**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة :** التحليل  **مذكرة رقم :** 01 ا**لمحور :** الدوال العددية **الـمدة :**  05 سـا

**الموضوع :**  **الـنـهـايـات**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غير المنتهية) لمجالات مجموعة التعريف.**
* **حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.**
* **دراسة السلوك التقاربي لدالة**

**. نهاية منتهية عند أو**

**تعريف:  دالة معرفة على مجال من الشكل و عدد حقيقي.  
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي.**

**نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال بـ :**

**أثبت أن :**

**نتيجة: إذا كانت نقول أن المستقيم ذا المعادلة مستقيم مقارب للمنحنيالممثل للدالة عند.**

**2. نهاية غيرمنتهية عند أو**

**تعريف1:  دالة معرفة على مجال من الشكل. القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل () يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي. نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال بـ :**

**أثبت أن :**

**تعريف2:**  دالة معرفة على مجال من الشكل. القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل() يشمل كل القيم من أجل كبير بالقدر الكافي. نكتب

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال بـ :**

**أثبت أن :**

**نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي**

**1. نهاية منتهية عند عدد حقيقي**

**تعريف:  دالة معرفة على مجموعة من الشكل و عدد حقيقي.  
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال مفتوح شامل للعدد يشمل كل القيم من أجل قر بالقدر الكافي من. نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال بـ :**

1. ضع تخمين لسلوك لما يؤول الى 2
2. **في أي مجال يجب اختيار بحيث ينتمي الى**

**2. نهاية غيرمنتهية عند عدد حقيقي**

**تعريف:  دالة معرفة على مجموعة من الشكل.  
 القول أن نهاية عند هي يعني أن كل مجال من الشكل() يشمل كل القيم من أجل قريب بالقدر الكافي من. نكتب**

**تطبيق :  دالة معرفة على المجال بـ :**

**أثبت أن :**

**تعريف:** **ليكن  التمثيل البياني لدالة  في معلم و ليكن المستقيم الذي معادلته: . القول أن المستقيم  مستقيم مقارب للمنحني يعني أن نهاية الدالة عند ( من اليسار أو من اليمين )**

**. المستقيم المقارب المائل**

**تعريف: ليكن  التمثيل البياني لدالة  في معلم و ليكن المستقيم ذو المعادلة: القول أن المستقيم  مستقيم مقارب للمنحني عند  ( على الترتيب عند  ) يعني أن:  ( على الترتيب  )**

**ملاحظة: إذا كانت الدالة معرفة كما يلي: مع أو فمن الواضح أن المستقيم ذا المعادلة مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة عند أو **

**تطبيق :**

***f*  هي الدالة العددية المعرفة بـ: **

**1) عين مجموعة تعريف الدالة *f* ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.**

**2) حدّد معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة *f***

**المنحنيات المتقاربة :**

**منحني الدالتين و على الترتيب . نقول ان متقاربين عند و**

**اذاكانت**

**تتمات على النهايات**

**1. بعض نهايات الدوال المرجعية**

**2. العمليات على النهايات**

 و  دالتان.  يمثل عدد حقيقي أو  أو . نقبل دون برهان المبرهنات التالية:

* **نهاية مجموع دالتين:**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  | ح ع ت |  |  |  |  |  |

* **نهاية جداء دالتين:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ح ع ت | ح ع ت |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

* **نهاية حاصل قسمة دالتين:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ح  ع  ت | ح  ع  ت | ح  ع  ت | ح  ع  ت | ح  ع  ت |  |  |  |  |  |  |  |  |

