق الثاني:** متعلق بدرس الدائرة في المستوي (سنة ثانية رياضيات أو تقني رياضي)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، $\left(E_k\right)$ الدائرة المعرفة بالمعادلة الديكارتية التالية :

$x^2+y^2+\left(k-1\right)x+\left(k+1\right)y+k-2=0$. حيث k وسيط حقيقي

السؤال : بين أن كل الدوائر تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعينهما

الجواب :

الطريقة الأول : كل الدوائر (E_k) تمر من نقطتين ثابتتين معناه :

من أجل كل k من $\mathbb{R}$ ، توجد نقطة $M(x;y)$ بحيث $x^2+y^2+(k-1)x+(k+1)y+k-2=0$

$x^2+y^2+(k-1)x+(k+1)y+k-2=0$ تكافئ $(x+y+1)k+x^2+y^2-x+y-2=0$

و منه الدوائر (E_k) تمر من نقطتين ثابتتين معناه :

من أجل كل k من $\mathbb{R}$ ، توجد نقطة $M(x;y)$ بحيث $(x+y+1)k+x^2+y^2-x+y-2=0$

و منه الدوائر (E_k) تمر من نقطتين ثابتتين معناه : $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x^2+y^2-x+y-2=0 \end{cases}$

وبالتالي $\begin{cases} y=-x-1 \\ x^2+(-x-1)^2-x-x-1-2=0 \end{cases}$ نجد $\begin{cases} y=-x-1 \\ x^2=1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=-x-1 \\ x=-1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y=-x-1 \\ x=1 \end{cases}$

ينتج أن الدوائر (E_k) تمر من النقطتين $A(-1;0)$ و $A(1;-2)$

الطريقة الثانية : ينجز ها التلميذ

3) **التطبيق الثالث:** متعلق بدرس المستوي في الفضاء (سنة ثانية و الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

السؤال الثالث من التمرين الثاني من الموضوع الأول بكالوريا شعبة الرياضيات دورة 2019:

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

m وسيط حقيقي و (P_m) مستو حيث : $(m-1)x+2y-z-m=0$ معادلة له

السؤال : أثبت أنه عندما يتغير m في $\mathbb{R}$ فإن المستوي يحوي مستقيما ثابتا يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

الجواب :

الطريقة الأول : كل المستويات (P_m) تحوي مستقيما ثابتا معناه :

من أجل كل m من $\mathbb{R}$ ، توجد نقطة $M(x;y)$ بحيث $(m-1)x+2y-z-m=0$

$(m-1)x+2y-z-m=0$ تكافئ $(x-1)m-x+2y-z=0$

و منه المستويات (P_m) تحوي مستقيما ثابتا معناه من أجل كل m من $\mathbb{R}$: $(x-1)m-x+2y-z=0$

و عليه المستويات (P_m) تحوي مستقيما ثابتا معناه $\begin{cases} x-1=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$

وبالتالي المستويات (P_m) تحوي مستقيما ثابتا معناه $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}$

و منه المستويات (P_m) تحوي مستقيما ثابتا (Δ) ذو تمثيل وسيطي : $\begin{cases} x=1 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}$

الطريقة الثانية : ينجز ها التلميذ

4) **التطبيق الرابع:** متعلق بدرس الدوال العددية (سنة ثانية و الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

f_m الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$بـ : $f_m(x)=x^2+(m-1)x-m+2$ حيث m وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_m)$ البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_m)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعينها

الجواب :

الطريقة الأول: ينجز ها التلميذ

الطريقة الثانية: نعتبر m و m' عددان حقيقيان حيث $m \neq m'$ و $M(x;y)$ نقطة من المستوي

$M \in (\mathcal{C}_m) \cap (\mathcal{C}_{m'})$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $f_m(x) = f_{m'}(x)$

$f_m(x) = f_{m'}(x)$ تكافئ $x^2 + (m-1)x - m + 2 = x^2 + (m'-1)x - m' + 2$

$f_m(x) = f_{m'}(x)$ تكافئ $(m-m')(x-1) = 0$

و بما أن $m \neq m'$ فإن $M \in (\mathcal{C}_m) \cap (\mathcal{C}_{m'})$ تكافئ $x = 1$

و بالتعويض في معادلة المنحنى $(\mathcal{C}_m)$ نجد $y = f_m(1) = 2$ و بالتالي جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_m)$ تمر من النقطة $w(1;2)$

5) **التطبيق الخامس:** متعلق بدرس الدوال العددية (سنة ثانية و الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = \sqrt{(k^2+1)x^2 + 2(k^2+1)x + k^2 + 2}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة يطلب تعينها

الطريقة الأولى:

جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة معناه من أجل كل k من $\mathbb{R}$ توجد نقطة $M(x;y)$ بحيث $x \in \mathbb{R}$ و $y = f_k(x)$

$y = f_k(x)$ تكافئ و $y = \sqrt{(k^2+1)x^2 + 2(k^2+1)x + k^2 + 2}$

$y = f_k(x)$ تكافئ و $y^2 = (k^2+1)x^2 + 2(k^2+1)x + k^2 + 2$ و $y \geq 0$

$y = f_k(x)$ تكافئ و $(x^2+2x+1)k^2 + x^2 + 2x + 2 - y^2 = 0$ و $y \geq 0$

ومنه جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمرمن نقطة ثابتة معناه من أجل كل $k \in \mathbb{R}$: $(x^2+2x+1)k^2 + x^2 + 2x + 2 - y^2 = 0$ و $y \geq 0$

