ملخصات ونتائج

ملخص الهندسة في الفضاء

مجموعات النقط

عن طريق المرجح

تطبيق: في المعلم المنسوب الى الفضاء $o,\vec{oi},\vec{oj}$ النقطة A,B,C من المستوى حيث $A\left(-1;-\sqrt{3};1\right);B\left(-1;\sqrt{3};2\right);C\left(-5;\sqrt{3};3\right)$

عين احداثيات D مرجح الجملة $A,2\ ;\ B,-1\ ;\ C;1$

عين مجموعة النقط M لاحقتها z حيث :

1). المجموعة Δ :

$$\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{MC}\right\|$$

2). المجموعة φ : $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|$

3). المجموعة S : $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=4$

4). المجموعة γ : $2\vec{MA}^2-\vec{MB}^2+\vec{MC}^2=20$

5). المجموعة K

$$\left(2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right)\left(3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{MC}\right)=0$$

6). المجموعة p :

$$\left(2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right)\left(2\vec{MA}-2\vec{MB}\right)=0$$

الحل: في المعلم المنسوب الى الفضاء $o,\vec{oi},\vec{oj}$ النقطة A,B,C من المستوى حيث $A\left(-1;-\sqrt{3};1\right);B\left(-1;\sqrt{3};2\right);C\left(-5;\sqrt{3};3\right)$

احداثيات D مرجح الجملة $A,2\ ;\ B,-1\ ;\ C;1$

$$D\left(\frac{2(-1)-1(-1)+1(-5)}{2};\frac{2\left(-\sqrt{3}\right)-1\left(\sqrt{3}\right)+1\left(\sqrt{3}\right)}{2};\frac{2(1)-1(1)+1(3)}{2}\right);D\left(-3;-\sqrt{3};2\right)$$

1 مرجحين

كل علاقة من الشكل

$$\left\|\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\delta\vec{MC}\right\|=\left\|\alpha'\vec{MA}+\beta'\vec{MB}+\delta'\vec{MC}\right\|$$

حيث $\alpha+\beta+\delta=\alpha'+\beta'+\delta'\neq 0$ هي مجموعة نقط تشكل مستويا محوريا

العلاقة $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{MC}\right\|$ توضح وجود جملة مرجحين

الجملة الاولى $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان

$$\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|2\vec{MD}\right\|$$

يعني ان $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=2MD$

الجملة الثانية $\left\|3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{MC}\right\|$ تقبل مرجح ليكن D' لان $3-2+1=2\neq 0$ يعني ان $\left\|3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|2\vec{MD'}\right\|$

$$\left\|3\vec{MA}-2\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=2MD'$$

ومنه $2MD'=2MD$ أي $MD'=MD$

المجموعة Δ هي مستوى محوري القطعة المستقيمة $[DD']$

2 مرجح

كل علاقة من الشكل

$$\left\|\alpha\vec{MA}+\beta\vec{MB}+\delta\vec{MC}\right\|=\left\|\alpha'\vec{MA}-\alpha'\vec{MB}\right\|$$

حيث: $\alpha+\beta+\delta\neq 0;\alpha'-\alpha'=0$

هي سطح كرة معلومة المركز ونصف القطر

العلاقة $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|$ توضح وجود مرجح وحيد

الجملة الاولى $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان

$$\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=\left\|2\vec{MD}\right\|$$

يعني ان $\left\|2\vec{MA}-\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=2MD$ ....$\boxed{1}$

الجملة الثانية $\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|$ لا تقبل مرجح لان $1-1=0$ يعني ان M مستقلة عن A و B

نكتب الجملة بدون M وهذا باستعمال علاقة شال نجد

$\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|=\left\|\vec{MA}+\vec{AB}-\vec{MB}\right\|=AB$: ....$\boxed{2}$

من 1 و 2 نجد $MD=\dfrac{AB}{2}$ وبما ان $\vec{AB}\left(0;2\sqrt{3};1\right)$ أي

$AB=\sqrt{0;\left(2\sqrt{3}\right)^2;1^2}=\sqrt{13}$ ومنه $MD=\sqrt{13}/2$

المجموعة φ هي سطح كرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=\sqrt{13}/2$

ملخصات ونتائج

مرجع 3

كل علاقة من الشكل $\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}\right\|=k$

حيث: $k\in\mathbb{R}_+^*$ و $\alpha+\beta+\delta\neq 0$

هي سطح كرة معلومة القطر والمركز

العلاقة $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$ توضح وجود مرجح وحيد

الجملة الاولى $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MD}\right\|$$

يعني ان $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2MD$ نجد $MD=\frac{4}{2}=2$

المجموعة S هي سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=2$

مرجع 4

كل علاقة من الشكل $\alpha\overrightarrow{MA}^2+\beta\overrightarrow{MB}^2+\delta\overrightarrow{MC}^2=k$

حيث: $k\in\mathbb{R}_+^*$ و $\alpha+\beta+\delta\neq 0$ هي سطح كرة معلومة المركز ونصف القطر

العلاقة $2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=20$ توضح وجود مرجح وحيد

الجملة الاولى $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ مرجحها D يعني ان

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=2\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)^2-\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DC}\right)^2$$

$$\left(2MD^2-MD^2+MD^2\right)+\left(2DA^2-DB^2+DC^2\right)$$

$$+2\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA}\right)-\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DC}\right)=20$$

يعني ان

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(2MD^2\right)+\left(2DA^2-DB^2+DC^2\right)$$

$$+2\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DA}\right)-\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DC}\right)=20$$

