10 التحضير الجيد للبكالوريا 2015
الاختبار رقم 10

التمرين 01 :

1.I حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $u^2=-12$.

2.I استنتج في $\mathbb{C}$ مجموعة حلول المعادلة : $(z+2)^2=-12$.

نرمز بـ z_1 و z_2 لحلي هذه المعادلة.

3.I بين أن z_1 و z_2 هي حلول للمعادلة : $z^2+4z+16=0$.

4.I استنتج حلول المعادلة : $(\overline{z}+i)^2+4(\overline{z}+i)+16=0$.

II المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و M لواحقها على الترتيب : $z_A=-2+2\sqrt{3}i \;\; ; \;\; z_B=-2-2\sqrt{3}i$ و z.

أ.II عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=2$.

ب.II عين (F) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=\left|2-2\sqrt{3}i\right|$.

جـ.II عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=\left|z+2+2\sqrt{3}i\right|$.

د.II عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=-2+2\sqrt{3}i+2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

هـ.II عين (G) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=-2+2\sqrt{3}i+Ke^{\frac{2\pi}{3}i} \;\; ; \;\; K\in\mathbb{R}^+$.

التمرين 02 :

1. f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

أ.1 عين نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب.1 أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ.1 أرسم المنحنى (C_f).

2. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ.2 أرسم المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ ، والنقط M_1 و M_2 من المنحنى (C_f) التي فواصلها على الترتيب : u_1 و u_2 علما بأن M_0 فاصلتها u_0 .

ب.2 برهن أنه من أجل عدد طبيعي n يكون : $u_n\geq e$.

جـ.2 برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

د.2 بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

التمرين 03 :

I. في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته : $ax+by+cz+d=0$ ، والنقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$ و H المسقط العمودي للنقطة M على (P). برهن أن : $d\left(M_0;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cy_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

II. نفرض النقط : $A(4;1;5)\;,\;B(-3;2;0)\;,\;C(1;3;6)\;,\;F(-7;0;4)$.

أ.II بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا (Q) معادلته : $x+2y-z-1=0$.

II.ب. عين بعد النقطة F عن المستوي (Q).

II.جـ. (Δ) مستقيم يشمل النقطة F وعموديا على المستوي (Q). عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

II.د. عين إحداثيات النقطة H مسقط النقطة F على المستوي (Q).

II.هـ. جد نفس النتيجة المحصل عليها في السؤال **II.ب.**

III. لتكن (S) كرة مركزها F، ونصف قطرها 6.

III.أ. تحقق أن النقطة B تنتمي إلى الكرة (S).

III.ب. نرمز بـ (C) إلى تقاطع (S) والمستوي (Q). عين طبيعة (C) وعناصرها المميزة.

التمرين 04 :

1. g دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x+\ln x$.

1.أ. أحسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$.

1.ب. أدرس اتجاه تغير الدالة g.

1.جـ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن : $g(x)\neq 0$.

2. لتكن f دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}$.

2.أ. بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in[1;+\infty[$.

2.ب. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ماذا تستنتج ؟

2.جـ. أدرس اتجاه تغير الدالة f.

2.د. شكل جدول تغيرات f، ماهي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين ؟

2.هـ. جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1، حيث (C_f) يرمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $[1;+\infty[$ بالعبارة $h(x)=f(e^x)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

3.أ. شكل جدول تغيرات الدالة h.

3.ب. جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1.

3.جـ. أرسم كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

حلول تمارين الاختبار 10

الحل المفصل للتمرين 01 :

I.1. تعيين حلول المعادلة $u^2=-12$:

$u^2=-12$ تكافئ: $u^2=12i^2$

$\Leftrightarrow u^2=\left(\mp 2\sqrt{3}i\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(u=-2\sqrt{3}i\right)$ أو $\left(u=2\sqrt{3}i\right)$. إذن للمعادلة حلان هما : $-2\sqrt{3}i$ و $2\sqrt{3}i$.

I.2. استنتاج حلول المعادلة $(z+2)^2=-12$:

$(z+2)^2=-12$ تكافئ: $(z+2)^2=u^2$

$\Leftrightarrow \left(z+2=2\sqrt{3}i\right)$ أو $\left(z+2=-2\sqrt{3}i\right)$

$\Leftrightarrow \left(z=-2+2\sqrt{3}i\right)$ أو $\left(z=-2-2\sqrt{3}i\right)$

إذن للمعادلة حلان هما : $z_1=-2+2\sqrt{3}i$ و $z_2=-2-2\sqrt{3}i$

I.3. تبيان أن z_1 و z_2 هي حلول للمعادلة : $z^2+4z+16=0$

لدينا : $z_1+z_2=-4$ و $z_1.z_2=z_1.\overline{z_1}=(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2=4+12=16$ ، فيكون :

• $z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=0$ ، أي أن: $z^2-(-4)z+16=0$ ، ومنه : $z^2+4z+16=0$.

