تمارين المراجعة النهائية 01

كل الأسئلة المتوقعة في امتحان شهادة البكالوريا مع الإجابة المفصلة :

I. الهندسة الفضائية

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

I.1. المستقيم وما يتعلق به

التمرين 01 :

نعتبر المستقيم (Δ) المعرف بالنقطة $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع توجيه له.

1. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).
2. تحقق أن النقطة $B(0;-4;3)$ لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).
3. عين إحداثيات النقطة H مسقط النقطة B على (Δ).
4. استنتج بعد النقطة B عن ا لمستقيم (Δ).
5. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

صيغة أخرى للسؤال 4 :

نعتبر النقطة $M(1+2t\ ;\ -1+t\ ;\ 2-t)$ حيث : t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(t)=BM$.

أ. أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب. بين أنه من أجل كل t من $\mathbb{R}$: $h'(t)=\dfrac{6t+6}{\sqrt{6t^2+12t+11}}$.

جـ. شكل جدول تغيرات الدالة h.

د. استنتج قيمة t التي من أجلها تكون المسافة BM أصغر ما يمكن.

هـ. قارن بين القيمة الحدية للدالة h و المسافة بين النقطة B و المستقيم (Δ).

I.2. المستوي وما يتعلق به

التمرين 02 :

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-1;4;2)$ ، و $\vec{n}(2;1;-3)$ ناظمي له.

التمرين 03 :

نعتبر النقط $A(0;3;-1)$; $B(-1;1;2)$ و $C(3;0;-2)$.

1. بين أن النقط A، B و C تعين مستويا.
2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

التمرين 04 :

نعتبر النقط $A(2;1;1)$; $B(-1;3;2)$; $C(4;0;1)$ و $D(1;2;2)$.

1. بين أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.
2. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).
3. استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC).

التمرين 05 :

نعتبر النقطتين A و B حيث : $A(4;1;2)$; $B(1;-1;3)$.

- عين مجموعة النقط M بحيث : $MA=MB$.

I.3. بعد نقطة عن المستوي :

التمرين 06 :

نعتبر المستوي (P) معادلته $2x-y+z+3=0$ والنقطة $A(1;-1;0)$.

1. عين بعد النقطة A عن المستوي (P).
2. هل النقطة $B(4;7;-4)$ تنتمي إلى المستوي (P)؟

التمرين 07 :

نفرض المستوي (P) معادلته : $x+y-3z+1=0$ ، والنقطة $A(3;1;-2)$.

عين إحداثيات النقطة H مسقط النقطة A على المستوي (P).

التمرين 08 :

نعتبر المستوي (P) معادلته : $4x-y+2z-3=0$ ، والنقطة $A(-1;2;1)$.

بين أن النقطة $H\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$ هي مسقط النقطة A على المستوي (P)..

I.4.الكرة وعناصرها المميزة:

التمرين 09 :

M نقطة إحداثياتها $(x\,;\,y\,;\,z)$ تحقق المعادلات التالية :

عين في كل حالة مجموعة النقط M وعناصرها المميزة :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-10=0 \quad\text{.............................}(1)$$

$$x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z+15=0 \quad\text{.............................}(2)$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+8y+2z+21=0 \quad\text{.............................}(3)$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-2x-4y+2z-2m^2+4m+9=0 \quad\text{........}(4)$$

I.5.تقاطع مستقيمين:

التمرين 10 :

نعتبر المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) المعرفين بتمثيلهما الوسيطيين :

$$(\Delta_1):\left\{\begin{aligned} x&=1-\lambda\\ y&=3+\lambda\\ z&=2+3\lambda\end{aligned}\right.\ ;\lambda\in\mathbb{R}\ ;\quad (\Delta_2):\left\{\begin{aligned} x&=-2+2t\\ y&=-1-2t\\ z&=4-6t\end{aligned}\right.\ ;t\in\mathbb{R}$$

1. أدرس تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) .

2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (Δ_1) و (Δ_2) .

التمرين 11 :

نعتبر المستقيمين (D) و (D') المعرفين بتمثيليهما الوسيطين :

$$(D):\left\{\begin{aligned} x&=2-3\lambda\\ y&=1+\lambda\\ z&=-3+2\lambda\end{aligned}\right.\ ;\lambda\in\mathbb{R}\ ;\quad (D'):\left\{\begin{aligned} x&=3+2t\\ y&=6+2t\\ z&=-3-t\end{aligned}\right.\ ;t\in\mathbb{R}.$$

1. أدرس تقاطع (D) و (D').

2. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل (D) و (D').

I.6.تقاطع مستويين:

التمرين 12 :

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $x-2y+3z+7=0$ ، والمستوي (Q) الذي معادلته : $3x-6y+9z+17=0$.

1. عين مركبات الشعاعين الناظميين $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ للمستويين (P) و (Q)

2. أدرس الوضع النسبي لـ (P) و (Q)

التمرين 13 :

نعتبر المستويين (P) و (P') المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب :

$2x-y+3z-1=0$ و $x+y-2z+4=0$

1. بين أن (P) و (P') غير متوازيين.
2. هل (P) و (P') متعامدان ؟
3. بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له ثم تعيين العناصر المميزة لـ (Δ).

I.7. تقاطع مستويين:

التمرين 14 :

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $-x+4y-3z=0$ ، والمستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي معرف بالجملة :

$$\left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=1-3t \\ z=4-t \end{array}\right\} t\in\mathbb{R};$$

- أدرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (P).

I.8. تقاطع المستوي والكرة:

التمرين 15 :

(E) مجموعة النقط M إحداثياتها $(x;y;z)$ تحقق المعادلة : $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$ ....(1)

1. عين مجموعة النقط M و عناصر ها المميزة.
2. بين أن النقطة $A(2;1;4)$ تنتمي إلى المجموعة (E).
3. أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة (E) في النقطة A.
4. لتكن النقطة B نظيرة A بالنسبة للنقطة Ω.
- عين معادلة المستوي (Q) الذي يشمل النقطة B.

التمرين 16 :

نعتبر النقطة $A(1;1;-1)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $2x+y-2z+4=0$.

1. أحسب بعد القطة A عن المستوي (P).
2. (Γ) مجموعة النقط M إحداثياتها $(x;y;z)$ تحقق المعادلة : $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-6=0$ .....(1)

2.أ. عين مجموعة النقط M و عناصر ها المميزة.

2.ب. بين أن المستوي (P) يمس سطح الكرة في النقطة B يطلب تعيين إحداثييها.

التمرين 17 :

(γ) مجموعة النقط M إحداثياتها تحقق المعادلة :

$x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z-27=0$ ....(1)

1. بين أن (γ) هي كرة مركزها $\Omega(-2;-1;2)$ ونصف قطرها $R=6$.
2. (P) المستوي الذي معادلته : $x-y+z+2=0$.

2.أ. أدرس الوضع النسبي لـ (γ) و (P).

2.ب. بين أن تقاطع (γ) و (P) هي دائرة مركزها $A(-3;0;1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{33}$.

حلول (السلسلة رقم 01) تمارين المراجعة العامة

الحل المفصل للتمرين 01 : ....

1. كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) المعرف بالنقطة $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(2;1;-1)$ شعاع ناظمي له :

نفرض $M(x;y;z)$، فيكون :

$M\in(D)$ تكافئ : $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{u} \text{، ومنه } (\Delta) : \left.\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{matrix}\right\} ;\ \lambda\in\mathbb{R}$$

2. التحقق أن النقطة $B(0;-4;3)$ لا تنتمي إلى (Δ) :

لدينا : $\left.\begin{matrix} x_B=1+2\lambda \\ y_B=-1+\lambda \\ z_B=2-\lambda \end{matrix}\right\}$ يستلزم : $\left.\begin{matrix} 0=1+2\lambda \\ -4=-1+\lambda \\ 3=2-\lambda \end{matrix}\right\}$، ومنه : $\left.\begin{matrix} \lambda=-\frac{1}{2} \\ \lambda=-3 \\ \lambda=-1 \end{matrix}\right\}$

بما أن الجملة لا تقبل حلا وحيدا، وعندئذ : B لا تنتمي إلى (Δ).

3. تعيين إحداثيات النقطة H مسقط النقطة B على (Δ) :

نفر ض $H(x;y;z)$، فيكون :

$H(1+2\lambda;-1+\lambda;2-\lambda)$، وعندئذ : $\overrightarrow{BH}(2\lambda+1;\lambda+3;-\lambda-1)$.

لكن : $\vec{u}\perp\overrightarrow{BH}$، فيكون :

$\vec{u}.\overrightarrow{BH}=0$ تكافئ : $2(2\lambda+1)+1(\lambda+3)-1(-\lambda-1)=0$، ومنه : $\lambda=-1$. إذن : $H(-1;-2;3)$.