ومنه

$$2\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(2MD^2\right)+\left(2DA^2-DB^2+DC^2\right)$$

$$+\overrightarrow{MD}\left(2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=20$$

حسب قانون المرجح $\overrightarrow{MD}\left(2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=0$ نجد عندها

$\left(2MD^2\right)+\left(2DA^2-DB^2+DC^2\right)=20$ ومنه

$$MD=\frac{\sqrt{20-\left(2DA^2-DB^2+DC^2\right)}}{2}$$

نحسب كلا من :
$$\begin{cases} DA=\sqrt{(2)^2+0+1^2}=\sqrt{5} \\ DB=\sqrt{(2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+0}=\sqrt{16}=4 \\ DC=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2+1}=\sqrt{17} \end{cases}$$
ومنه

$$MD=\frac{\sqrt{20-(10-16+17)}}{2}=\frac{3}{2}$$

المجموعة γ هي سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=3/2$

مرجع 5

كل علاقة من الشكل

$$\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}\right)\left(\alpha'\overrightarrow{MA}+\beta'\overrightarrow{MB}+\delta'\overrightarrow{MC}\right)=0$$

حيث: $\alpha+\beta+\delta\neq\alpha'+\beta'+\delta'\neq 0$ هي سطح كرة معلومة القطر

العلاقة $\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ توضح وجود جملة مرجحين

الجملة الاولى $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مرجحها D يعني ان

$\boxed{1}$..........$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$

الجملة الثانية $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ تقبل مرجح ليكن D' لان

$3-2+1=2\neq 0$ ومنه $3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD'}$.........$\boxed{2}$

اذن من 1 و 2 ينتج لنا $2\overrightarrow{MD'}\times 2\overrightarrow{MD}=0$ أي $\overrightarrow{MD'}\times\overrightarrow{MD}=0$

المجموعة K هي سطح الكرة التي قطرها $[DD']$

مرجع 6

كل علاقة من الشكل

$$\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}\right)\left(\alpha'\overrightarrow{MA}+\beta'\overrightarrow{MB}+\delta'\overrightarrow{MC}\right)=0$$

حيث: $\alpha+\beta+\delta\neq\alpha'+\beta'+\delta'=0$ هي مستوي معرف بنقطة وشعاع

العلاقة $\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)=0$ توضح وجود جملة مرجح وحيد

الجملة الاولى $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ مرجحها D يعني ان

$\boxed{1}$..........$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$

العلاقة الثانية $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ لا تقبل مرجح لان $2-2=0$ يعني ان M مستقلة عن A و B

نكتب الجملة بدون M وهذا باستعمال علاقة شال نجد

$\boxed{2}$....$2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}$:

من 1 و 2 نجد $2\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AB}=0$ أي $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{AB}=0$ وبما ان
$\overrightarrow{AB}\left(0;2\sqrt{3};1\right)$ ومنه

المجموعة p هي مستوي يشمل D' و يعامد
$\overrightarrow{AB}\left(0;2\sqrt{3};1\right)$

تطبيق 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، لدينا:

- النقط: $A\left(1;1;1\right)$، $B\left(3;2;0\right)$.
- المستوي $\left(P\right)$ الذي يشمل A و *شعاعه الناظمي* $\overrightarrow{AB}$
- المستوي $\left(Q\right)$ الذي الذي معادلته الديكارتية $x-y+2z+4=0$.
- الكرة $\left(S\right)$ مركزها A ونصف قطرها AB

1). بين ان معادلة المستوي $\left(P\right)$ هي $2x+y-z-8=0$
2). عين معادلة سطح الكرة $\left(S\right)$
3). a) احسب المسافة بين النقطة A والمستوي $\left(Q\right)$
استنتج ان المستوي $\left(Q\right)$ مماس لسطح الكرة $\left(S\right)$
b) هل المستوي $\left(P\right)$ مماس لسطح الكرة $\left(S\right)$ ؟
4). بفرض ان المسقط العمودي للنقطة A على المستوي $\left(Q\right)$ هو النقطة C ذات الاحداثيات $\left(0;2;-1\right)$
a) اثبت ان المستويين $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$ متقاطعان
b) بين ان المستقيم $\left(D\right)$ ناتج عن تقاطع المستويين $\left(P\right)$ و $\left(Q\right)$
يعطى التمثيل الوسيطي للمستقيم $\left(D\right)$ كما يلي:

$$\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases} \quad / t\in\mathbb{R}$$

c) تحقق ان النقطة A لا تنتمي الى المستقيم $\left(D\right)$
d) المستقيم $\left(D\right)$ عمودي على الستوي $\left(\mathbb{R}\right)$ في النقطة A
بين ان كل نقطة من المستوي $\left(\mathbb{R}\right)$ متساوية البعد عن النقطتين C و B
(افرض ان النقطتين C و B تنتميان الى نفس المستوي $\left(\mathbb{R}'\right)$)

تطبيق 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A\left(1;-1;3\right)$، $B\left(0;3;1\right)$
$C\left(6;-7;-1\right)$. $D\left(2;1;3\right)$، $E\left(4;-6;2\right)$،

1) أ. بيّن أنّ النقط E *مرجح الجملة* $\left\{\left(A,2\right);\left(B,-1\right);\left(C,1\right)\right\}$
ب. عين المجموعة $\left(S\right)$ للنقط M من الفضاء حيث
$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$
2) أ. بين ان النقط A,B,D تعين مستو
ب. بيّن أنّ المستقيم $\left(EC\right)$ عمودي على المستوي $\left(ABD\right)$ ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABD\right)$.

تدرب وحل المسائل