إذن: z_1 و z_2 حلان للمعادلة : $z^2+4z+16=0$.

I.4. استنتاج حلول المعادلة : $(\overline{z}+i)^2+4(\overline{z}+i)+16=0$

نضع : $z=\overline{z}+i$ فنحصل على المعادلة $z^2+4z+16=0$ ، وعندئذ :

• $\overline{z}+i=z_1$ تكافئ : $\overline{z}+i=-2+2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow \overline{\overline{z}+i}=\overline{-2+2\sqrt{3}i}$

$\Leftrightarrow z-i=-2-2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z=-2+\left(1-2\sqrt{3}\right)i$

• $\overline{z}+i=z_2$ تكافئ : $\overline{z}+i=-2-2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z-i=-2+2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z=-2+\left(1+2\sqrt{3}\right)i$

II. لدينا : $z_A=-2+2\sqrt{3}i$; $z_B=-2-2\sqrt{3}i$ و M لاحقتها z.

II.أ. تعيين المجموعة (E) حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=2$ ....(1)

(1) تكافئ: $\left|z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\right|=2$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=2$

$\Leftrightarrow AM=2$. إذن: (E) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $r=2$.

II.ب. تعيين المجموعة (F) حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=\left|2-2\sqrt{3}i\right|$ ....(2)

(2) تكافئ : $\left|z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\sqrt{4+12}$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=4$

$\Leftrightarrow AM=4$. إذن : (F) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $r=4$.

II.ج. تعيين المجموعة (Γ) حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=\left|z+2+2\sqrt{3}i\right|$ ......(3)

(3) تكافئ : $\left|z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\left|z-\left(-2-2\sqrt{3}i\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=\left|z_M-z_B\right|$

$\Leftrightarrow AM=BM$. إذن : (Γ) هي المستقيم محور القطعة $[AB]$.

II.د. تعيين المجموعة (γ) حيث : $z=-2+2\sqrt{3}i+2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ....(4)

(4) تكافئ : $z-2+2\sqrt{3}i=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=2$ و $\arg(z_M-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})$.

إذن : (γ) هي نصف المستقيم $]AF)$ الـذي مبدؤه A وشعاع توجهه $\vec{w}$ حيث : $(\vec{u};\vec{w})=\frac{2\pi}{3}$ و $\vec{w}\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

II.هـ. تعيين المجموعة (G) حيث : $z=-2+2\sqrt{3}i+Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$ ....(5)

(5) تكافئ : $z-2+2\sqrt{3}i=Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=K$ و $\arg(z_M-z_A)=e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=K$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{2\pi}{3}$. إذن (G) هي نصف مستقيم $]AF)$ حيـث: $F\left(z_A+Ke^{\frac{2\pi}{3}i}\right)$

طريقة أخرى :

$z=-2+2\sqrt{3}i+Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$ تكافئ : $z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{KW}$. $\qquad \vec{w}\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)$

إذن: (G) هي مستقيم مبدؤه A وشعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث : $(\vec{u};\vec{w})=\frac{2\pi}{3}$ ، وتكون معادلته كما يلي :

$z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=Ke^{\frac{2\pi}{3}}$ تكافئ : $x+yi+2-2\sqrt{3}i=K\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x+2+\left(y-2\sqrt{3}\right)i=K\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x-2&=-\frac{1}{2}K\\ y-2\sqrt{3}&=\frac{\sqrt{3}}{2}K\end{aligned}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \sqrt{3}(x-2)&=-\frac{\sqrt{3}}{2}K\\ y-2\sqrt{3}&=\frac{\sqrt{3}}{2}K\end{aligned}\right\}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}(x-2)+y-2\sqrt{3}=0$. إذن (G) معادلته : $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$.

الحل المفصل للتمرين 02 : ....

المعطيات :

1. f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1.أ. تعيين نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \ln x=0^+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{\ln x}{x}}=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$.

1.ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ، فيكون : $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

• إشارة $f(x)$:

$f'(x)\geq 0$ تكافئ : $\ln x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x\geq 1$

$\Leftrightarrow \ln x\geq \ln e$ ، ومنه : $x\geq e$.

