الواجب المنزلي الثاني

التمرين الأول

الجزء الأول

1. عين حلول المعادلة التفاضلية : $(1)\cdots\cdots y'-2y=0$.

2. a و b عددان حقيقيان و u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $u(x)=(ax+b)e^{x}$.

أ- عين العددين a و b حتى تكون الدالة u حلا للمعادلة $(2)\cdots\cdots y'-2y=xe^{x}$.

ب- برهن أن v تكون حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $(v+u)$ حل للمعادلة (2).

ج- استنتج جميع حلول المعادلة (2).

د- عين الحل الخاص للمعادلة (2) و الذي ينعدم من أجل $x=0$.

الجزء الثاني

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^{x}-x-2$.

1. أدرس تغيرات الدالة g.

2. برهن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين أحدهما معدوم و الآخر α حيث $-1.6<\alpha<-1.5$.

3. استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثالث

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ (فسر النتيجة هندسيا) و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{x}g(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4. أرسم (C_f).

5. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=e^{-2x}-(1-x)e^{-x}$ و (C_h) تمثيلها البياني.

- بين كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f).

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)+m=0$.

التمرين الثاني

❀ الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,1[$ بـ : $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln(x)$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=10cm$.

1. أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} g(x)$.

2. أحسب من أجل كل x من $]0,1[$: $g'(x)$ ثم بين أن $g''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$ ، عين إشارة $g''(x)$.

3. أدرس تغيرات الدالة g'.

4. استنتج أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث $(\alpha<\beta)$ ثم استنتج إشارة $g'(x)$.

5. شكل جدول تغيرات الدالة g.

6. أحسب $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

7. أرسم (C_g) ، يعطى $g(\alpha)\approx 0.15$ و $g(\beta)\approx -0.15$.

8. لتكن الدالة φ المعرفة على المجال $]0,1[$ بـ: $\varphi(x)=-g(x)$.

- بين كيف يمكن رسم (C_φ) انطلاقا من (C_g).

❀ الجزء الثاني

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\ln(x)\times\ln(1-x)\ ;\ x\in]0,1[\\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=10cm$.

1. بين أن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ ، ماذا تستنتج؟

2. بين أنه من أجل كل $x\in[0,1]$: $f(1-x)=f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

3. أحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$.

4. بين أنه من أجل كل x من $]0,1[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1-x)}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5. أرسم (C_f).

قد لا يبلغ المرء الفجر إلا عن طريق الليل

التصحيح

التمرين الأول

الجزء الأول

1. تعيين حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=0$: هي الدوال $x\mapsto Ce^{2x}$ حيث $C\in\mathbb{R}$.

2. أ- تعيين العددين a و b: u حلا للمعادلة $y'-2y=xe^{x}$ معناه $u'(x)-2u(x)=xe^{x}$ أي $ae^{x}+(ax+b)e^{x}-2(ax+b)e^{x}=xe^{x}$ أي $(-ax+a-b)e^{x}=xe^{x}$ بالمطابقة نجد: $a=-1$ و $b=-1$.
و منه $u(x)=(-x-1)e^{x}$.

ب- برهان أن v حل للمعادلة (1): $(v+u)$ حل للمعادلة (2) معناه $(u+v)'-2(u+v)=xe^{x}$ أي $u'-2u+v'-2v=xe^{x}$ و منه نستنتج أن $v'-2v=0$ أي v حل للمعادلة (1).

ج- استنتاج جميع حلول المعادلة (2): نضع $f=u+v$ ومنه مجموعة حلول المعادلة (2):

$f(x)=\overbrace{(-x-1)e^{x}}^{u}+\overbrace{Ce^{2x}}^{v}$ حيث $C\in\mathbb{R}$.

د- تعيين الحل الخاص: $f(0)=(-0-1)e^{0}+Ce^{2\times 0}=0$ أي $C=1$ و منه $f(x)=(-x-1)e^{x}+e^{2x}$.

الجزء الثاني

1. دراسة تغيرات الدالة g:

أ- النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}\underbrace{2e^{x}}_{0}\underbrace{-x}_{-(-\infty)}-2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\left(2\underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{+\infty}-1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}\right)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{e^{x}}_{+\infty}\left(2-\underbrace{\frac{x}{e^{x}}}_{0}-\underbrace{\frac{2}{e^{x}}}_{0}\right)=+\infty$

ب- اتجاه تغير الدالة: $g'(x)=2e^{x}-1$ و منه $g'(x)=0$ معناه $2e^{x}-1=0$ أي $e^{x}=\frac{1}{2}$ أي $x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$.

$$\begin{aligned}g(-\ln 2)&=2e^{-\ln 2}-(-\ln 2)-2\\&=2e^{\ln\frac{1}{2}}-(-\ln 2)-2\\&=1+\ln 2-2\\&=-1+\ln 2\approx-0.31\end{aligned}$$

ج- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(-\ln 2)$	↗ $+\infty$

2. برهان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين: حل معدوم أي $g(0)=2e^{0}-0-2=0$ و الآخر $-1.6<\alpha<-1.5$: لدينا الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-\ln 2[$ فهي كذلك على المجال $]-1.6,-1.5[$ و $g(-1.6)\times g(-1.5)=(0.004)\times(-0.05)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $-1.6<\alpha<-1.5$ يحقق $g(\alpha)=0$.

3. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثالث

1. تبيان أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{e^{2x}}_{0}-\underbrace{xe^{x}}_{0}+\underbrace{e^{x}}_{0}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-(x+1)e^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left[1-\frac{x}{\underbrace{e^{x}}_{0}}-\frac{1}{\underbrace{e^{x}}_{0}}\right]=+\infty$

✎ **التفسير الهندسي:** وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$.

2. تبيان أن: $f'(x)=2e^{2x}-\left[e^{x}+e^{x}(x+1)\right]=2e^{2x}-xe^{x}-2e^{x}=e^{x}\underbrace{\left(e^{x}-x-2\right)}_{g(x)}=e^{x}\times g(x)$

و منه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ لأن $e^{x}>0$.

✎ **جدول تغيرات الدالة:**

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. تبيان أن: $f(\alpha)=-\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$ لدينا: $g(\alpha)=2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ أي $e^{\alpha}=\frac{\alpha+2}{2}$ و لدينا من جهة أخرى :

$$f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(e^{\alpha}\right)^{2}-(\alpha+1)e^{\alpha}=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{2}-(\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)=-\left(\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}\right)$$

✎ **حصر** $f(\alpha)$: $-1.6<\alpha<-1.5$ أي $\begin{cases}(-1.6)^{2}>\alpha^{2}>(-1.5)^{2}\\ 2(-1.5)>2\alpha>2(-1.6)\end{cases}$ أي

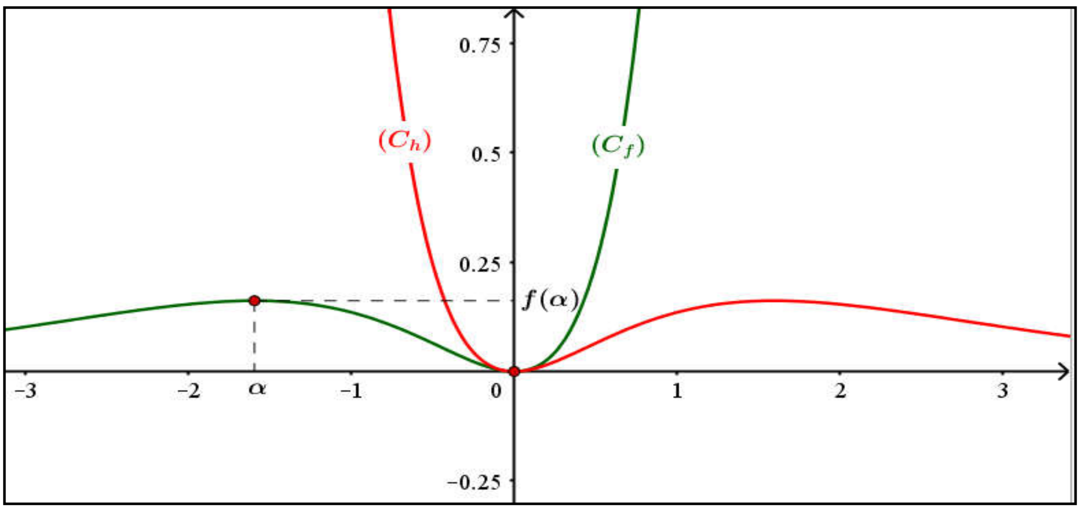
$-\left(\frac{-3.2+(-1.5)^{2}}{4}\right)<-\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}<-\left(\frac{-3+(-1.6)^{2}}{4}\right)$ أي $0.11<f(\alpha)<0.24$.

4. الرسم:

5. نلاحظ أن $h(x)=e^{-2x}-(1-x)e^{-x}=e^{2(-x)}-\left(1+(-x)\right)e^{(-x)}=f(-x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

6. المناقشة البيانية: $f(x)+m=0$ أي $f(x)=-m$ ومنه إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم $y=-m$

◆ $-m<0$ أي $m>0$: لا توجد حلول ◆ $m=0$: حل مضاعف ◆ $0<-m<f(\alpha)$ أي $-f(\alpha)<m<0$: ثلاث حلول ◆ $-m=f(\alpha)$ أي $m=-f(\alpha)$: حلين أحدهما موجب و الآخر حل مضاعف سالب ◆ $-m>f(\alpha)$ أي $m<-f(\alpha)$: حل وحيد موجب.



التمرين الثاني

❀ الجزء الأول

1. حساب : $\lim_{x \to 0^{>}} \underbrace{(1-x)\ln(1-x)}_{0} - \underbrace{x\ln(x)}_{0} = 0$ ، $\lim_{x \to 1^{<}} \underbrace{(1-x)\ln(1-x)}_{0^+\ln 0^+=0} - \underbrace{x\ln(x)}_{1\ln 1=0} = 0$.