4. تعيين بعد النقطة B عن المستقيم (Δ) :

$BH^2=(-1-0)^2+(-2+4)^2+(3-3)^2=1+4$. إذن : $BH=\sqrt{5}$.

6. كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) :

$(AB):(A;\overrightarrow{AB})$ حيث : $\overrightarrow{AB}(-1;-3;1)$

نفرض $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم (AB)، فيكون : $\left.\begin{matrix} x=1-t \\ y=-1-3t \\ z=2+t \end{matrix}\right\} ;\ t\in\mathbb{R}$.

صيغة أخرى للسؤال 4 :

أ. كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t :

لدينا : $M(1+2t;-1+t;2-t)$، فيكون : $\overrightarrow{BM}(1+2t;3+t;-1-t)$

وعندئذ : $h(t)=BM=\sqrt{(2t+1)^2+(t+3)^2+(t+1)^2}=\sqrt{6t^2+12t+11}$

ب. لدينا : $h'(t)=\dfrac{12t+12}{2\sqrt{6t^2+12t+11}}=\dfrac{6t+6}{\sqrt{6t^2+12t+11}}$.

جـ. تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	

د. الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى عند -1 قيمتها $\sqrt{5}$.

الحل المفصل للتمرين 02 :

المعطيات : $(A;\vec{n})$; (P) ; $A(-1;4;2)$ ، و $\vec{n}(2;1;-3)$.

معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون : $\overrightarrow{AM}(x+1;y-4;z-2)$ ، وعندئذ :

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AM}$ تكافئ : $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$.

$\Leftrightarrow 2(x+1)+1(y-4)-3(z-2)=0$ ، ومنه معادلة (P) هي : $2x+y-3z+4=0$.

طريقة أخرى :

معادلة المستوي (P) هي : $2x+y-3z+4=0$ ، لكن :

$A\in(P)$ تكافئ : $2x_A+y_A-3z_A+d=0$ ، ومنه : $d=-4$. إذن معادلة هي : $2x+y-3z-4=0$.

الحل المفصل للتمرين 03 :

المعطيات : لدينا النقط $A(0;3;-1)$; $B(-1;1;2)$ و $C(3;0;-2)$.

1. تبيان أن النقط A، B و C تعين مستويا :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-2;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;-3;-1)$.

نلاحظ أن : $\frac{-1}{3}\neq\frac{-2}{-3}$ ، وعندئذ: الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

و هذا يعني أن النقط A، B و C ليست في استقامية، فهي تعين مستويا (ABC).

2. تعيين معادلة المستوي (ABC) :

نفرض $\vec{n}(a;b;1)$ ، فيكون :

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{array}\right\}$ ت كافئ : $\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-a-2b+3=0\\ 3a+b+3=0\end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-3a-6b=-9\\ 3a+b=-3\end{array}\right\}$ ، ومنه : $(a;b)=\left(\frac{11}{9};\frac{8}{9}\right)$.

ويكون : $(a;b;c)=\left(\frac{11}{9};\frac{8}{9};1\right)=\frac{1}{9}(11;8;9)$. إذن : $\vec{n}(11;8;9)$.

طريقة أخرى لإيجاد مركبات الشعاع الناظمي :

$a=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -3 & -1\end{vmatrix}=2+9=11$

$b=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(1-9)=8$

$c=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=3+6=9$

	+	−	+
$\vec{n}$	a	b	c
$\overrightarrow{AB}$	-1	-2	3
$\overrightarrow{AC}$	3	-3	-1

إذن : $\vec{n}(11;8;9)$.

2. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

الشعاع الناظمي للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(11;8;9)$ ،

فتكون معادلة المستوي (ABC) هي : $11x+8y+9z+d=0$.

لكن :

$A\in(ABC)$ تكافئ : $11x_A+8y_A+9z_A+d=0$

$\Leftrightarrow 11(0)+8(3)+9(-1)+d=0$ ، ومنه : $d=-15$.

إذن : معادلة (ABC) هي $11x+8y+9z-15=0$

الحل المفصل للتمرين 04 : ....

المعطيات : لدينا النقط $A(2;1;1)$; $B(-1;3;2)$; $C(4;0;1)$ و $D(1:2;2)$.