$f'(x)\leq 0$ تكافئ : $x\leq e$

• جدول الإشارة :

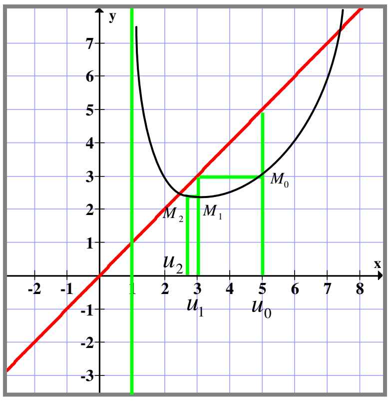
x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

إذن : • $x\in]1;1]$: الدالة f متناقصة. • $x\in[e;+\infty[$: الدالة f متزايدة.

• جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

1.ج. رسم المنحنى (C_f):



2. لدينا المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

2.أ. رسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$:

2.ب. البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq e$

نفرض $P(n)$ القضية " $u_n\geq e$ " ، فيكون :

$n=0$: $u_0=5\geq e$.   إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $u_n\geq e$ ثم نبرهن على أن $P(n+1)$ صحيحة أيضا، أي أن : $u_{n+1}\geq e$.

لدينا :

$u_n\geq e$ يستلزم $f(u_n)\geq f(e)$ ، لأن : الدالة f متزايدة

$\Leftarrow u_{n+1}\geq e$ ، لأن : $f(e)=e$ و $f(u_n)=u_{n+1}$.   إذن : $P(n+1)$ صحيحة أيضا.

النتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq e$.

2.ج. إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\dfrac{u_n}{\ln u_n}-u_n=u_n\cdot\dfrac{1-\ln u_n}{\ln u_n}$ ، لكن :

• $u_n\geq e$ ومنه : $u_n>0$:

• $u_n \geq e$ يستلزم : $\ln u_n \geq 1$ ، ومنه : $\ln u_n \geq 0$

• $u_n \geq e$ يستلزم : $\ln u_n \geq 1$

$\Leftarrow 1-\ln u_n \leq 0$. إذن : $\dfrac{1-\ln u_n}{\ln u_n} \leq 0$، $u_n =$ وعندئذ : المتتالية (u_n) متناقصة.

2.د. تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e فهي متقاربة وتتقارب نحو ℓ حيث : $f(\ell)=\ell$.

$f(\ell)=\ell$ تكافئ : $\ell=\dfrac{\ell}{\ln \ell}$

$\Leftrightarrow \ell(\ln \ell -1)=0$

$\Leftrightarrow \ln \ell -1=0$ ، لأن : $\ell \neq 0$.

$\Leftrightarrow \ln \ell =1$ ، ومنه : $\ell = e$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

الحل المفصل للتمرين 03:

I. المعطيات : المستوي (P) معادلته $ax+by+cz+d=0$. H مسقط النقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$ على (P).

تبيان أن $d\left(M_0;(P)\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cy_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

الرسم

لدينا الشعاع الناظمي للمستوي (P) : $\vec{n}(a;b;c)$ ، فيكون :

• $\left|\vec{n}\,.\,\overrightarrow{M_0H}\right|=\left\|\vec{n}\right\|.M_0H=\sqrt{a^2+b^2+c^2}M_0H$. • $\overrightarrow{M_0H};\vec{n}$ مرتبطان خطيا .

إذن : $\left|\vec{n}\,.\,\overrightarrow{M_0H}\right|=M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ....(1)

• وبالمثل : $H(x_H;y_H;z_H)$ ، فيكون : $\overrightarrow{M_0H}(x_H-x_0\,;\,y_H-y_0\,;\,z_H-z_0)$ ، ويكون :

$$\begin{aligned}\vec{n}\,.\,\overrightarrow{M_0H}&=a(x_H-x_0)+b(y_H-y_0)+c(z_H-z_0)\\&=ax_H+by_H+cz_H+(-ax_0-by_0-cz_0)\\&=-d+(-ax_0-by_0-cz_0)\end{aligned}$$

إذن : $\left|\vec{n}\,.\,\overrightarrow{M_0H}\right|=\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|$ ....(2)

من (1) و (2) نجد : $M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|$ ، ومنه : $M_0H\ \dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

II.أ. تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا (Q) معادلته : $x+2y-z-1=0$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-7;0;-5)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;2;1)$ ، فيكون :

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي K بحيث : $\overrightarrow{AB}=K\overrightarrow{AC}$.

إذن : النقط A ، B و C ليست في استقامية، فهي تعين مستويا.

لكن : $x_A+2y_A-z_A-1=9-9=0$

$x_B+2y_B-z_B-1=4-4=0$

$x_C+2y_C-z_C-1=7-7=0$

إذن معادلة المستوي (ABC) هي معادلة (Q) : $x+2y-z-1=0$.

