**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة :** التحليل  **مذكرة رقم :** 01 ا**لمحور :** الدوال العددية **الـمدة :**  05 سـا

 **الموضوع :**  **الـنـهـايـات**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.**
* **حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.**
* **دراسة السلوك التقاربي لدالة**

**. نهاية منتهية عند أو**

 **تعريف:  دالة معرفة على مجال من الشكل و عدد حقيقي.
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي.**

 **نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال** $\left]2;+\infty \right[$ **بـ :** $f\left(x\right)= \frac{x}{x-2}$

**أثبت أن :** $\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=1$

**نتيجة: إذا كانت نقول أن المستقيم ذا المعادلة مستقيم مقارب للمنحنيالممثل للدالة عند.**

**2. نهاية غيرمنتهية عند أو**

 **تعريف1:  دالة معرفة على مجال من الشكل. القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل (**$AϵR$**) يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي. نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال** $\left]1;+\infty \right[$ **بـ :** $f\left(x\right)= \sqrt{X-1}$

**أثبت أن :** $\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=+\infty $

**تعريف2:**  دالة معرفة على مجال من الشكل. القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل($ BϵR$) يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي. نكتب

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال** $\left]0;+\infty \right[$ **بـ :** $f\left(x\right)= -X²$

**أثبت أن :** $\lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=-\infty $

**نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي**

**1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي**

 **تعريف:  دالة معرفة على مجموعة من الشكل و عدد حقيقي.
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد يشمل كل القيم من أجل قر بالقدر الكافي من. نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال** $R$ **بـ :** $f\left(x\right)= 2x+3$

1. ضع تخمين لسلوك $f\left(x\right)$ لما $x$ يؤول الى 2
2. **في أي مجال يجب اختيار** $x$ **بحيث ينتمي** $f\left(x\right)$ **الى** $\left]6.99;7.01\right[$

**2. نهاية غيرمنتهية عند عدد حقيقي**

 **تعريف:  دالة معرفة على مجموعة من الشكل.
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل(**$ AϵR$**) يشمل كل القيم من أجل قريب بالقدر الكافي من. نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال** $\left]0;+\infty \right[$ **بـ :** $f\left(x\right)= \frac{2}{(x-1)²}$

**أثبت أن :** $\lim\_{x\to 1}f\left(x\right)=-\infty $

**تعريف:** **ليكن  التمثيل البياني لدالة  في معلم و ليكن المستقيم الذي معادلته: . القول أن المستقيم  مستقيم مقارب للمنحني يعني أن نهاية الدالة عند ( من اليسار أو من اليمين )**

**. المستقيم المقارب المائل**

 **تعريف: ليكن  التمثيل البياني لدالة  في معلم و ليكن المستقيم ذو المعادلة: القول أن المستقيم  مستقيم مقارب للمنحني عند  ( على الترتيب عند  ) يعني أن:  ( على الترتيب  )**

 **ملاحظة: إذا كانت الدالة معرفة كما يلي: مع أو فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة عند أو **

**تطبيق :**

 ***f*  هي الدالة العددية المعرفة بـ: **

**1) عين مجموعة تعريف الدالة *f* ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.**

**2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة *f***

**المنحنيات المتقاربة :**

$ C\_{g} و C\_{f}$ **منحني الدالتين** $f$ **و**$ g$ **على الترتيب . نقول ان** $ C\_{g} و C\_{f}$ **متقاربين عند** $+\infty $ **و**$-\infty $

**اذاكانت** $\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)-g(x)=0$

**تتمات على النهايات**

**1. بعض نهايات الدوال المرجعية**

  

**2. العمليات على النهايات**

  و  دالتان.  يمثل عدد حقيقي أو  أو . نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

* **نهاية مجموع دالتين:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | ح ع ت |  |  |  |  |  |

* **نهاية جداء دالتين:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ح ع ت | ح ع ت |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

* **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| حعت | حعت | حعت | حعت | حعت |  |  |  |  |  |  |  |  |