1. تبيان أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي :

النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان x و y حيث :

$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ....(1)

لكن : $AB(-3;2;1)$;$\overrightarrow{AC}(2;-1;0)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;1;1)$، فيكون :

(1) تكافئ : $\begin{cases}-3x+2y=-1\\2x-y=1\\x+0=1\end{cases}$ ، ومنه : $(x;y)=(1;1)$. إذن : النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي.

طريقة أخرى :

تعيين معادلة المستوي (ABC) ، ثم تبيان أن النقطة A تنتمي إلى المستوي (ABC):

2. كتابة التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC):

نلاحظ : $\begin{vmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$ ، أي أنه لا يوجد عدد حقيقي λ : $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.

إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا، وبالتالي يعينان مستويا (ABC).

نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون :

$M\in(ABC)$ تكافئ : $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC): $\begin{cases}x=2-3\alpha+2\beta\\y=1+2\alpha-\beta\\z=1+\alpha\end{cases}$; $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

3. استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC):

الطريقة :

نحسب α و β بدلالة x و y ثم نعوض قيمتيهما في المعادلة (3) من الجملة :

لدينا : $\begin{cases}-3\alpha+2\beta=x-2\\2\alpha-\beta=y-1\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}-3\alpha+2\beta=x-2\\4\alpha-2\beta=2y-2\end{cases}$ ، ومنه : $\alpha=x+2y-4$

ويكون : $\beta=-y+1+2\alpha$ ، ومنه : $\beta=(2x+3y+7)$.

وعندئذ :

$z=1+\alpha$ تكافئ : $z=1+x+2y-4$

$\Leftrightarrow x+2y-z-4=0$.

إذن : معادلة المستوي (ABC) هي : $x+2y-z-4=0$

الحل المفصل للتمرين 05: ....

تعيين مجموعة النقط M حيث : $MA=MB$ و $A(4;1;2)$; $B(1;-1;3)$

$MA=MB$ تكافئ : $AM=BM$

$$AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-4)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 \Leftrightarrow$$
$$-8x-2y-4z+21=-2x+2y-6z+11 \Leftrightarrow$$
$$.3x+2y-z-5=0 \Leftrightarrow$$

إذن مجموعة النقط هي المستوي الذي معادلته : $3x+2y-z-5=0$

طريقة أخرى :

نفرض I منتصف AB، فيكون : $I\left(\frac{5}{2};0;\frac{5}{2}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;-2;1)$.

مجموعة النقط M حيث : $MA=MB$ هو مستوي محوري (P) يشمل النقطة I، وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}$، فتكون معادلته :

$$-3x-2y+z+d=0$$

لكن :

$I\in(P)$ تكافئ : $-3x_I-2y_I+z_I+d=0$

$\Leftrightarrow -\frac{15}{2}-0+\frac{5}{2}+d=0$، ومنه : $d=5$.　　إذن معادلة (P) هي : $-3x-2y+z+5=0$.

الحل المفصل للتمرين 06: ....

1. حساب بعد النقطة $A(1;-1;0)$ عن المستوي (P) معادلته : $2x-y+z+3=0$.

$$.d(A;(P))=\frac{|2x_A-y_A+z_A-3|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{|2+1+0+3|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

2. هل النقطة $B(4;7;-4)$ تنتمي إلى المستوي (P) ؟

$.d(B;(P))=\frac{|8-7-4+3|}{\sqrt{6}}=\frac{0}{\sqrt{6}}=0$　　إذن النقطة B هي نقطة من المستوي (P).

الحل المفصل للتمرين 07: ....

تعيين إحداثيات النقطة H مسقط النقطة A على المستوي (P).

لنعين أولا الجملة الوسيطية للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وعمودي على (P).

الشعاع الناظمي $\vec{n}(1;1;-3)$ للمستوي (P) هو شعاع التوجيه للمستقيم (Δ).

وعند التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو : $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=-2-3t \end{cases}$ ؛ $t\in\mathbb{R}$

لدينا : $H\in(\Delta)$ تكافئ : $H(3+t;1+t;-2-3t)$

$H\in(P)$ تكافئ : $x_H+y_H-3z_H+1=0$

$$(3+t)+(1+t)-3(-2-3t)+1=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 11t+11=0$، ومنه : $t=-1$.　　إذن : $H(2;0;1)$.

الحل المفصل للتمرين 08: ....

المعطيات :

لدينا النقطة $A(-1;2;1)$ والمستوي (P) معادلته : $4x-y+2z-3=0$.

• تبيان أن $H\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$ مسقط النقطة A على المستوي (P).