II.ب. تعيين بعد النقطة F عن المستوي (Q) :

$$.d\left(F;(Q)\right)=\frac{\left|x_F+2y_F-z_F-1\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

II.جـ تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) يشمل F وعموديا على المستوي (Q) :

(Δ) عمودي على (Q) فيكون شعاع توجيهه هو : $\overrightarrow{n}(1;2;-1)$.

نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون :

$M\in(\Delta)$ تكافئ : $\overrightarrow{FM}=\lambda\overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF}=\lambda\overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\lambda\overrightarrow{n}$ ، ومنه (Δ) : $\left.\begin{cases} x=-7+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases}\right\}$; $\lambda\in\mathbb{R}$

II.د. تعيين إحداثيات النقطة H مسقط F على (Q) :

$H\in(\Delta)\cap(Q)$ تكافئ : $H\in(\Delta)$ و $H\in(Q)$

$\Leftrightarrow H(\lambda-7;2\lambda;-\lambda+4)$ و $(H\in Q)$

$\Leftrightarrow z_H+2y_H-2_H-1=0$

$\Leftrightarrow (\lambda-7)+2(2\lambda)-(-\lambda+4)-1=0$ ، ومنه : $\lambda=2$.   إذن : $H(-5;4;2)$.

II.هـ لدينا : $\overrightarrow{FH}(2;4;-2)$ ، فيكون : $FH=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times6}=2\sqrt{6}=d\left(F;(Q)\right)$

III. (S) كرة مركزها $F(-7;0;4)$ ، ونصف قطرها 6.

III.أ. التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى الكرة (S) :

لدينا : $\overrightarrow{FB}(4;2;-4)$ ، فيكون : $FB=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$.   إذن النقطة B تنتمي إلى الكرة (S) .

III.ب. تعيين طبيعة (C) وعناصرها المميزة :

المثلث : FHB قائم في H فيكون : $BH=\sqrt{BF^2-FH^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

إذن : الدائرة (C) مركزها H ونصف قطرها $2\sqrt{3}$ ومحتواة في (Q) .

الحل المفصل للتمرين 04 ....

المعطيات :

1. g الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x+\ln x$

1.أ. $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$.

1.ب. دراسة اتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g'(x)=2+\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x}>0$.   إذن الدالة g متزايدة تماما.

1.جـ. تبيان أنه من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g(x)\neq0$.

لدينا $x\in[1;+\infty[$ يستلزم : $g(x)\in\left[g(1);\lim_{x\to+\infty}g(x)\right[$ ، لأن : الدالة g متزايدة.

$\Leftarrow g(x)\in[2;+\infty[$.   إذن : $g(x)\neq0$.

2. لدينا الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

2.أ. تبيان أن $f(x)=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}$:

لدينا : $\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{2+\dfrac{\ln x}{x}}=\dfrac{6\dfrac{\ln x}{x}}{\dfrac{1}{x}(2x)+\dfrac{\ln x}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}=f(x)$.

2.ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{6(0)}{2+0}=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

الاستنتاج : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$.

2.جـ. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $[1;+\infty[$ ، فيكون :

$$f'(x)=6.\frac{\frac{1}{x}(2x+\ln x)-\left(2+\frac{1}{x}\right)\ln x}{(2x+\ln x)^2}=6.\frac{2-2\ln x}{(2x+\ln x)^2}=12.\frac{1-\ln x}{(2x+\ln x)^2}$$

• $f'(x)\geq 0$ تكافئ : $1-\ln x\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x\leq 1$

$\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e$ ، ومنه : $1\leq x\leq e$

• $f'(x)\leq 0$ تكافئ : $x\geq e$.

إذن :

$x=e$: $f'(e)=0$

$x\in[1;+e[$: الدالة f متزايدة تماما.

$x\in]e;+\infty[$: الدالة f متناقصة تماما.

2.د. جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{6}{2e+1}$	$\searrow$	0

• تعيين قيم K بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين :

من جدول التغيرات نرى أن :

• $x\in]1;e[$: $f(x)\in\left]0;\dfrac{6}{2e+1}\right[$

• الدالة f متزايدة تماما، وK محصور بين 0 و $\dfrac{6}{2e+1}$.

إذن يوجد عدد حقيقي α حيث : $f(\alpha)=k$.

وبالمثل :

• $x\in]e;+\infty[$: $f(x)\in\left]0;\dfrac{6}{2e+1}\right[$.

• الدالة f متناقصة تماما وK محصور بين 0 و $\dfrac{6}{2e+1}$.

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث : $f(\beta)=k$.

النتيجة : المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلين متمايزين α و β حيث : $f(x)=k$.

