الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

المستوى: 3 ع تج   **المـــدة :** $\log 10$ سا و $\ln\left(e^{30}\right)$ د

التمرين الأول: في كل مما يلي، يوجد اجابة واحدة صحيحة عينها مع التبرير:

1) الكتابة المبسطة للعدد A حيث : $A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln(e+1)$ هي:

أ)- $A=e+1$ ب)- $A=0$ ج)- $A=-1$

2) مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(2-x)+\ln(x+3)-\ln 4\geq 0$ هي:

أ)- $s=[1;2]$ ب)- $s=]-2;1[$ ج)- $s=[-2;1]$

3) الحل العام للمعادلة التفاضلية: $2y-y'+1=0$ هو الدوال f حيث: (c ثابت حقيقي)

أ)- $f(x)=ce^{2x}-\dfrac{1}{2}$ ب)- $f(x)=ce^{x}-\dfrac{1}{2}$ ج)- $f(x)=ce^{2x}-2$

4) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ هي:

أ)- دالة زوجية   ب)-دالة فردية   ج)- ليست زوجية و لا فردية

5) f الدالة المعرفة على $[-1;1]-\{0\}$ بـ: $f(x)=1+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ الدالة المشتقة للدالة f هي:

أ)- $f'(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ ب)- $f'(x)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ ج)- $f'(x)=\dfrac{2}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

❷ (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1:

أ)- مماسا معادلته: $y=x$ ب)- نقطة زاوية   ج)- نصف مماس موازي لمحور التراتيب.

❸ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

أ)- $\alpha\in]1,01;1,02[$ ب)- $\alpha\in]0,06;0,07[$ ج)- $\alpha\in]-0,8;-0,7[$

التمرين الثاني:

I)- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند الأطراف المفتوحة من مجموعة التعريف . فسر النتيجة بيانيا؟.

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ و شكل جدول تغيراتها.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي، ثم حدد نقطة تقاطعهما A .

4) عين احداثيات نقاط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

5) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة A.

6) أنشئ (D) و (C_f).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد و اشارة حلول المعادلة: $x^2\left(1-m^2\right)-4x=-4-m^2$.

II)- نعتبر الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\dfrac{\left(e^{x}-2\right)^2}{\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)}$. و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عين مجموعة تعريف الدالة g .

2) بين أن: $g'(x)=e^{x}f'\left(e^{x}\right)$.

أستاذتكم تتمنى لكم كل التوفيق و النجاح

التمرين الأول:

الإجابة الصحيحة	التبرير
1)..........ج	$A=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-2\ln(e+1)=\ln\left(e+e^{-1}+2\right)-\ln(e+1)^2=\ln\left(\frac{e+e^{-1}+2}{(e+1)^2}\right)$ $=\ln\left(\frac{e+\frac{1}{e}+2}{(e+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{\frac{e^2+1+2e}{e}}{(e+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{(e+1)^2}{e}\times\frac{1}{(e+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\left(e^{-1}\right)=-1$
2)..............ج	المجموعة المرجعية للمتراجحة هي: $D=]-3;2[$. منه: $\ln(2-x)+\ln(x+3)-\ln 4\geq 0$ أي: $\ln(2-x)+\ln(x+3)\geq\ln 4$ $\ln((2-x)(x+3))\geq\ln 4$ تكافيء: $((2-x)(x+3))\geq 4$ أي: $-x^2-x+2\geq 0$ و بما أن: فان: $s=[-2;1]$ x: $-\infty$ -2 1 $+\infty$ ؛ $-x^2-x+2$: - + -
3)..............أ	$2y-y'+1=0$ تكافيء $y'=2y+1$ حلولها هي الدوال من الشكل: $f(x)=ce^{2x}-\frac{1}{2}$;$c\in\mathbb{R}$
4)..............أ	الدالة f زوجية لأن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا: $-x\in\mathbb{R}$ و: $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)$
5) ❶ ....ب	الدالة المشتقة للدالة f هي: $f'(x)=0+\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\times x-1\times\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-\sqrt{1-x^2}^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
❷ ....ج	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x(x-1)}=-\infty$ الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 منه (C_f) يقبل نصف مماس موازي لحامل محور التراتيب.
❸ ....ج	مبرهنة القيم المتوسطة