تكون H مسقط A على (P) إذا تحقق ما يلي :

$H\in(P)$ و $\overrightarrow{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{n}$ ناظم المستوي (P).

لدينا : • $4x_H-y_H+2z_H-3=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}+\frac{10}{3}-3=\frac{9}{3}-3=0$.　　إذن : $H\in(P)$.

• $\overrightarrow{AH}\left(\frac{1}{3}+1;\frac{5}{3}-2;\frac{5}{3}-1\right)$، ومنه : $\overrightarrow{AH}\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

• $\vec{n}(4;-1;2)$.

لكن : $\frac{1}{3}(4;-1;2)=\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$، فيكون : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\vec{n}$.

وعندئذ : $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AH}$ مرتبطان خطيا. إذن : H هي مسقط النقطة A على المستوي (P).

الحل المفصل للتمرين 09:

تذكر :
$A=x^2\mp\bigstar x$
$=\left(x\mp\frac{\bigstar}{2}\right)^2-\left(\frac{\bigstar}{2}\right)^2$

تعيين مجموعة النقط في كل مما يلي :

• $x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-10=0$ ....(1)

(1) تكافئ : $(x^2-2x)+(y^2+2y)+(z^2+4z)-10=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+(z+2)^2-4-10=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)+(z+2)^2=(4)^2$

إذن : مجموعة النقط M هي كرة مركزها $\omega(1;-1;-2)$، ونصف قطرها $r=4$.

• $x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z+15=0$ ....(2)

(2) تكافئ : $(x^2+6x)+(y^2-2y)+(z^2-2z)+15=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2-9+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1+15=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-11+15=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=-4$. إذن : مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

• $x^2+y^2+z^2-4x+8y+2z+21=0$ ....(3)

(3) تكافئ : $(x^2-4x)+(y^2+8y)+(z^2+2z)+21=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+4)^2-16+(z+1)^2-1+21=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+4)^2(z+1)^2=0$. إذن : مجموعة النقط M هي النقطة $\omega(2;-4;-1)$.

• $2x^2+2y^2+2z^2-2x-4y+2z-2m^2+4m+9=0$ ....(4)

(4) تكافئ : $x^2+y^2+z^2-x-2y+z-m^2+2m+\frac{9}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y-1)^2-1+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-m^2+2m+\frac{9}{2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=m^2-2m-\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=m^2-2m-3$

لندرس إشارة m^2-2m-3 :

m	$-\infty$		-1		-3		$+\infty$
m^2-2m-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

المناقشة :
• $m\in\{-1;3\}$: مجموعة النقط M هي نقطة $\omega\left(\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$.

• $m\in]-1;3[$: مجموعة النقط M هي مجموعة خالية.

• $m\in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$: مجموعة النقطة M هي دائرة مركزها ω ونصف قطرها $r=\sqrt{m^2-2m-3}$.

الحل المفصل للتمرين 10:

1. لدينا :

$(\Delta_1):(A;\vec{u})$ حيث : $A(1;3;2)$ و $\vec{u}(-1;1;3)$.

$(\Delta_2):(A;\vec{v})$ حيث : $B(-2;-1;4)$ و $\vec{v}(2;-2;-6)$.

لاحظ : $(2;-2;6)=-2(-1;2;3)$، فيكون : $\vec{v}=-2\vec{v}$.

إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا وعندئذ (Δ_1) و (Δ_2) من نفس المستوي.

• هل $B\in(\Delta_1)$ ؟ :

$\left.\begin{matrix} x_B=1-\lambda \\ y_B=3+\lambda \\ z_B=2+3\lambda \end{matrix}\right\}$ تكافئ : $\left.\begin{matrix} -2=1-\lambda \\ -1=3+\lambda \\ 4=2+\lambda \end{matrix}\right\}$، ومنه : $\left.\begin{matrix} \lambda=3 \\ \lambda=-4 \\ \lambda=2 \end{matrix}\right\}$

إذن : الجملة لا تقبل حلا وحيدا، وعندئذ : (Δ) و (Δ') متوازيان تماما.

2. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) :

لدينا $(P):\left(A;\overrightarrow{AB};\vec{u}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;-4;2)$.