2.هـ. تعيين معادلة المماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $f(1)=0$ و $f'(1)=\frac{12}{4}=3$.

فتكون معادلة المماس (Δ_1) هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$. إذن : $y=3x-3$.

3. لدينا الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(e^x)$، $D=[1;+\infty[$:

3.أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

$$h(1)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(e^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2e^x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\frac{e^x}{x}+1}=0^+.$$

• الدالة المشتقة :

لدينا : $h(x)=f(e^x)$، فيكون : $h'(x)=e^x.f'(e^x)=e^x.\frac{1-x}{(2e^x+x)^2}<0$.

إذن : الدالة h متناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

• جدول التغيرات :

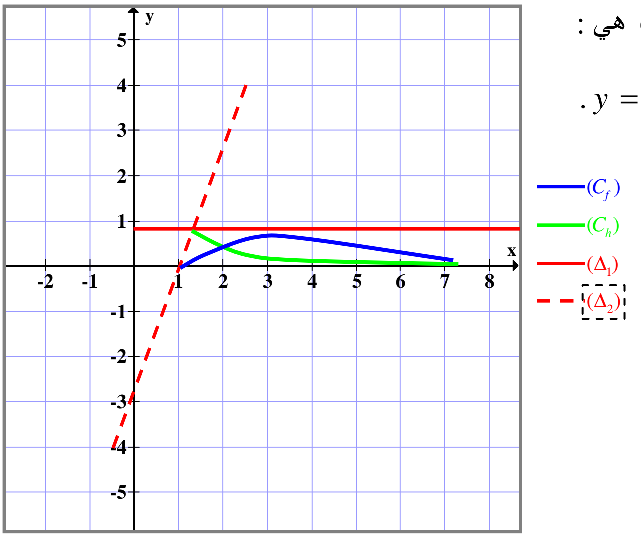
x	1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	$\searrow$	0

3.ب. تعيين معادلة (Δ_2) مماس المنحنى (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $h(1)=\frac{6}{2e+1}$; $f'(1)=0$، فتكون معادلة (Δ_2) هي :

$y=h'(1)(x-1)+h(1)$، ومنه معادلة (Δ_2) : $y=\frac{6}{2e+1}$.

3.جـ. رسم (Δ_1)، (Δ_2)، (C_f)، (C_h) :



حلول تمارين الاختبار 10

الحل المفصل للتمرين 01 : ....

I.1. تعيين حلول المعادلة $u^2=-12$:

$u^2=-12$ تكافئ : $u^2=12i^2$

$\Leftrightarrow u^2=\left(\mp 2\sqrt{3}i\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(u=-2\sqrt{3}i\right)$ أو $\left(u=2\sqrt{3}i\right)$. إذن للمعادلة حلان هما : $-2\sqrt{3}i$ و $2\sqrt{3}i$.

I.2. استنتاج حلول المعادلة $(z+2)^2=-12$:

$(z+2)^2=-12$ تكافئ : $(z+2)^2=u^2$

$\Leftrightarrow \left(z+2=2\sqrt{3}i\right)$ أو $\left(z+2=-2\sqrt{3}i\right)$

$\Leftrightarrow \left(z=-2+2\sqrt{3}i\right)$ أو $\left(z=-2-2\sqrt{3}i\right)$

إذن للمعادلة حلان هما : $z_1=-2+2\sqrt{3}i$ و $z_2=-2-2\sqrt{3}i$

I.3. تبيان أن z_1 و z_2 هي حلول للمعادلة : $z^2+4z+16=0$

لدينا : $z_1+z_2=-4$ و $z_1.z_2=z_1.\overline{z_1}=(-2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2=4+12=16$ ، فيكون :

• $z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=0$ ، أي أن : $z^2-(-4)z+16=0$ ، ومنه : $z^2+4z+16=0$.

إذن : z_1 و z_2 حلان للمعادلة : $z^2+4z+16=0$.

I.4. استنتاج حلول المعادلة : $(\overline{z}+i)^2+4(\overline{z}+i)+16=0$

نضع : $z=\overline{z}+i$ فنحصل على المعادلة $z^2+4z+16=0$ ، وعندئذ :

• $\overline{z}+i=z_1$ تكافئ : $\overline{z}+i=-2+2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow \overline{\overline{z}+i}=\overline{-2+2\sqrt{3}i}$

$\Leftrightarrow z-i=-2-2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z=-2+\left(1-2\sqrt{3}\right)i$

• $\overline{z}+i=z_2$ تكافئ : $\overline{z}+i=-2-2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z-i=-2+2\sqrt{3}i$

$\Leftrightarrow z=-2+\left(1+2\sqrt{3}\right)i$

II. لدينا : $z_A=-2+2\sqrt{3}i$; $z_B=-2-2\sqrt{3}i$ و M لاحقتها z.

II.أ. تعيين المجموعة (E) حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=2$ ....(1)

(1) تكافئ : $\left|z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\right|=2$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=2$

$\Leftrightarrow AM=2$. إذن : (E) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $r=2$.