التمرين الثاني:

الجزء الأول: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

1) **حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف:**

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\quad;\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\frac{(-1-2)^2}{(-1)^2-1}=+\infty\ ;\ \lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\frac{(-1-2)^2}{(-1)^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}f(x)=\frac{(1-2)^2}{(1)^2-1}=-\infty\ ;\ \lim_{\substack{x\to 1\\>}}f(x)=\frac{(1-2)^2}{(1)^2-1}=+\infty$$

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين موازيين لمحور التراتيب معادلته: $x=-1$ ، $x=1$.
و مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: $y=1$.

2) **حساب المشتقة:** f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على و دالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x^2-1)-2x(x-2)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2(x-2)\left[(x^2-1)-x(x-2)\right]}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2(x-2)(-1+2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^2-10x+4}{(x^2-1)^2}$$

اتجاه تغير الدالة f:

$x-2=0$ أو: $-1+2x=0$

$x=2$ أو: $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	+	

الدالة f متزايدة تماما على المجالات $]-\infty;1[$ و $\left]-1;\frac{1}{2}\right[$ و $]2;+\infty[$ ومتناقصة تماما $\left]\frac{1}{2};1\right[$ و $]1;2[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$1/2$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	-	-	+	
$f(x)$						

3) دراسة الوضع النسبي ل (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي: ندرس اشارة الفرق:

$$(f(x)-1)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}-1=\frac{-4x+5}{x^2-1}$$

x	$+\infty$ $-\infty$	-1	1	5/4
$-4x+5$	+	+	+	-
x^2-1	+	-	+	+
$\frac{-4x+5}{x^2-1}$	+	-	+	-
الوضع النسبي ل (C_f) بالنسبة لـ (Δ)				

نقطة التقاطع هي: $A\left(\frac{5}{4};1\right)$

4) حساب إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات:

مع محور الفواصل:

$f(x)=0$ معناه: $\begin{cases}(x-2)^2=0\\ x^2-1\neq 0\end{cases}$ أي: $x=2$

إذن: $(C_f)\cap(xx')=\{(2;0)\}$.

مع محور التراتيب:

$f(0)=-4$ منه: $(C_f)\cap(yy')=\{(0;-4)\}$

5) معادلة المماس عند النقطة $A\left(\frac{5}{4};1\right)$:

$$(T):\ y=f'\left(\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right)+f\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$y=\frac{-64}{9}\left(x-\frac{5}{4}\right)+1$$

$$y=-7{,}11x+9{,}89$$

6) الإنشاء: (أخر الورقة)

7) المناقشة حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة:

-

$(x+m)(x+1)^2-x^3-2x^2=0$:

$$x^2(1-m^2)-4x=-4-m^2$$

$$(x^2-4x+4)-m^2x^2+m^2=0$$

$$(x-2)^2-(m^2x^2-m^2)=0$$

تكافئ: $(x-2)^2=m^2(x^2-1)$

$$\frac{(x-2)^2}{(x^2-1)}=m^2$$

منه: $f(x)=m^2$

حلول المعادلة $f(x)=m^2$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم الذي معادلته: $y=m^2$. (المناقشة أفقية).

- ➢ $m^2\in]0;1[$ أي: $0<m^2<1$ منه: $-1<m<1$ المعادلة لها حلان موجبان.
- ➢ $m^2=0$ أي: $m=0$ للمعادلة حل مضاعف.
- ➢ $m^2=1$ أي: $m=1$ أي: $m=-1$ للمعادلة حل وحيد موجب.
- ➢ $m^2\in]1;+\infty[$ أي: $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ للمعادلة حلان أحدهما موجب و الأخرسالب.

الجزء الثاني: لدينا: $g(x)=f(e^x)$

1) مجموعة التعريف:

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^x-1\neq 0\ ;\ e^x+1\neq 0\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^x\neq 1\ ;\ e^x\neq -1\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$$

2) بين أن: $g'(x)=e^xf'(e^x)$.

لدينا: $g(x)=f(e^x)$

منه: $g'(x)=e^xf'(e^x)$