المؤسسة : متقن سرار عبد الحميد – زغاية　　　　　　**السنة الدراسية :** 2019/2018

المستوى : الثالثة علوم تجريبية　　　　　　**المدة :** $\ln e^2$ ساعة

الاختبار الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول :

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي :

	الجواب (أ)	الجواب (ب)	الجواب (ج)
حلول المعادلة التفاضلية $2y'+y-3=0$ هي	$y=ce^{\frac{-x}{2}}-3$	$y=ce^{\frac{-x}{2}}+2$	$y=ce^{\frac{-x}{2}}+3$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+e)-1}{x}=$	e	e^{-1}	$2e$
حلول المتراجحة $\ln(-2x+1)\prec 3$ هي	$S=\left]\dfrac{1-e^3}{2};\dfrac{1}{2}\right[$	$S=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$	$S=\left]-\infty;\dfrac{1-e^3}{2}\right[$
إذا كان $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ فإن (C_f) يقبل	مقارب عمودي معادلته $x=-1$	مقارب أفقي معادلته $y=-1$ عند $-\infty$	مقارب مائل معادلته $y=2x$ عند $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin(x)-x}{x^2}=$	0	1	2

التمرين الثاني :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $g(x)=1-x^3-2\ln x$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. احسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .
2. أ - بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$.
   ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
3. أ - بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α ؛ β حيث : $0,6\prec\alpha\prec 0,8$ و $1,6\prec\beta\prec 1,8$.
   ب – استنتج إشارة $f(x)$.
4. أ - بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2x+3$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $(+\infty)$.
   ب – ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
5. أنشيء (Δ) والمنحنى (C_f) .
6. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب : $h(x)=\dfrac{2\ln|x|}{x^2}-2|x|+3$
   أ – بين أن الدالة h زوجية ثم اشرح كيفية إنشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) . ((C_h) منحنى الدالة h)
7. نعتبر الدالة k المعرفة ب : $k(x)=\ln f(x)$
   - اعتمادا على السؤال 3 ب شكل جدول تغيرات الدالة k .

أساتذة المادة

العام الدراسي : 2018 /2019 المؤسسة : متقن سرار عبد الحميد – زغاية

المستوى : الثالثة علوم تجريبية . **تصحيح الاختبار الأول في مادة الرياضيات**

التمرين الأول

1 حلول المعادلة التفاضلية $2y'+y-3=0$ هي $y=ce^{\frac{-1}{2}x}+3$: **(الجواب ج)**

التبرير :

$2y'+y-3=0$ تكافيء $y'=\frac{-1}{2}y+\frac{3}{2}$ وهي من الشكل $y'=ay+b$ وحلولها هي الدوال f_c حيث $f_c(x)=ce^{ax}-\frac{b}{a}$ أي $y=ce^{\frac{-1}{2}x}+3$

2 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-1}{x}=e^{-1}$ **(الجواب ب)**

التبرير :

نضع $f(x)=\ln(x+e)$ ومنه $f'(x)=\frac{1}{x+e}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+e)-\ln(0+e)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

3 حلول المتراجحة $\ln(-2x+1)\prec 3$ هي $S=\left]\frac{1-e^3}{2};\frac{1}{2}\right[$ **(الجواب أ)**

التبرير :

مجموعة تعريف المتراجحة هي $D=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

$\ln(-2x+1)\prec 3$ تكافيء $\ln(-2x+1)\prec \ln e^3$ ومنه $-2x+1\prec e^3$ ومنه $-2x\prec e^3-1$ ومنه $x\succ\frac{1-e^3}{2}$

4 إذا كان $f(x)=\ln(e^{2x}+1)$ فإن (C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y=2x$ عند $+\infty$ **(الجواب ج)**

التبرير :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{2x}+1)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)-2x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln e^{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\cancel{2x}+\ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)-\cancel{2x}=0$$

5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin(x)-x}{x^2}=0$ **(الجواب أ)**

التبرير :

لدينا $-1\le\sin(x)\le 1$ ومنه $-3\le 3\sin(x)\le 3$ ومنه $-3-x\le 3\sin(x)-x\le 3-x$

ومنه نجد $\frac{-3-x}{x^2}\le\frac{3\sin(x)-x}{x^2}\le\frac{3-x}{x^2}$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3-x}{x^2}=0$ فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sin(x)-x}{x^2}=0$

التمرين الثاني

I) الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $g(x)=1-x^3-2\ln x$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-x^3-2\ln x\right)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-x^3-2\ln x\right)=-\infty$

حساب $g'(x)$ ودراسة اشارتها :

g تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا : $g'(x)=-3x^2-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-3x^3-2}{x}=\dfrac{-\left(3x^3+2\right)}{x}$

$g'(x)\prec 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$.