**ملاحظة:** تسمى الحالات التي لا تسمح فيها النظريات السابقة من استنتاج النهاية بحالات **"عدم التعيين "**( ح ع ت )

**تطبيق : في كل حالة من الحالات ادرس نهاية الدالة *f* ،**

** عند،عند  ،  عند، عند ،عند 1-**

** عند،عند ، عند 2 ،  عند،عند ،عند 3**

** عند، عند ، عند 1- ، عند3**

**نهاية دالة مركبة-النهايات بالمقارنة**

**1. نهاية دالة مركبة**

**مبرهنة: ، و تمثل أعددا حقيقية أو أو . ، و دوال حيث.  
 إذا كانت  و إذا كانت  فإن **

**تطبيق : باستعمال نهاية مركب دالتين احسب ما يلي:**

**1)  ، 2) **

**3)  ، 4) **

**2 . النهايات بالمقارنة**

**مبرهنة1: ، و دوال و  عدد حقيقي. إذا كانت و و إذا كان من**

**أجل كبير بالقدر الكافي  فإن .**

**مبرهنة2: ، دالتان و  عدد حقيقي. إذا كانت و إذا كان من أجل  كبير بالقدر**

**الكافي  فإن .**

**مبرهنة3: ، دالتان و  عدد حقيقي. إذا كانت و إذا كان من أجل  كبير بالقدر**

**الكافي  فإن .**

**تطبيق :**

**أحسب : ،**

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة : التحليل مذكرة رقم : 01 المحور : الدوال العددية الـمدة : 05 سـا**

**الموضوع : الاسـتـمـراريـة**

**الكفاءة المستهدفة :**

**نشاط 03 ، 04 صفحة 87 :**

**1. تعريف الاستمرارية**

**تعريف:**

** دالة مجموعة تعريفها و عدد حقيقي غير معزول من.  
  مستمرة عند يعني أن نهاية الدالة عند  هي .**

** معناه  مستمرة عند **

**الاستمرارية نحو دالة على مجال**

**القول أن الدالة مستمرة على مجال يعني أن مستمرة عند كل عدد حقيقي من.**

**التفسير البياني: تكون الدالة مستمرة على مجال عندما يمكن رسم منحنيها البياني على هذا المجال دون رفع القلم ( اليد ).**

**. خواص**

 **كل الدوال و المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**  **الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**  **الدوال كثيرات الحدود،** **و** **مستمرة على.**  **الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.**

**تطبيق01 : لتكن الدالة  *f* المعرفة على كما يلي:**

****

**1) ادرس استمرارية الدالة *f* عند 2 .**

**2) هل الدالة *f* مستمرة على ؟ لماذا؟**

**تطبيق02 : *f*  دالة عددية معرفة كما يلي:**

** إذا كان  و **

**1) ادرس استمرارية *f* عند 1 .**

**2) هل الدالة *f* مستمرة على ؟**

**. مبرهنة القيم المتوسطة**

**مبرهنة:  دالة معرفة و مستمرة على مجال.  
 من أجل كل عدد حقيقي محصور بين  و، يوجد على الأقل عدد حقيقي محصور بين و**

**بحيث .**

**حالة خاصة:**

* **إذا كانت دالة مستمرة على مجال و كان ( العدد محصور بين  و )**

**فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي محصور بين و بحيث **

* **إذا كانت  دالة معرفة و مستمرة على مجال فإنه من أجل كل عدد حقيقي محصور بين و، المعادلة تقبل على الأقل حلا محصورا بين و.**

**ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة أما تعيين الحلول أو قيم**

**مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.**

**تطبيق 01 :**

**برهن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة  تقبل على الأقل حلا في المجال**

**تطبيق02 :**

**لتكن الدالة  *f* المعرفة على  بـ:**

****

**1) بين أن الدالة *f* متناقصة تماما على المجال**

**2) لتكن الدالة *g* المعرفة علىبـ:**

** بين أن الدالة *g* متناقصة تماما على.**

** احسب و ثم استنتج أن المعادلة  تقبل حلا وحيدا في المجال**

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج الحصة : التحليل مذكرة رقم : 01 المحور : الدوال العددية الـمدة : 05 سـا**

**الموضوع : الاشـتـقـاقـيـة**

**الكفاءة المستهدفة :**

**نشاط01 02 صفحة 40 :**

**العدد المشتق**

**تعريف:** دالة معرفة على مجالمن . و عددان حقيقيان من مع

نقول أن تقبل الاشتقاق عند إذا قبلت النسبة نهاية محدودة لما يؤول إلى 0

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة عند ونرمز لها بالرمز

**مماس منحنى الدالة :**

**تعريف :** **** دالة معرفة على مجال من و ليكن  تمثيلها البياني في معلم.

إذا قبلت**** الاشتقاق عند فإن يقبل عند النقطةمماسا معامل توجيهه و معادلته:



**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية الـمدة : 05 سـا**

**الموضوع : دراسة الدالة الأسية**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة تغيرات الدالة الأسية**

1. **اتجاه تغير الدالة الاسية**

**خاصية1:** من أجل كل عدد حقيقي، .

**البرهان:** من أجل كل من،

و بما أن فإن من أجل كل من،

**نتيجة :** الدالة الأسية متزايدة تماما على .

**البرهان:** من أجل كل من، و منه من أجل كل من،

1. **النهايات**

**خواص:** . .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| + |  |
| 1 |  |

**البرهان:**

1. **جدول تغيرات**

* المنحني الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول إلى.

