الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **ثانوية : محـــند مخبي**

أقسام : النهائي رياضيات — **مارس 2020**

إمتحان الرياضيات للثلاثي الثاني

مادة : الرياضيات — **المدة : 04 ساعات**

التمرين الأول:(04 نقاط)

الهدف من التمرين تحديد الحلول الناطقة للمعادلة التالية : $(E)......\ 7x^3+2x^2+2x-5=0$.

1) بين التكافؤ : $\left(p\gcd\left(a,b^n\right)=1 \Leftrightarrow p\gcd\left(a,b\right)=1\right)$ حيث : a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة .

2) أ) أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ موجود في المجال $]0;1[$.

ب) بين أنه إذا كان الحل α ناطقا من الشكل $\frac{p}{q}$ حيث $p\gcd(p,q)=1$ فإن : p يقسم 5 و q يقسم 7 .

ج) عين p و q ثم α .

د) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

التمرين الثاني:(4,5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B صورتي العددين : $z_A=\sqrt{3}-1$ و $z_B=\sqrt{3}+3i$.

- عين طبيعة و عناصر التحويل T الذي يحول A إلى B و يترك O صامدة .

3) نعرف متتالية النقط (A_n) بـــ : $\begin{cases} A_0=A \\ A_{n+1}=T\left(A_n\right) \end{cases}$ نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n .

أ) أنشئ النقط : A_0 ، A_1 و A_2 .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

ج) عين قيم n بحيث A_n تنتمي إلى المستقيم (OA_1) .

4) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=A_0A_1$ و من أجل كل n عدد طبيعي : $u_n=A_nA_{n+1}$.

أ) برهن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n .

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+.......+u_n$ ، ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء و كرتين حمراوين لا نميز بينها باللمس .

نسحب من الكيس n كرة ، الواحدة تلوى الأخرى بالطريقة التالية :

- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس قبل السحبة الموالية .
- إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء لا نعيدها إلى الكيس و نقوم بالسحبة الموالية .

1) نضع : $n=3$ و نعتبر الأحداث التالية :

E_1 : " الكرة البيضاء الوحيدة المسحوبة تكون في السحبة الأولى " .

E_2 : " الكرة البيضاء الوحيدة المسحوبة تكون في السحبة الثانية " .

E_3 : " الكرة البيضاء الوحيدة المسحوبة تكون في السحبة الثالثة " .

أ) بين أن : $P(E_1)=\frac{8}{75}$.

ب) أحسب : $P(E_2)$ و $P(E_3)$.

ج) لتكن الحادثة E : " سحب كرة بيضاء واحدة فقط " ، أحسب : $P(E)$.

د) علما أن E محققة ، أحسب إحتمال أن تكون الكرة البيضاء قد سحبت في السحبة الأولى .

2) نجري الآن n سحبة .

أ) أحسب بدلالة n الإحتمال P_n ، حيث P_n هو إحتمال سحب كرة بيضاء على الأقل .

ب) ما هي أدنى قيمة لــ n حتى يكون $P_n>0{,}99$ ؟ .

التمرين الرابع: (6,5 نقاط)

n عدد طبيعي غير معدوم .

f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بــ : $f_n(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^2+.......+\frac{1}{n}x^n+\ln|x-1|$.

(C_n) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الرسم $2\ cm$) .

1) أحسب نهايات الدالة f_n .

2) أ) أثبت أن f_n قابلة للإشتقاق على D_{f_n} و أن : $f_n'(x)=\frac{x^n}{x-1}$.

ب) أدرس إتجاه تغير f_n و شكل جدول تغيراتها . (نميز الحالتين : n فردي و n زوجي) .

3) أ) أحسب الدالة المشتقة الثانية لــ f_n ، ثم أدرس مجموعة نقاط الإنعطاف للمنحني (C_n) .

(نميز الحالات : $n=1$ ، n فردي يختلف عن 1 و n زوجي) .

ب) من أجل كل $n \geq 2$ نسمي (T_n) المماس للمنحني (C_n) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{n}{n-1}$.

- أنشئ في نفس المعلم المنحنيين (C_2) و (C_3) مع المماسين (T_2) و (T_3) .

4) أ) أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يوجد α_n وحيد حيث : $\alpha_n > 1$ و $f(\alpha_n) = 0$.

ب) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 2$: $f_{n-1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n{}^n$ و $-\frac{1}{n}\alpha_n{}^n < f_{n-1}(\alpha_{n-1})$.

- إستنتج أن المتتالية (α_n) رتيبة تماما و أنها متقاربة .

ج) إعتمادا على المقارنة : $\left(\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k} \; ; \; k \in \mathbb{N}^*\right)$ أثبت أن : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln n > 0$.

د) إستنتج أن : $\alpha_n < 1 + \frac{1}{n}$ ، ثم أحسب عندئذ : $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$.

بالتوفيق