إذن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة معناه: $\begin{cases} x^2+2x+1=0 \\ x^2+2x+2-y^2=0 \end{cases}$ و $y \geq 0$

و بالتالي جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة معناه: $\begin{cases} x=-1 \\ y^2=1 \end{cases}$ و $y \geq 0$

نجد جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة معناه: $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ ، ينتج كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من النقطة $w(-1;1)$

الطريقة الثانية : ينجز ها التلميذ

6) **التطبيق السادس:** متعلق بدرس الدوال العددية (سنة الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

السؤال الأول من التمرين الرابع من الموضوع الثاني بكالوريا شعبة الرياضيات دورة 2019:

f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعينهما

الجواب :

الطريقة الأول: ينجز ها التلميذ

الطريقة الثانية: نعتبر k و k' عددان حقيقيان حيث $k \neq k'$ و $M(x;y)$ نقطة من المستوي

$M \in (\mathcal{C}_k) \cap (\mathcal{C}_{k'})$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $f_k(x) = f_{k'}(x)$

$f_k(x) = f_{k'}(x)$ تكافئ $(x+1)^2 e^{-kx} = (x+1)^2 e^{-k'x}$

$f_k(x) = f_{k'}(x)$ تكافئ $(x+1)^2 (e^{-kx} - e^{-k'x}) = 0$

ومنه $M \in (\mathcal{C}_k) \cap (\mathcal{C}_{k'})$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $(x+1)^2 = 0$ أو $e^{-kx} - e^{-k'x} = 0$

أي أن $M \in (\mathcal{C}_k) \cap (\mathcal{C}_{k'})$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $x = -1$ أو $e^{-kx} = e^{-k'x}$

ينتج $M \in (\mathcal{C}_k) \cap (\mathcal{C}_{k'})$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $x = -1$ أو $(k-k')x = 0$

و بما أن $k \neq k'$ فإن $M \in (\mathcal{C}_k) \cap (\mathcal{C}_{k'})$ تكافئ $x \in \mathbb{R}$ و $x = -1$ أو $x = 0$

و بالتعويض في معادلة المنحني $(\mathcal{C}_k)$ نجد $y = f_k(-1) = 0$ أو $y = f_k(0) = 1$

و بالتالي جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين هما $A(-1;0)$ و $A(0;1)$

7) __التطبيق السابع__: متعلق بدرس الدوال العددية (سنة الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

السؤال الرابع من الجزء الثالث من التمرين الرابع من الموضوع الثاني بكالوريا شعبة تقني رياضي دورة 2013:

n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ، f_n الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

$(\mathcal{C}_n)$ منحناها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها

الجواب :

__الطريقة الأول:__ ينجز ها التلميذ

__الطريقة الثانية:__ بما أن n عدد طبيعي فإنه يكن اعتبار المنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ و $M(x;y)$ نقطة من المستوي

$M \in (\mathcal{C}_n) \cap (\mathcal{C}_{n+1})$ تكافئ $x \in]0;+\infty[$ و $f_n(x) = f_{n+1}(x)$

$f_n(x) = f_{n+1}(x)$ تكافئ $\dfrac{e^x - 1}{x} + n \ln x = \dfrac{e^x - 1}{x} + (n+1)\ln x$

$f_n(x) = f_{n+1}(x)$ تكافئ $n \ln x = (n+1) \ln x$

ومنه $M \in (\mathcal{C}_n) \cap (\mathcal{C}_{n+1})$ تكافئ $x \in]0;+\infty[$ و $\ln x = 0$

أي أن $M \in (\mathcal{C}_n) \cap (\mathcal{C}_{n+1})$ تكافئ $x \in]0;+\infty[$ و $x = 1$

و بالتعويض في معادلة المنحني $(\mathcal{C}_n)$ نجد $y = f_n(1) = e - 1$

و بالتالي جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر من نقطة ثابتة هما $B(1; e-1)$

8) __التطبيق الثامن__: متعلق بدرس الدوال العددية (سنة الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

السؤال الأول من الجزءالثاني من التمرين الرابع من الموضوع الثاني بكالوريا شعبة الرياضيات الدورة الإستثنائية 2017:

ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$

و ليكن $(\mathcal{C}_m)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_m)$ تشمل نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها

الجواب : متروك للتلميذ

9) **التطبيق التاسع** : متعلق بدرس الدوال العددية (سنة الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

السؤال الأول من الجزءالثاني من مسألة موضوع البكالوريا شعبة الرياضيات دورة : 1989

α وسيط حقيقي حيث $\alpha \neq \frac{1}{2}$، نعتبر الدالة العددية f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ : $f_\alpha(x)=\frac{\alpha e^x+1-\alpha}{1+e^x}$

و ليكن $(\mathcal{C}_\alpha)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_\alpha)$ تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياتها

الجواب : متروك للتلميذ

10) **التطبيق العاشر** : متعلق بدرس الدوال العددية (سنة الثالثة رياضيات أو تقني رياضي)

السؤال الأول من الجزء الثاني من مسألة موضوع البكالوريا شعبة الرياضيات دورة : 1997

m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ : $f_m(x)=e^{-2x}-(1+m)e^{-x}+m$

و ليكن $(\mathcal{C}_m)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

السؤال : بين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_m)$ تشمل نقطة ثابتة A يطلب تعيين إحداثياتها

الجواب : متروك للتلميذ

Monsieur : ALLALOU MOHAMED

Institut progress school

80 rue didouche mourad , alger centre

Tél : 023 50 49 60
0553 69 38 21
0655 68 28 91
0790 59 89 62