**كتابة معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 0 :** 

* من تعريف العدد المشتق لدينا: إذن 

**نتيجة:** الدالة هي أحسن تقريب تآلفي للدالة بجوار.

أي من أجل قريب من 0 لدينا:.

أمثلة :

**تطبيق01:**

* أحسب نهاية الدالة عند  و 

* ،*  *،  ،* 

**تطبيق 02:**

ادرس اتجاه تغير الدالة في كل حالة :

1. على
2. على كل من المجالين
3.  على

**تطبيق 03:**

**دالة معرفة علىبـ

1. ادرس نهاية الدالة عند و عند.

2. شكل جدول تغيرات الدالة.

3. بين أن المنحي الممثل للدالة يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلة له.

4.بين أن المعادلة  تقبل حلا واحدا حيث  .

5. استنتج إشارة على.

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة الدالة**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة تغيرات الدالة**

**. النهايات**

لدراسة نهاية دالة  نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

**مثال:**

نعتبر الدالة المعرفة على :

**. اتجاه التغيرات**

**خاصية:** إذا كانت دالة معرفة على مجال فإن للدالتين و نفس اتجاه التغيرات على المجال.

مثال :

عين اتجاه تغير الدالة المعرفة على :

**. المشتقة**

**خاصية:** إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على مجال فإن الدالة  قابلة للاشتقاق على و لدينا من أجل

كل من، .

مثال : احسب الدالة المشتقة  للدالة *f* المعرفة على

* ، *

**تمرين**:

** دالة معرفة علىبـ

1. ادرس نهاية الدالة عند و عند.

2. أ- ادرس تغيرات الدالة *f* .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة.

3. ارسم في معلم متعامد ومتجانس منحني الدالة *f* .

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة الدالة**

**ذالكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة الدوال من الشكل ،**

**دراسة الدالة حيث :**

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما، نعتبر الدوال المعرفة على المجال كما يلي:



نرمز بـِ  إلى المنحنيات الممثلة للدوال في معلم متعامد و متجانس.

1. أحسب نهايتي الدالة عند وعند. فسر بيانيا النتيجة الثانية.
2. أدرس اتجاه تغير الدوال ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن كل المنحنيات تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.
4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات ،  و .
5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين و من أجل عددين حقيقيين و حيث .

**دراسة الدالة حيث :**

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما، نعتبر الدوال المعرفة على المجال كما يلي:



نرمز بـِ  إلى المنحنيات الممثلة للدوال في معلم متعامد و متجانس.

1. أحسب نهايتي الدالة عند وعند. فسر بيانيا النتيجتين.

2. أدرس اتجاه تغير الدوال ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن كل المنحنيات تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها.

4. أرسم في نفس الشكل المنحنيات ،  و .

5. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين و من أجل عددين حقيقيين و حيث .

**ملاحظة:** تسمى المنحنيات بمنحنيات غوص و يتم استعمالها في الاحتمالات و الإحصاء و لعل أكثرها استعمالا هو المنحني ذو المعادلة و الذي يأخذ شكلا ناقوسيا.

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : المعادلات التفاضلية**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **حل معادلة تفاضلية من الشكل **

**المعادلات التفاضلية**

**ملاحظة:** العديد من المسائل في العلوم التجريبية، الاقتصاد، الكهرباء و الميكانيك تؤدي إلى دراسة هذا النوع من

المعادلات التفاضلية و التي غالبا ما نكتبها على الشكل: 

**1. المعادلة التفاضلية  مع **

**مبرهنة:**  عدد حقيقي غير معدوم.

الحلول على للمعادلة التفاضلية هي الدوال  حيث  عدد حقيقي ثابت كيفي.

**البرهان:** نعتبر المعادلة التفاضلية:  حيث ****

* أثبت أن الدالة المعرفة على بـِ  حيث عدد حقيقي هي حل للمعادلة التفاضلية.
* نفرض أن الدالة حل للمعادلة التفاضلية. أثبت أن الدالة المعرفة على بـِ  دالة ثابتة.استنتج أن حيث عدد حقيقي ثابت كيفي.