نفرض $\vec{n}(a;b;1)$، فيكون :

$\left.\begin{matrix} \vec{n}\perp\overrightarrow{AB} \\ \vec{n}\perp\vec{u} \end{matrix}\right\}$ تكافئ : $\left.\begin{matrix} \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}.\vec{u}=0 \end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -3a-4b+2=0 \\ -a+b+3=0 \end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3a+4b=2 \\ -a+b=-3 \end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 3a+4b=2 \\ -3a+3b=-9 \end{matrix}\right\}$، ومنه : $(a;b)=(2;-1)$. إذن : $\vec{n}(2;-1;1)$.

معادلة المستوي (P) تكتب بالشكل : $2x-y+z+d=0$.

لكن :

$A\in(P)$ تكافئ : $2x_A-y_A+z_A+d=0$، ومنه : $d=-1$.

وعندئذ معادلة المستوي (P) هي : $2x-y+z-1=0$.

الحل المفصل للتمرين 11: ....

المعطيات :

$(D):(A;\vec{u})$، حيث : $A(2;1;-3)$ و $\vec{u}(-3;1;2)$

$(D'):(B;\vec{u}')$، حيث : $B(3;6;-3)$ و $\vec{u}'(2;2;-1)$

1. دراسة تقاطع (D) و (D') :

لاحظ : $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطيا لأن : $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{2}$.

إذن : (D) و (D') متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي وللوصول إلى ذلك نبحث عن حلول الجملة :

$\left.\begin{matrix} 2-3\lambda=3+2t \\ 1+\lambda=6+2t \end{matrix}\right\}$ تكافئ : $\left.\begin{matrix} -3\lambda-2t=1 \\ \lambda-2t=5 \end{matrix}\right\}$، ومنه : $(\lambda;t)=(1;-2)$

$\lambda=1$: $\left.\begin{matrix} x=2-3(1)=-1 \\ y=1+(1)=2 \\ z=-3+2(-1)=-1 \end{matrix}\right\}$ $t=-2$: $\left.\begin{matrix} x=3+2(-2)=-1 \\ y=6+2(-2)=2 \\ z=-3-(-2)=-1 \end{matrix}\right\}$

إذن : $(D)\cap(D')=\{N(-1;2;-1)\}$.

2. كتابة معادلة المستوي (Q) الذي يشمل (D) و (D') :

نفرض $\vec{n}(a;b;1)$، فيكون :

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp\vec{u}\\ \vec{n}\perp\vec{u'}\end{array}\right\}$ تكافئ : $\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\vec{u}=0\\ \vec{n}.\vec{u'}=0\end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}-3a+b+2=0\\ 2a+2b-1=0\end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}3a-b=2\\ 2a+2b=1\end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}6a-2b=4\\ 2a+2b=1\end{array}\right\}$ ، ومنه : $(a;b)=\left(\frac{5}{8};-\frac{1}{8}\right)$ ، ويكون :

$(a;b;1)=\left(\frac{5}{8};-\frac{1}{8};1\right)=\left(\frac{5}{8};-\frac{1}{8};\frac{8}{8}\right)=\frac{1}{8}(5;-1;8)$. إذن : $\vec{n}(5;-1;8)$ ، وعندئذ $(Q):(N;\vec{n})$.

وتكون معادلته من الشكل : $5x-y+8z+d=0$.

لكن :

$N\in(Q)$ تكافئ : $5x_N-y_N+8z_N+d=0$ ، ومنه : $d=15$.

النتيجة : معادلة المستوي (Q) هي : $5x-y+8z+15=0$.

الحل المفصل للتمرين 12 : ....

المعطيات :

المستوي (P) معادلته : $x-2y+3z+7=0$ والمستوي (Q) معادلته : $3x-6y+9z+17=0$.

1. تعيين مركبات $\vec{n}$ و $\vec{n'}$:

$\vec{n}$ ناظم المستوي (P) ، فيكون : $\vec{n}(1;-2;3)$

$\vec{n'}$ ناظم المستوي (Q) ، فيكون : $\vec{n'}(3;-6;9)$

2. دراسة الوضع النسبي للمستويين (P) و (Q) :

لاحظ : $(3;-6;1)=3(1;-2;3)$ ، فيكون : $\vec{n'}=3\vec{n}$.

إذن : (P) و (Q) متوازيان، ويكون :

نفرض النقطة A تنتمي إلى (P) حيث : $A(1;1;-2)$ ، فيكون :

$$\begin{aligned}3x_A-6y_A+9z_A+17&=3(1)-6(1)+9(-2)+17\\&=3-6-18+17\\&=-4\\&\neq 0\end{aligned}$$

إذن : $A\notin(Q)$. **النتيجة** : (P) و (Q) متوازيان تماما.