(2) حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$:

$g(1)=1-(1)^3-2\ln 1=1-1=0$

- **استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$:**

x	0		1		$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	0	-	

II) الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3$

(1) حساب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم تفسير النتيجة الأخيرة بيانيا :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ نهاية شهيرة)
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{2\ln x}{x^2}=-\infty$)

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

(2) أ - تبيان أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$:

f تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\left(\frac{2\ln x}{x^2}-2x+3\right)'=\frac{2\frac{1}{x}\times x^2-2x\times 2\ln x}{x^4}-2=\frac{2x-4x\ln x}{x^4}-2$$
$$=\frac{2-4\ln x}{x^3}-2$$
$$=\frac{2-4\ln x-2x^3}{x^3}$$
$$=\frac{2\left(1-2\ln x-x^3\right)}{x^3}$$
$$=\frac{2g(x)}{x^3}$$

من اجل كل $x\in]0,+\infty[$ فإن $x^3\succ 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب – استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم إنشاء جدول تغيراتها :

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$ ومنه $x=1$
- $f'(x)\succ 0 \Leftrightarrow g(x)\succ 0$ ومنه $x\in]0;1[$ ومنه الدالة f **متزايدة تماما** على المجال $]0;1[$.
- $f'(x)\prec 0 \Leftrightarrow g(x)\prec 0$ ومنه $x\in]1;+\infty[$ ومنه الدالة f **متناقصة تماما** على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3 أ - تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α ؛ β حيث : $0,6\prec\alpha\prec 0,8$ و $1,6\prec\beta\prec 1,8$.

* **على المجال** $]0,6;0,8[$ **:**

- f مستمرة على $]0,6;0,8[$.
- $f(0,6)\times f(0,8)\prec 0$ (لأن $f(0,6)=-1,03$ ؛ $f(0,8)=0,7$) .
- f رتيبة (متزايدة تماما) على $]0,6;0,8[$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,6\prec\alpha\prec 0,8$

* **على المجال** $]1,6;1,8[$ **:**

- f مستمرة على $]1,6;1,8[$.
- $f(1,6)\times f(1,8)\prec 0$ (لأن $f(1,6)=0,16$ ؛ $f(1,8)=-0,23$) .
- f رتيبة (متناقصة تماما) على $]1,6;1,8[$
- ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $1,6\prec\beta\prec 1,8$

ب – استنتاج إشارة $f(x)$:

x	0		α		β		$+\infty$
إشارة $f(x)$		-	**0**	+	**0**	-	

4 أ - تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2x+3$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $(+\infty)$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\ln x}{x^2}\right)=0$

فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=-2x+3$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $(+\infty)$.

ب – دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

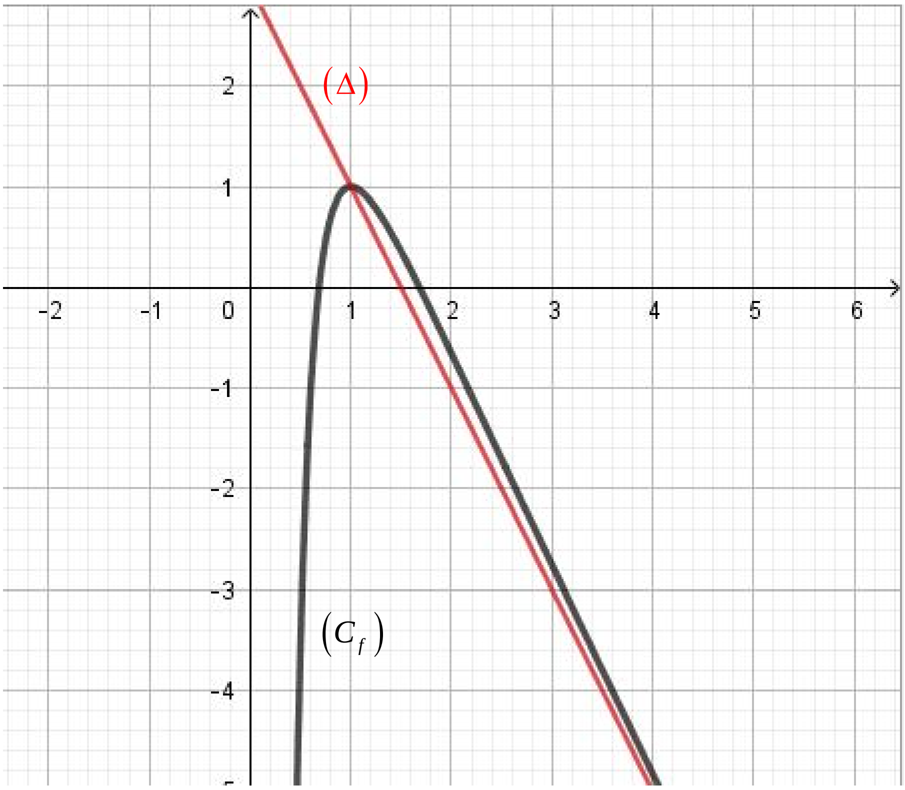
ندرس إشارة الفرق $\left[f(x)-(-2x+3)\right]$ وهو من إشارة $\dfrac{2\ln x}{x^2}$