**تطبيق:** حل في المعادلة التفاضلية: .

**2. المعادلة التفاضلية  مع **

**مبرهنة:**  و عددان حقيقيان مع غير معدوم.

الحلول على للمعادلة التفاضلية هي الدوال  حيث  عدد حقيقي ثابت كيفي.

**البرهان:** نعتبر المعادلة التفاضلية:  حيث ****

* أثبت أن الدالة المعرفة على بـِ  حيث عدد حقيقي كيفي هي حل للمعادلة .
* نفرض أن الدالة حل للمعادلة التفاضلية. لتكن الدالة المعرفة على بـِ 
  + أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي، .
  + استنتج من مبرهنة الجزء1 عبارة  و من ثم عبارة.

**تطبيق:** حل في المعادلة التفاضلية: .

**خاصية:** من أجل كل ثنائية أعداد حقيقية، المعادلة التفاضلية مع**** تقبل حلا وحيدا

معرفة على و تحقق الشرط: .

**البرهان:** إذا كانت  بين أن .

**تطبيق:** نعتبر المعادلة التفاضلية

1. حل المعادلة,

2. عين الحل للمعادلة بحيث .

3. أدرس تغيرات الدالة ثم أرسم في معلم متعامد و متجانس تمثيلها البياني.

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية**

**الكفاءة المستهدفة :**

توظيف خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

نشاط :

* أنشئ المنحنى منحنى الدالة 
* أنشئ ( C’ ) نظير المنحنى بالنسبة الى المستقيم الذي معادلته

( C’ ) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية التي يرمز لها بالرمز

* عين مجال تعريف الدالة
* عين إشارة
* عين اتجاه تغير الدالة
* عين نهايتي الدالة "  " عند 0 و عند.

**. اللوغاريتم النيبيري لعدد**

**مبرهنة و تعريف:** من أجل كل عدد حقيقي من، يوجد عدد حقيقي وحيد بحيث .

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد " و نرمز إليه بالرمز"  "

**. تعريف الدالة " "**

**تعريف:** نسمي " الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " الدالة التي نرمز إليها بالرمز"  " و التي ترفق بكل عدد حقيقي

 من العدد الحقيقي .

**نتائج:**

1. من أجل كل من و من أجل كل من،  يعني .
2. من أجل كل  من، .
3. من أجل كل من، .
4. بما أن  فإن  و بما أن  فإن .

**خاصية:** في معلم متعامد و متجانس، التمثيلان البيانيان للدالتين الأسية و اللوغاريتمية النيبيرية متناظران بالنسبة

إلى المستقيم ذو المعادلة ( المنصف الأول ).

**نتائج:** من أجل كل عددين حقيقيين و من:

1.  يعني .
2.  يعني .
3.  يعني  و  يعني  كما أن .

تطبيق

**الخواص الجبرية**

من أجل كل عددين حقيقيين و من،











تطبيق :

حل المعادلات التالية :

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية النيبيرية**

**1. النهايات**

**خواص:** نهاية الدالة "  " عند هي و نهايتها عند 0 هي.

 و 

**2. الاستمرارية و الاشتقاقية**

**خواص:** الدالة "" مستمرة و قابلة للاشتقاق على و لدينا من أجل كلمن،

**3. جدول تغيرات الدالة" "**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| + |  |
| 0 |  |

 المنحني الممثل للدالة "" يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.

 لدينا  و . إذن يقبل المنحني عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا .

 من تعريف العدد المشتق لدينا: إذن  أو 

**نتيجة:** الدالة هي أحسن تقريب تآلفي للدالة بجوار.

أي من أجل قريب من 0 لدينا: :.

**تطبيق :**

** دالة معرفة علىبـ :

1. ادرس نهاية الدالة عند 0 و عند.

2. أ- ادرس تغيرات الدالة *f* .

ب- شكل جدول تغيرات الدالة.

**تطبيق :**

** دالة معرفة علىبـ :

1. ادرس نهاية الدالة عند 0 و عند.

2. أ- ادرس تغيرات الدالة *f* .

ب-عين نقاط تقاطع المنحنى مع محور الفواصل

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة الدالة**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة تغيرات الدالة**

**. النهايات**

لدراسة نهاية دالة  نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

**مثال:** نعتبر الدالة المعرفة على  بـِ .

**. اتجاه التغيرات**

**خاصية:** إذا كانت دالة معرفة و موجبة تماما على مجال فإن للدالتين  و نفس اتجاه التغيرات على المجال.

**مثال:** نعتبر الدالة المعرفة على  بـِ .

**. المشتقة**

**خاصية:** إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال فإن الدالة  قابلة للاشتقاق على

و لدينا من أجل كل من، .