الحل المفصل للتمرين 13 : ....

المعطيات :

(P) و (P') مستويان معادلتاهما على الترتيب : $x+y-2z+4=0$ و $2x-y+3z-1=0$.

1. تبيان أن (P) و (P') غير متوازيين :

لدينا :

$\vec{n}(1;1;-2)$ ناظم (P) و $\vec{n'}(2;-1;3)$ ناظم (P') فيكون : $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{2}$ ، وعندئذ : $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن : (P) و (P') غير متوازيين.

2. هل (P) و (P') متعامدان ؟

لدينا : $\vec{n}.\vec{n'}=(1)(2)+(1)(-1)+(-2)(3)=-5$. إذن : (P) و (P') غير متعامدين.

3. تبيان أن (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) :

لدينا (P) و (P') غير متوازيين، فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) المعرف بالجملة : $\left.\begin{array}{l} x+y-2z+4=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{array}\right\}$ ..... (I)

(I) تكافئ : $\left.\begin{array}{l} x+y=2z-4 \\ 2x-y=-3z+1 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3}z-1 \\ y=2x+3z-1 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3}z-1 \\ y=\frac{7}{3}z-3 \end{array}\right\}$ ، ومنه (Δ) : $\left.\begin{array}{l} x=-1-\frac{1}{3}t \\ y=-3+\frac{7}{3}t \\ z=t \end{array}\right\}$ ؛ $t\in\mathbb{R}$.

العناصر المميزة لـ (Δ) :

(Δ) يشمل النقطة $A(-1;-3;0)$ ، وشعاع توجيهه : $\vec{u}(-1;7;3)$.

الحل المفصل للتمرين 14:

• دراسة الوضع النسبي لـ (P) و (P') :

لدينا شعاع توجيه (Δ) هو : $\vec{u}(1;-3;-1)$ ، ويشمل النقطة $A(2;1;4)$ وناظم (P) هو $\vec{n}(-1;4;-3)$ ، فيكون :

$\vec{n}.\vec{u}=(-1)(1)+(4)(-3)+(-3)(-1)=-10\neq 0$

إذن : $\vec{n}$ و $\vec{u}$ غير متعامدين، وعندئذ : (Δ) و (P) يتقاطعان في النقطة G.

لنعين مجموعة حلول المعادلة $Kt=L$ حيث : $K=a\alpha+b\beta+c\gamma$ ، $L=-(ax_0+bn_0+cz_0+d)$

لدينا : $K=\vec{n}.\vec{u}=-10$

$L=-\big(-(2)+4(1)+3(4)\big)=10$. إذن : $-10t=10$ ، ومنه : $t=-1$.

وعندئذ : $(P)\cap(P')=\{F(1;4;5)\}$.

الحل المفصل للتمرين 15:

1. تعيين مجموعة النقط (E) حيث : $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$ ....(1)

(1) تكافئ : $(x^2-6x)+(y^2+2y)+(z^2-4z)+5=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+(z-2)^2-4+5=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(3)^2$

إذن : (E) هي كرة مركزها $\Omega(3;-1;2)$ ، ونصف قطرها : $R=3$.

2. تبيان أن النقطة A تنتمي إلى (E) حيث : $A(2;1;4)$.

$\Omega A^2=(2-3)^2+(1+1)^2+(4-2)^2=1+4+4=9$. إذن : $\Omega A=\sqrt{9}=3$ ، وعندئذ A تنتمي إلى (E).

3. كتابة معادلة المستوي (P) :

(P) يمس (E) في A معناه : $\overline{\Omega A}\perp(P)$, $\overline{\Omega A}(-1;2;2)$

معناه : $\overline{\Omega A}$ ناظم المستوي (P)

وعندئذ معادلة (P) تكتب بالشكل : $-x+2y+2z+d=0$.

لكن : $A\in(E)$ تكافئ : $-x_A+2y_A+2z_A+d=0$ ، ومنه : $D=-8$.

إذن معادلة المستوي هي : $-x+2y+2z-8=0$.

4. تعيين معادلة المستوي (Q) :

$(B$ نظيرة A بالنسبة للنقطة Ω $)$ معناه : $\overline{\Omega B}=-\overline{\Omega A}$

معناه : $(x-3;y+1;z-2)=(1;-2;-2)$. إذن : $B(4;-3;0)$.