- $\left[f(x)-(-2x+3)\right]=0$ تكافيء $\dfrac{2\ln x}{x^2}=0$ تكافيء $\ln x=0$ تكافيء $\ln x=\ln 1$ ومنه $x=1$.
- $\left[f(x)-(-2x+3)\right]\succ 0$ تكافيء $\dfrac{2\ln x}{x^2}\succ 0$ تكافيء $\ln x\succ 0$ تكافيء $\ln x\succ\ln 1$ ومنه $x\succ 1$ أي $x\in]1;+\infty[$
- $\left[f(x)-(-2x+3)\right]\prec 0$ تكافيء $\dfrac{2\ln x}{x^2}\prec 0$ تكافيء $\ln x\prec 0$ تكافيء $\ln x\prec\ln 1$ ومنه $0\prec x\prec 1$ أي $x\in]0;1[$

الوضع النسبي :

x	0	1	$+\infty$
وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

5 انشاء (Δ) والمنحنى (C_f) :



6 نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ب : $h(x)=\dfrac{2\ln|x|}{x^2}-2|x|+3$

أ – تبيان أن الدالة h زوجية ثم شرح كيفية إنشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) .

- من أجل $x\in D_h$ ؛ $-x\in D_h$ (D_h متناظر بالنسبة إلى 0)

$$h(-x)=\frac{2\ln|-x|}{(-x)^2}-2|-x|+3$$

- ولدينا :

$$=\frac{2\ln|x|}{x^2}-2|x|+3$$

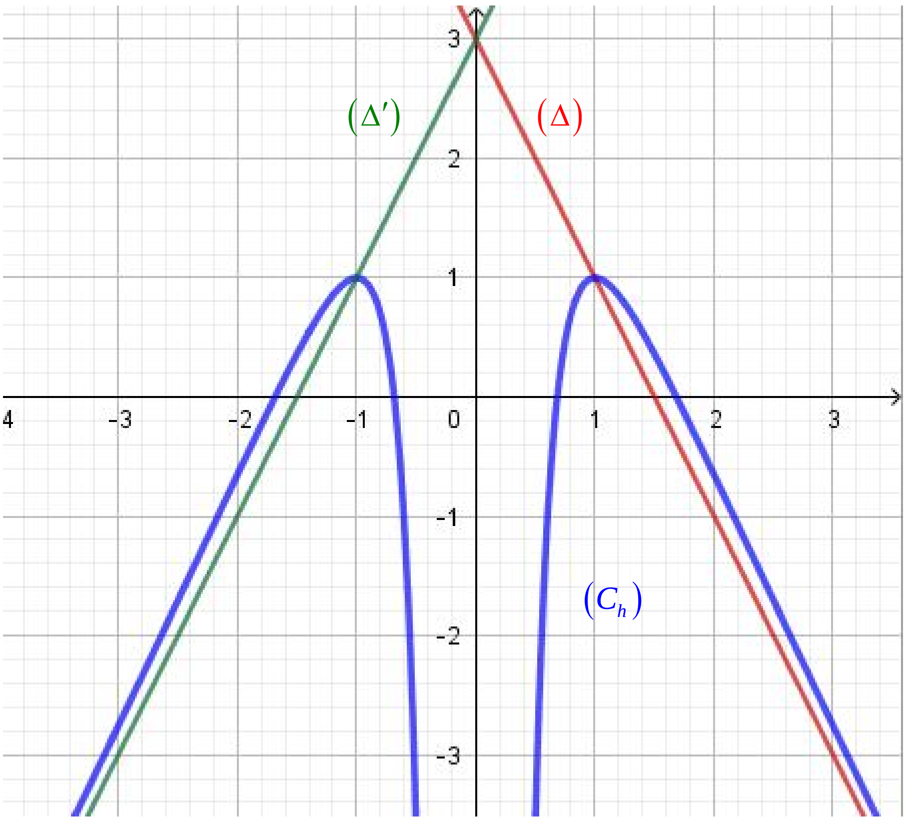
$$=h(x)$$

ومنه h **دالة زوجية .**

شرح كيفية إنشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) .

- على المجال $]0;+\infty[$: (C_h) منطبق على (C_f) . ($h(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}-2x+3=f(x)$)
- على المجال $]-\infty;0[$: (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب . (h دالة زوجية)

• إنشاء (C_h) :



⑦ الدالة k معرفة ب : $k(x)=\ln f(x)$

• اعتمادا على السؤال ③ ب إنشاء جدول تغيرات الدالة k :

k معرفة إذا كان $f(x)\succ 0$ ومنه $D_k=]\alpha;\beta[$ ؛ $k'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

x	α		1		β
$k'(x)$		+	0	-	
$k(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا 2019