**مثال:** مشتقة الدالة المعرفة على بـِ 

**تطبيق :**

** دالة معرفة علىبـ :

1. ادرس نهاية الدالة عند و عند.

2. أ- ادرس تغيرات الدالة *f* .

**تطبيق :**

** دالة معرفة علىبـ :

1. ادرس نهاية الدالة عند و عند.

2. أ- ادرس تغيرات الدالة *f* .

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دالة اللوغاريتم العشري**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة تغيرات دالة اللوغاريتم العشري**

**1. دالة اللوغاريتم العشري**

**تعريف:** نسمي دالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرمز إليها بالرمز" " و المعرفة على المجال بـِ:



**خواص :**

1.  و .
2. من أجل كل عدد صحيح نسبي،  لأن .

.

1. من أجل كل عددين حقيقيين و من، .
2. من أجل كل عدد حقيقي من و من أجل كل عدد صحيح نسبي، .

**خاصية2:** الدالة "  " متزايدة تماما على المجال.

 **البرهان:**من أجل كل من، 

و بما أن  فإن للدالتين"  " و"  " نفس اتجاه 

التغيرات.و بما أن الدالة"  " متزايدة تماما على

فإن الدالة"  " متزايدة تماما على.

يستنتج التمثيل البياني للدالة "  " انطلاقا من التمثيل البياني

للدالة "  ".

**نتيجة:** إذا كان عددا حقيقيا حيث  فإن 

تطبيق :

نعتبر العدد الطبيعي

عين الجزء الصحيح للعدد

*استنتج الحصر التالي*

تطبيق :

*حل المعادلة*

*حل المتراجحة*

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة دالة أسية**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة دالة أسية**

**الجزء الأول**

حل المعادلة :

**الجزء الثاني :**

دالة معرفة على بـ :

التمثيل البياني لدالة

1. أدرس نهاية الدالة عند و
2. ليكن مستقيم معادلته

* بين أن مستقيم مقارب
* أدرس الوضعية النسبية للمنحنى المماس من أجل ينتمي إلى

1. أدرس تغيرات الدالة
2. بين أن المعادلة تقبل حل وحيد ينتمي إلى المجال
3. أرسم و

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال الأسية واللوغاريتمية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة دالة اللوغاريتمية**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **دراسة دالة اللوغاريتمية**

**مسألة:**

**الجزء الأول:**

نعتبر الدالة  المعرفة على المجال بـِ 

1. عين نهايتي الدالة  عند  و عند .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة  ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة  تقبل حلا وحيدا في المجال.

4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للعدد  سعته .

5. حدد حسب قيم  إشارة  على المجال.

**الجزء الثاني:**

نعتبر الدالة  المعرفة على  كما يلي:

 و من أجل كل  من ، 

ليكن  تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس حيث وحدة الأطوال هي .

1. بين أن الدالة  مستمرة على .

2. هل تقبل الدالة  الاشتقاق عند  ؟ فسر بيانيا النتيجة.

3. من أجل كل  من ، بين أن . استنتج اتجاه تغير الدالة .

4. أحسب نهاية الدالة عند. تحقق أن ثم شكل جدول تغيرات الدالة.

5. ليكن التمثيل البياني للدالة في المعلم.

* + أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين و.
  + أحسب النهاية:. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين  و.

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال العددية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : قوى عددحقيقي موجب**

**الكفاءة المستهدفة :**

* **قوى عددحقيقي موجب**

**نشاط :**

ليكن عددا صحيحا نسبيا. أكتب العدد  بكيفية أخرى ثم استنتج أن .

بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين، و من أجل كل عدد صحيح نسبي،

أ)  ب)  جـ) 

**1. تعاريف**

**تعريف1:** نضع  من أجل كل عددين حقيقيين و حيث  و كيفي.

**تعريف2:**  عدد حقيقي موجب تماما.

تسمى الدالة المعرفة على بـِ  ، الدالة الأسية ذات الأساس.

**2. قواعد الحساب**

**خواص:** من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما، و من أجل كل عددين حقيقيين، لدينا:

  . .

. . .

تطبيق01 :

بسط العبارات التالية : ،

تطبيق 02 :

حل في المعادلات التالية : ،

تطبيق 03 :

نعتبر المتراجحة : 

1) بين أنه بوضع المتراجحة تؤول إلى  .... 