 **ملاحظة:** تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات **"عدم التعيين "**( ح ع ت )

**تطبيق : في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة *f* ،**

** عند،عند  ،  عند، عند ،عند 1-**

** عند،عند ، عند 2 ،  عند،عند ،عند 3**

** عند، عند ، عند 1- ، عند3**

**نهاية دالة مركبة-النهايات بالمقارنة**

**1. نهاية دالة مركبة**

 **مبرهنة: ، و تمثل أعددا حقيقية أو أو . ، و دوال حيث.
 إذا كانت  و إذا كانت  فإن **

**تطبيق : باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:**

**1)  ، 2) **

**3)  ، 4) **

**2 . النهايات بالمقارنة**

 **مبرهنة1: ، و دوال و  عدد حقيقي. إذا كانت و و إذا كان من**

 **أجل كبير بالقدر الكافي  فإن .**

 **مبرهنة2: ، دالتان و  عدد حقيقي. إذا كانت و إذا كان من أجل  كبير بالقدر**

 **الكافي  فإن .**

 **مبرهنة3: ، دالتان و  عدد حقيقي. إذا كانت و إذا كان من أجل  كبير بالقدر**

 **الكافي  فإن .**

 **تطبيق :**

**أحسب :** $\lim\_{x\to +\infty }\frac{\sin(x)}{x}$ **،** $\lim\_{x\to +\infty }\frac{\cos(x)}{x+1}$

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة : التحليل مذكرة رقم : 01 المحور : الدوال العددية الـمدة : 05 سـا**

 **الموضوع : الاسـتـمـراريـة**

**الكفاءة المستهدفة :**

**نشاط 03 ، 04 صفحة 87 :**

**1. تعريف الاستمرارية**

 **تعريف:**

 ** دالة مجموعة تعريفها و عدد حقيقي غير معزول من.
  مستمرة عند يعني أن نهاية الدالة عند  هي .**

** معناه  مستمرة عند **

**الاستمرارية نحو دالة على مجال**

**القول أن الدالة مستمرة على مجال يعني أن مستمرة عند كل عدد حقيقي من.**

 **التفسير البياني: تكون الدالة مستمرة على مجال عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم ( اليد ).**

**. خواص**

 **كل الدوال و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**  **الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**  **الدوال كثيرات الحدود،** **و** **مستمرة على**$R$**.**  **الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**

**تطبيق01 : لتكن الدالة  *f* المعرفة**$R$ **على كما يلي:**

****

**1) ادرس استمرارية الدالة *f* عند 2 .**

**2) هل الدالة *f* مستمرة على** $R$ **؟ لماذا؟**

**تطبيق02 : *f*  دالة عددية معرفة كما يلي:**

 ** إذا كان  و **

**1) ادرس استمرارية *f* عند 1 .**

**2) هل الدالة *f* مستمرة على**$R$ **؟**

**. مبرهنة القيم المتوسطة**

 **مبرهنة:  دالة معرفة و مستمرة على مجال.
 من أجل كل عدد حقيقي محصور بين  و، يوجد على الأقل عدد حقيقي محصور بين و**

 **بحيث .**

 **حالة خاصة:**

* **إذا كانت دالة مستمرة على مجال و كان ( العدد محصور بين  و )**

 **فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي محصور بين و بحيث **

* **إذا كانت  دالة معرفة و مستمرة على مجال فإنه من أجل كل عدد حقيقي محصور بين و، المعادلة تقبل على الأقل حلا محصورا بين و.**

 **ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة أما تعيين الحلول أو قيم**

**مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.**

**تطبيق 01 :**

**برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة  تقبل على الأقل حلا في المجال**

**تطبيق02 :**

**لتكن الدالة  *f* المعرفة على  بـ:**

 ****

**1) بين أن الدالة *f* متناقصة تماما على المجال**

**2) لتكن الدالة *g* المعرفة علىبـ:**

** بين أن الدالة *g* متناقصة تماما على.**

** احسب و ثم استنتج أن المعادلة  تقبل حلا وحيدا في المجال**