وعندئذ المستوي (Q) معرف بالنقطة B و $\overrightarrow{\Omega B}$ ناظمي حيث : $B(4;-3;0)$ و $\overrightarrow{\Omega B}(1;-2;-2)$.

فمعادلته تكتب بالشكل : $x-2y-2z+d=0$.

لكن : $B\in(Q)$ تكافئ : $x_B+2y_B+2z_B+d=0$ ، ومنه : $d=-10$.

إذن معادلة (Q) هي : $x-2y-2z-10=0$

الحل المفصل للتمرين 16:

1. حساب بعد النقطة $A(1;1;-1)$ عن المستوي (P) :

$$d\left(A;(P)\right)=\frac{\left|2x_A+y_A-2z_A+4\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{\left|2+1+2+4\right|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3.$$

2.أ. تعيين المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة :

لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-6=0$ ....(1)

(1) تكافئ : $(x^2-2x)+(y^2-2y)+(z^2+2z)-6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+1)^2-1-6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(3)^2$.

إذن : (Γ) هي كرة مركزها $A(1;1;-1)$ ، ونصف قطرها $R=3$.

2.ب. تبيان أن المستوي (P) يمس سطح الكرة (Γ) :

لدينا : $d\left(A;(P)\right)=3=R$. إذن المستوي (P) يمس سطح الكرة في النقطة B مسقط النقطة A على (P).

• المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P) فيكون شعاع توجيهه هو الشعاع الناظمي للمستوي (P) ، أي أن $\vec{n}(2;1;-2)$.

ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو : $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$ ؛ $A\in R$

نفرض النقطة $B(x;y;z)$ ، فيكون :

$B\in(P)\cap(AB)$ تكافئ : $B\in(AB)$ ، $B\in(P)$

$\Leftrightarrow B(2\lambda+1;\lambda+1;-2\lambda-1)$ ، $B\in(P)$

$\Leftrightarrow 2x_B+y_B-2z_B+4=0$

$\Leftrightarrow 2(2\lambda+1)+(\lambda+1)-2(-2\lambda-1)+4=0$

$\Leftrightarrow 9\lambda+9=0$ ، ومنه : $\lambda=-1$. إذن : $B(-1;0;1)$.

الحل المفصل للتمرين 17:

المعطيات :

(γ) مجموعة النقط M حيث : $x^2+y^2+z^2+4x+2y-4z-27=0$ ....(1)

1. تبيان أن هي كرة مركزها $\Omega(-2;-1;2)$ ، ونصف قطرها $R=6$.

(1) تكافئ : $(x^2+4x)+(y^2+2y)+(z^2-4z)-27=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-2)^2-4-27=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=(6)^2$

إذن : (γ) هي كرة مركزها $\Omega(-2;-1;2)$ ، ونصف قطرها $R=6$.

2.أ. دراسة الوضع النسبي لـ(γ) والمستوي (P) الذي معادلته : $x-y+z+2=0$.

• لنعين بعد النقطة $\Omega(-2;-1;2)$ عن المستوي (P) :

$$d\left(\Omega;(P)\right)=\frac{\left|x_\Omega-y_\Omega+2z_\Omega+2\right|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}<6.$$

إذن : (γ) و(P) يتقاطعان.

2.ب. تبيان أن تقاطع (γ)و(P) هي دائرة مركزها $A(-3;0;1)$ ، ونصف قطرها $\sqrt{33}$.

لنعين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة Ω ويعامد المستوي (P)، أي أن (Δ) شعاع توجيهه هو الشعاع الناظمي $\vec{n}(1;-1;1)$ للمستوي (P) وعندئذ :

$$(\Delta):\left.\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=2+\lambda \end{array}\right\} ;\lambda\in\mathbb{R}.$$

نفرض $H(x;y;z)$ ، فيكون : $H(\lambda-2\,;\,-\lambda-1\,;\,\lambda+2)$ ، وعندئذ :

$H\in(P)$ تكافئ : $x_H-y_H+z_H+2=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-2)-(-\lambda-1)+(\lambda+2)+2=0$

$\Leftrightarrow 3\lambda+3=0$ ، ومنه : $\lambda=-1$ ، فيكون :

$\lambda=-1$: $x=-2-1=-3$; $y=-1+1=0$; $z=2-1=1$

إذن مركز الدائرة $A(-3;0;1)$ ونصف قطرها $\sqrt{33}=\sqrt{(6)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{R^2-\ell^2}=r$.