2) حل في المعادلة.استنتج مجموعة حلول .

**دالة الجذر النوني :**

* + أدرس تغيرات الدالة حيث و شكل جدول تغيراتها.
  + أرسم التمثيل البياني للدالة في معلم متعامد و متجانس.
  + بين أن المعادلة **** تقبل حلا وحيدا  في المجال****.

يسمى العدد الجذر التكعيبي للعدد و نرمز إليه بالرمز.

* **. الدالة " الجذر النوني "**
* **مبرهنة وتعريف:** من أجل كل عدد حقيقي موجب و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم، يوجدعدد حقيقي
* موجب وحيد يحقق . يسمى الجذر النوني للعدد و نرمز إليه بالرمز.
* تسمى الدالة المعرفة على حيث، الدالة الجذر النوني

**خاصية1:** من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم،.

تطبيق01 :

بسط كتابة الأعداد التالية:

 ، 

 ، 

تطبيق 02 :

حل المعادلات و المتراجحات التالية:

1)  ؛

2) 

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الدوال العددية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : دراسة الدوال: و **

**الكفاءة المستهدفة :**

**دراسة الدوال: و **

**. الدالة**

نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما و مختلف عن1 و من أجل من، 

* **اتجاه التغير:** الدالة  هي مركب الدالة  متبوعة بالدالة الأسية. و بما أن الدالتين

و"" قابلتان للاشتقاق على فإن الدالة قابلة للاشتقاق على و لدينا: .

نعلم أنه من أجل كل من، و بالتالي فإشارة  من نفس إشارة . و منه النتائج التالية:

 إذا كان فإن  و منه الدالة متناقصة تماما على.

 إذا كان فإن  و منه الدالة متزايدة تماما على.

* **النهايات:** نميز حالتين حسب إشارة

 إذا كان فإن  و بما أن  نستنتج أن 

 إذا كان فإن  و بما أن  نستنتج أن 

 إذا كان فإن  و بما أن  نستنتج أن 

 إذا كان فإن  و بما أن  نستنتج أن 

* **جدول التغيرات و التمثيل البياني:**





|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 |  |
|  |  |
| 0 |  |

ملاحظة : إذا كان  فإن  و منه الدالة ثابتة.

تطبيق :

* أدرس تغيرات الدالة حيث
* مثل بيانيا محنى الدالة

**. الدالة :**

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم، و من أجل من ، .

  قابلة للاشتقاق على و و منه . إذن متزايدة تماما على

**ملاحظة**

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند0.





|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| + |  |
|  |  |

تطبيق :

دالة معرفة على المجال :

* حساب نهاية عند
* بين أن المستقيم مستقيم مقارب للمنحني
* أدرس تغيرات الدالة

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الهندسة الفضائية الـمدة : 02 سـا**

**الموضوع : الجداء السلمي في الفضاء**

**الكفاءة المستهدفة :**

**حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء**

*نشاط :*

*متوازي المستطيلات حيث ،*

1. *احسب الجداء السلمي في المستوي*
2. *أحسب الجداء السلمي في المستوي ثم استنتج قيمة*
3. *أحسب الجداء السلمي في المستوي ثم استنتج قيمة*
4. *بين أن المستقيمين و متعامدان*

* *أحسب الجداء السلمي في المستوي*
* *استنتج من السؤالين 1 و 3 أن :*

**الجداء السلمي في الفضاء**



* 1. **تعريف :**

 و شعاعان من الفضاء . A ، B و C ثلاث نقط حيث 

يوجد على الأقل مستو ( P ) يشمل النقط A ، B و C بحيث الجداء السلمي

للشعاعين ، هو الجداء السلمي للشعاعين ،  في المستوي ( P )

**خواص :** كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء

 ، شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي ، *k* عدد حقيقي

 ،  ، ، ،

**العبارة التحليلة :**

في أساس متعامد و متجانس ليكن 

لدينا : 