2. تبيان أن : $g'(x) = \left[-1\ln(1-x) + \left(\frac{-1}{\cancel{1-x}}\right)\times(\cancel{1-x})\right] - \left[\ln(x) + \frac{1}{\cancel{x}}\times \cancel{x}\right] = -\ln(1-x) - \ln(x) - 2$

و $g''(x) = -\left(\frac{-1}{1-x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-(1-x)}{x(1-x)} = \frac{2x-1}{x(1-x)}$.

إشارة $g''(x)$:إشارة $g''(x)$ من إشارة $2x-1$ لأن $x(1-x)>0$ في المجال $]0,1[$ ومنه $2x-1=0$ أي $x=\frac{1}{2}$.

3. دراسة تغيرات الدالة g' :

✎ **النهايات:** $\lim_{x \to 0^{>}} \left(\underbrace{-\ln(1-x)}_{-\ln(1-0)=0} \underbrace{-\underbrace{\ln(x)}_{-\infty}}_{+\infty} - 2 \right) = +\infty$ ، $\lim_{x \to 1^{<}} \left(\underbrace{-\underbrace{\ln(\overbrace{1-x}^{0^+})}_{-\infty}}_{+\infty} - \underbrace{\ln(x)}_{\ln(1)=0} - 2 \right) = +\infty$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2$$
$$= \ln(2) + \ln(2) - 2$$
$$= -2 + 2\ln 2 \approx -0.61$$

✎ **جدول تغيرات الدالة g' :**

x	0		$1/2$		1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. استنتاج أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين :

⌧ الدالة g' مستمرة و متناقصة تماما على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ ، $\lim_{x \to 0^{>}} g'(x) = +\infty$ و $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2+2\ln 2 < 0$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد $0<\alpha<0.5$ يحقق $g'(\alpha)=0$.

⌧ الدالة g' مستمرة و متزايدة تماما على $\left]\frac{1}{2},1\right[$ ، $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -2+2\ln 2 < 0$ و $\lim_{x \to 1^{<}} g'(x) = +\infty$ ، فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد $0.5<\beta<1$ يحقق $g'(\beta)=0$.

إشارة $g'(x)$:

x	0		α		β		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. جدول تغيرات الدالة g :

x	0		α		$\frac{1}{2}$		β		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$	0

6. حساب $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ، **إشارة $g(x)$:**

x	0		$1/2$		1
$g(x)$		$+$	0	$-$	

7. $\varphi(x) = -g(x)$ معناه أن (C_φ) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل.

❀ الجزء الثاني

1. تبيان أن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{ln(x) \times ln(1-x)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \underbrace{ln(x)}_{-\infty} \times \underbrace{\dfrac{ln(1-x)}{x}}_{-1} = +\infty$.

لاحظ : $\lim_{x \to 0} \dfrac{ln(1-x)}{x} = \left[ln(1-x)\right]' = \dfrac{-1}{1-\underbrace{x}_{0}} = -1$ ، باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto ln(1-x)$ عند 0.

نستنتج : أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين.

2. تبيان أن: في المجال $]0,1[$: $f(1-x) = ln(1-x) \times ln(1-(1-x)) = ln(x) \times ln(1-x) = f(x)$

و لدينا من أجل $x=0$ أو $x=1$ تبقى المساواة محققة : $f(1-0) = f(0) = 0$ و منه من أجل $x \in [0,1]$:

$f(1-x) = f(x)$ إذن نستنتج أن (C_f) يقبل محور تناظر معادلته $x = \dfrac{1}{2}$.

لاحظ : $x = \dfrac{1}{2}$ محور تناظر معناه : $f\left(2\times\dfrac{1}{2} - x\right) = f(x)$ أي $f(1-x) = f(x)$.

3. حساب : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(ln(x) \times ln(1-x)\right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\dfrac{x}{x} \times ln(x) \times ln(1-x)\right) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\underbrace{x\, ln(x)}_{0} \times \underbrace{\dfrac{ln(1-x)}{x}}_{-1}\right) = 0$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \left(ln(x) \times ln(1-x)\right) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \left(\dfrac{x-1}{x-1} \times ln(x) \times ln(1-x)\right) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \left(\underbrace{\dfrac{ln(x)}{x-1}}_{1} \times \left[-\underbrace{(1-x)\, ln(1-x)}_{0}\right]\right) = 0$

لاحظ : $\lim_{x \to 1} \dfrac{ln(x)}{x-1} = \left[ln(x)\right]' = \dfrac{1}{\underbrace{x}_{1}} = 1$ ، باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة $x \mapsto ln(x)$ عند 1.

4. تبيان أن : $f'(x) = \dfrac{1}{x} \times ln(1-x) + \left(\dfrac{-1}{1-x}\right) \times ln\, x = \dfrac{(1-x)\, ln(1-x) - x\, ln(x)}{x(1-x)} = \dfrac{g(x)}{x(1-x)}$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x(1-x) > 0$ في المجال $]0,1[$.

✎ جدول تغيرات الدالة f:

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(ln2)^2$	$\searrow$	0

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \times ln\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$
$= \left(-ln(2)\right) \times \left(-ln(2)\right)$
$= (ln\, 2)^2 \approx 0.48$

الرسم