II.ب. تعيين المجموعة (F) حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=\left|2-2\sqrt{3}i\right|$ ....(2)

(2) تكافئ : $\left|z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\sqrt{4+12}$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=4$

$\Leftrightarrow AM=4$. إذن : (F) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $r=4$.

II.جـ. تعيين المجموعة (Γ) حيث : $\left|z+2-2\sqrt{3}i\right|=\left|z+2+2\sqrt{3}i\right|$ ......(3)

(3) تكافئ : $\left|z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\right|=\left|z-\left(-2-2\sqrt{3}i\right)\right|$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=\left|z_M-z_B\right|$

$\Leftrightarrow AM=BM$. إذن : (Γ) هي المستقيم محور القطعة $[AB]$.

II.د. تعيين المجموعة (γ) حيث : $z=-2+2\sqrt{3}i+2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ....(4)

(4) تكافئ : $z-2+2\sqrt{3}i=2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=2$ و $\arg(z_M-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AM})$.

إذن : (γ) هي نصف المستقيم $[AF)$ الـذي مبدؤه A وشعاع توجهه $\vec{w}$ حيث : $(\vec{u};\vec{w})=\frac{2\pi}{3}$ و $\vec{w}\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

II.هـ. تعيين المجموعة (G) حيث : $z=-2+2\sqrt{3}i+Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$ ....(5)

(5) تكافئ : $z-2+2\sqrt{3}i=Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=K$ و $\arg(z_M-z_A)=e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_A\right|=K$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{2\pi}{3}$.   إذن (G) هي نصف مستقيم $[AF)$ حيـث: $F\left(z_A+Ke^{\frac{2\pi}{3}i}\right)$

طريقة أخرى :

$z=-2+2\sqrt{3}i+Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$ تكافئ : $z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=Ke^{\frac{2\pi}{3}i}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{KW}$. $\vec{w}\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)$

إذن: (G) هي مستقيم مبدؤه A وشعاع توجيهه $\vec{w}$ حيث : $(\vec{u};\vec{w})=\frac{2\pi}{3}$ ، وتكون معادلته كما يلي :

$z-\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=Ke^{\frac{2\pi}{3}}$ تكافئ : $x+yi+2-2\sqrt{3}i=K\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x+2+\left(y-2\sqrt{3}\right)i=K\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=-\frac{1}{2}K \\ y-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}K \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{3}(x-2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}K \\ y-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}K \end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}(x-2)+y-2\sqrt{3}=0$.   إذن (G) معادلته : $y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$.

الحل المفصل للتمرين 02 : ....

المعطيات :

1. f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالشكل : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1.أ. تعيين نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln x=0^+$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}=+\infty$$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$.

1.ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ، فيكون : $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

• إشارة $f(x)$:

$f'(x)\geq 0$ تكافئ : $\ln x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x\geq 1$

$\Leftrightarrow \ln x\geq \ln e$ ، ومنه : $x\geq e$.

$f'(x)\leq 0$ تكافئ : $x\leq e$

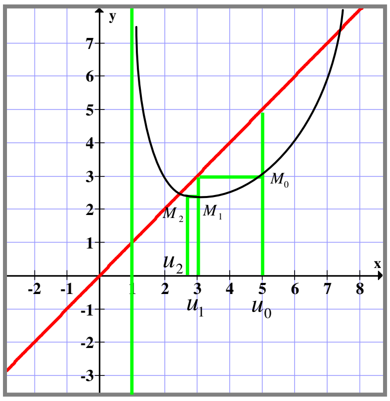
• جدول الإشارة :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

إذن : • $x\in]1;1]$: الدالة f متناقصة. • $x\in[e;+\infty[$: الدالة f متزايدة.

• جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$



1.ج. رسم المنحنى (C_f) :

2. لدينا المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

2.أ. رسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$:

2.ب. البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq e$

نفرض $P(n)$ القضية " $u_n\geq e$ " ، فيكون :

$n=0$: $u_0=5\geq e$. إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $u_n\geq e$ ثم نبرهن على أن $P(n+1)$ صحيحة أيضا، أي أن : $u_{n+1}\geq e$.

لدينا :

$u_n\geq e$ يستلزم $f(u_n)\geq f(e)$ ، لأن : الدالة f متزايدة

$\Leftarrow u_{n+1}\geq e$ ، لأن : $f(e)=e$ و $f(u_n)=u_{n+1}$. إذن : $P(n+1)$ صحيحة أيضا.

النتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq e$.

2.ج. إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\dfrac{u_n}{\ln u_n}-u_n=u_n\cdot\dfrac{1-\ln u_n}{\ln u_n}$ ، لكن :

• $u_n\geq e$ ومنه : $u_n>0$:

• $u_n \geq e$ يستلزم : $\ln u_n \geq 1$ ، ومنه : $\ln u_n \geq 0$

• $u_n \geq e$ يستلزم : $\ln u_n \geq 1$

$\Leftarrow 1-\ln u_n \leq 0$. إذن : $u_n = \dfrac{1-\ln u_n}{\ln u_n} \leq 0$ ، وعندئذ : المتتالية (u_n) متناقصة.

2.د. تبيان أن المتتالية (u_n) متقاربة :

المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد e فهي متقاربة وتتقارب نحو ℓ حيث : $f(\ell)=\ell$.

$f(\ell)=\ell$ تكافئ : $\ell = \dfrac{\ell}{\ln \ell}$

$\Leftrightarrow \ell(\ln \ell - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln \ell - 1 = 0$ ، لأن : $\ell \neq 0$.

$\Leftrightarrow \ln \ell = 1$ ، ومنه : $\ell = e$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$.

الحل المفصل للتمرين 03: ....

I. المعطيات : المستوي (P) معادلته $ax+by+cz+d=0$. H مسقط النقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$ على (P).

تبيان أن $d\left(M_0;(P)\right) = \dfrac{\left|ax_0+by_0+cy_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

الرسم

لدينا الشعاع الناظمي للمستوي (P) : $\vec{n}(a;b;c)$ ، فيكون :

• $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = \left\|\vec{n}\right\|.M_0H = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\,M_0H$. • $\overrightarrow{M_0H};\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

إذن : $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ....(1)

• وبالمثل : $H(x_H;y_H;z_H)$ ، فيكون : $\overrightarrow{M_0H}(x_H-x_0\ ;\ y_H-y_0\ ;\ z_H-z_0)$ ، ويكون :

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} &= a(x_H-x_0)+b(y_H-y_0)+c(z_H-z_0)\\ &= ax_H+by_H+cz_H+(-ax_0-by_0-cz_0)\\ &= -d+(-ax_0-by_0-cz_0)\end{aligned}$$

إذن : $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|$ ....(2)

من (1) و (2) نجد : $M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|$ ، ومنه : $M_0H\ \dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

II.أ. تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستويا (Q) معادلته : $x+2y-z-1=0$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-7;0;-5)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;2;1)$ ، فيكون :

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي K بحيث : $\overrightarrow{AB} = K\overrightarrow{AC}$.

إذن : النقط A ، B و C ليست في استقامية، فهي تعين مستويا.

لكن : $x_A+2y_A-z_A-1 = 9-9 = 0$

$x_B+2y_B-z_B-1 = 4-4 = 0$

$x_C+2y_C-z_C-1 = 7-7 = 0$

إذن معادلة المستوي (ABC) هي معادلة (Q) : $x+2y-z-1=0$.

II.ب. تعيين بعد النقطة F عن المستوي (Q) :

$.d(F;(Q))=\frac{|x_F+2y_F-z_F-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$

II.جـ تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) يشمل F وعموديا على المستوي (Q) :

(Δ) عمودي على (Q) فيكون شعاع توجيهه هو : $\overrightarrow{n}(1;2;-1)$.

نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون :

$M\in(\Delta)$ تكافئ : $\overrightarrow{FM}=\lambda\overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF}=\lambda\overrightarrow{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OF}+\lambda\overrightarrow{n}$ ، ومنه (Δ) : $\left.\begin{array}{l}x=-7+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=4-\lambda\end{array}\right\}$; $\lambda\in\mathbb{R}$

II.د. تعيين إحداثيات النقطة H مسقط F على (Q) :

$H\in(\Delta)\cap(Q)$ تكافئ : $H\in(\Delta)$ و $H\in(Q)$

$\Leftrightarrow H(\lambda-7;2\lambda;-\lambda+4)$ و $(H\in Q)$

$\Leftrightarrow z_H+2y_H-2_H-1=0$

$\Leftrightarrow(\lambda-7)+2(2\lambda)-(-\lambda+4)-1=0$ ، ومنه : $\lambda=2$. إذن : $H(-5;4;2)$.