**المسافة بين نقطتين :**  لتكن النقطتين  في معلم متعامد و متجانس من الفضاء

لدينا 

***تطبيق 01 :***

*نعتبر النقط ، ،*

* *أحسب ، ،*
* *عين أقياس الزوايا ، ،*

**التعامد في الفضاء :**

**الأشعة المتعامدة**

**تعريف :**

و شعاعان غير معدومين من الفضاء حيث ،

القول أن الشعاعين متعامدان يعني ان المستقيمين و متعامدان

**مبرهنة :**

و شعاعان من الفضاء لدينا : يكافئ

**البرهان:**

**مثال تطبيقي :**

مكعب نعتبر المعلم متعامد ومتجانس للفضاء

1. عين مركبات الأشعة
2. بين أن المستقيم عمودي على المستوي

***تطبيق***

*مكعب كماهو موضح في الشكل*

* *بين ان الشعاعين و متعامدين*

***الإسقاط العمودي***



⮘ A ، B نقطتان من المستوي ( P ) و C نقطة لا تنتمي إلى ( P )

لدينا : 

حيث C' المسقط العمودي لـ C على ( P )

⮘ 



لدينا

حيث C' و D' المسقطان العموديان للنقطتين C و D

على الترتيب على المستقيم ( AB )

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الهندسة الفضائية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : المعادلة الديكارتية لمستو**

**الكفاءة المستهدفة :**

**تعيين معادلة ديكارتية لمستوي**

**1.تعريف :**

**كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو ( P ) هو شعاع عمودي على ( P )**

**نتيجة :** إذا كان  شعاعا ناظميا ( عموديا ) على ( P ) فإن عمودي على كل شعاع من المستوي ( P ) .

و بالتالي كل مستقيم موجه بالشعاع  هو مستقيم عمودي على ( P ) .

☜ **تمييز مستو :**

 شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق  هي المستوي ( P ) الذي يشمل A و  شعاع ناظمي له

**برهان** : نعتبر المستقيم ( D ) الذي يشمل A و شعاع توجيه له ، والمستوي ( P ) الذي يشمل A و شعاع ناظمي

له . إذا كانت M نقطة من ( P ) فإن  شعاع من ( P ) وبالتالي 

و بالعكس نعتبر نقطة M من الفضاء حيث  . لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم ( D )

وبالتالي  لأن  لكن و  مرتبطان خطيا ، إذن  لأن ( ) و

بالتالي A = H ، المسقط العمودي لـ M على ( D ) هو A أي أن M نقطة من ( P )

**خاصية :** كل مستو، شعاع ناظمي له يقبل معادلة ديكارتية من الشكل 

حيث d عدد حقيقي

و بالعكس فإن مجموعة النقط M( x ; y ; z ) التي تحقق  حيث *a* ، *b* و *c* أعداد حقيقة غير معدومة معا هي مستو و شعاع ناظمي له .

**برهان** :  نقطة من المستوي ( P ) و  شعاع ناظمي لـ ( P )

تكون النقطة *M( x ; y ; z )* نقطة من ( P ) إذا و فقط إذا  أي :



و بوضع  نجد 

 شعاع ناظمي فإن *a ، b ، c* ليست كلها معدومة

و بالعكس : نعتبر ( E ) مجموعة النقط *M( x ; y ; z )* من الفضاء حيث 

بما أن *a ، b ، c* ليست كلها معدومة ، نأخذ مثلا  و نعتبر النقطة  . *A* نقطة من ( E )

و لدينا  شعاع غير معدوم . من أجل كل نقطة M( x ; y ; z ) من الفضاء لدينا



M نقطة من ( E ) يعني  و بالتالي ( E ) هو المستوي الذي يشمل *A* و  ناظمي له .

حالات خاصة :

⮘ معادلة ديكارتية للمستوي  هي 

⮘ معادلة ديكارتية للمستوي  هي 

⮘ معادلة ديكارتية للمستوي  هي 

نتائج :

( P ) و ( P' ) مستويان ، ناظميان لهما على الترتيب

⮘ ( P ) يوازي ( P' ) معناه يوجد *k* حقيقي حيث 

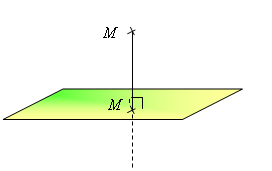
⮘ ( P ) عمودي على ( P' ) معناه 

**مثال تطبيقي :**

أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (p) الذي يشمل النقطة و

**تطبيق :**

في معلم متعامد و متجانس  من الفضاء ، نعتبر النقط ، .

1. بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا .
2. عين شعاعا ناظما للمستوي
3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي ( ABC ) .

**بعد نقطة عن مستو**

**تعريف :**

المسافة بين النقطة M والمستوي (P ) هي الطول MH

حيث M’ المسقط العمودي لـ M على(P ) ونكتب

**خاصية :**

في معلم متعامد و متجانس ، نعتبر المستوي ( P ) حيث  ، 

معادلة ديكارتية له . A نقطة إحداثياتها  .

البعد بين A و ( P ) هو العدد الحقيقي الموجب 

**تطبيق :**

في معلم متعامد و متجانس  من الفضاء نعتبر المستوي (P ) الذي معادلته

* عين بعد النقطة عن والمستوي (P )
* عين بعد النقطة عن والمستوي (P ) ماذا تستنتج

**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : الهندسة الفضائية الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : معادلة سطح كرة**

**الكفاءة المستهدفة :**

**تعيين معادلة سطح كرة**

معادلة سطح كرة :

مبرهنة :

 معلم متعامد و متجانس من الفضاء

معادلة سطح كرة مركزها ونصف قطرها R هي :

**البرهان :**

**تطبيق :**

في معلم متعامد و متجانس  من الفضاء

عين المعادلة الديكارتية لسطح كرة مركزه ونصف قطرها 3

**معادلة سطح كرة علم قطرها**

**خاصية :**

 معلم متعامد و متجانس من الفضاء

معادلة سطح كرة قطرها هي مجموعة النقط من الفضاء حيث

**تطبيق :**

في معلم متعامد و متجانس  من الفضاء

عين المعادلة الديكارتية لسطح كرة قطرها حيث و

**مجموعة النقط :**

**خاصية :**

 معلم متعامد و متجانس من الفضاء

مجموعة النقط من الفضاء بحيث هي

1. اما مجموعة خالية 2. إما نقطة 3. سطح كرة

**تطبيق :**

في معلم متعامد و متجانس  من الفضاء

بين أنمجموعة النقط من الفضاء التي تحقق دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

**الوضع النسبي لسطح كرة ومستوي :**

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء نعتبرالمستوي (p ) (S ) سطح كرة التي مركزها ونصف قطرها R

لتحديد الوضع النسبي نقارن بين : وR

1. فان (p ) لا يقطع (S )
2. فان (p ) يمس (S ) في نقطة
3. فان (p ) يقطع (S ) في دائرة

**تطبيق :**

ادرس الوضعية النسبية (p ) و (S ) سطح كرة التي مركزها ونصف قطرها Rفي كل حالة



**المادة : رياضيات المستوى : 3 ع تج**

**المحور : المستقيمات والمستويات في الفضاء الـمدة : 01 سـا**

**الموضوع : المستقيم في الفضاء**

**الكفاءة المستهدفة :**

**التمثيل الوسيطي والديكارتي لمستقيم في الفضاء**

**التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفضاء**

**مبرهنة وتعريف :**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . ( D ) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة 

و  شعاع ناظمي له .

M( x; y ; z ) نقطة من ( D ) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث : 

نسمي الجملة تمثيلا وسيطيا للمستقيم ( D ) .

**البرهان**

**مثال**

تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل النقطة وشعاع توجيهه

**تطبيق :**

ليكن المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي :

1. عين شعاع توجيه المستقيم *ونقطة منه*
2. بين أن النقطة تنتمي الى
3. هل النقطة تنتمي الى

**التمثيل الديكارتي لمستقيم في الفضاء :**

مستو معادلته الديكارتية و شعاع ناظم له

مستو معادلته الديكارتية و شعاع ناظم له

اذا كان و غير مرتبطين خطيا

فان المستويين و متقاطعين وفق مستقيم

تسمى الجملة التمثيل الديكارتي لهذا المستقيم

**مثال تطبيقي :**

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء

مستو معادلته الديكارتية

مستو معادلته الديكارتية

بين أن و يتقاطعان وفق مستقيم يطلب تعيين تمثيل ديكارتي له

**الانتقال من تمثيل وسيطي إلى تمثيل ديكارتي**

للانتقال من التمثيل الوسيطي لمستقيم إلى تمثيل ديكارتي نحذ الوسيط من جملة التمثيل الوسيطي

**مثال تطبيقي :**

عين تمثيل ديكارتيا للمستقيم المعرف *بالتمثيل الوسيطي :*

**الانتقال من تمثيل ديكارتي إلى تمثيل وسيطي**

للانتقال من تمثيل ديكارتي الى تمثيل وسيطي نعتبر أحد المتغيرات كوسيط ونكتب الاخرين بدلالة الوسيط

**مثال تطبيقي :**

عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المعرف بالتمثيل الديكارتي مستو معادلته الديكارتية