II.هـ لدينا : $\overrightarrow{FH}(2;4;-2)$ ، فيكون : $FH=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times6}=2\sqrt{6}=d\left(F;(Q)\right)$

III. (S) كرة مركزها $F(-7;0;4)$ ، ونصف قطرها 6.

III.أ. التحقق من أن النقطة B تنتمي إلى الكرة (S) :

لدينا : $\overrightarrow{FB}(4;2;-4)$ ، فيكون : $FB=\sqrt{16+4+16}=\sqrt{36}=6$. إذن النقطة B تنتمي إلى الكرة (S) .

III.ب. تعيين طبيعة (C) وعناصرها المميزة :

المثلث : FHB قائم في H فيكون : $BH=\sqrt{BF^2-FH^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

إذن : الدائرة (C) مركزها H ونصف قطرها $2\sqrt{3}$ ومحتواة في (Q) .

الحل المفصل للتمرين 04 ....

المعطيات :

1. g الدالة المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ : $g(x)=2x+\ln x$

1.أ. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$.

1.ب. دراسة اتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g'(x)=2+\frac{1}{x}=\frac{2x+1}{x}>0$. إذن الدالة g متزايدة تماما.

1.جـ. تبيان أنه من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g(x)\neq0$.

لدينا $x\in[1;+\infty[$ يستلزم : $g(x)\in\left[g(1);\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[$ ، لأن : الدالة g متزايدة.

$\Leftarrow g(x)\in[2;+\infty[$. إذن : $g(x)\neq0$.

2. لدينا الدالة f المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

2.أ. تبيان أن $f(x)=\dfrac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$:

لدينا : $\dfrac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}=\dfrac{6\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}(2x)+\frac{\ln x}{x}}=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}\cdot\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\dfrac{6\ln x}{2x+\ln x}=f(x)$.

2.ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{6(0)}{2+0}=0$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

الاستنتاج : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$.

2.جـ. دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f تقبل الاشتقاق على $[1;+\infty[$ ، فيكون :

$$f'(x)=6.\frac{\frac{1}{x}(2x+\ln x)-\left(2+\frac{1}{x}\right)\ln x}{(2x+\ln x)^2}=6.\frac{2-2\ln x}{(2x+\ln x)^2}=12.\frac{1-\ln x}{(2x+\ln x)^2}$$

• $f'(x)\geq 0$ تكافئ : $1-\ln x\geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x\leq 1$

$\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e$ ، ومنه : $1\leq x\leq e$

• $f'(x)\leq 0$ تكافئ : $x\geq e$.

إذن :

$x=e$: $f'(e)=0$

$x\in[1;+e[$: الدالة f متزايدة تماما.

$x\in]e;+\infty[$: الدالة f متناقصة تماما.

2.د. جدول التغيرات :

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{6}{2e+1}$	$\searrow$	0

• تعيين قيم K بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين :

من جدول التغيرات نرى أن :

• $x\in]1;e[$: $f(x)\in\left]0;\dfrac{6}{2e+1}\right[$

• الدالة f متزايدة تماما، وK محصور بين 0 و $\dfrac{6}{2e+1}$. إذن يوجد عدد حقيقي α حيث : $f(\alpha)=k$.

وبالمثل :

• $x\in]e;+\infty[$: $f(x)\in\left]0;\dfrac{6}{2e+1}\right[$.

• الدالة f متناقصة تماما وK محصور بين 0 و $\dfrac{6}{2e+1}$. إذن يوجد عدد حقيقي وحيد β حيث : $f(\beta)=k$.

النتيجة : المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلين متمايزين α و β حيث : $f(x)=k$.

2.هـ. تعيين معادلة المماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $f(1)=0$ و $f'(1)=\frac{12}{4}=3$.

فتكون معادلة المماس (Δ_1) هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$. إذن : $y=3x-3$.

.3 لدينا الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=f(e^x)$ ، $D=[1;+\infty[$:

.3أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة h :

$$h(1)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(e^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2e^x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\frac{e^x}{x}+1}=0^+ .$$

• الدالة المشتقة :

لدينا : $h(x)=f(e^x)$ ، فيكون : $h'(x)=e^x.f'(e^x)=e^x.\frac{1-x}{(2e^x+x)^2}<0$.

إذن : الدالة h متناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

• جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$ $\searrow$	0

.3ب. تعيين معادلة (Δ_2) مماس المنحنى (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

لدينا : $h(1)=\frac{6}{2e+1}$ ؛ $f'(1)=0$ ، فتكون معادلة (Δ_2) هي :

$y=h'(1)(x-1)+h(1)$ ، ومنه معادلة (Δ_2) : $y=\frac{6}{2e+1}$.

.3جـ. رسم (Δ_1) ، (Δ_2) ، (C_f) ، (C_h) :