02 التحضير الجيد للبكالوريا 2015

الاختبار رقم 02

التمرين 01 :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;I\,;J\,;k)$. نفرض النقطة $A(1;-1;2)$.

1. أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) المار بالنقطة A، وشعاع توجيهه $\vec{u}(-2;1;3)$.

2. ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالجملة : $\left.\begin{matrix} 4x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{matrix}\right\}$

2.أ. أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

2.ب. بين أن (D) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

3. (P) المستوي الذي يمر بالنقطة O وعمودي على (D).

3.أ. أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P).

3.ب. بين أن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P).

التمرين 02 :

I.1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\frac{1}{2}z^2+z+1=0$ ....(1)

I.2. نفرض A و B نقطتين لاحقتاهما : $z_A=-1+i$ و $z_B=-1-i$.

2.أ. بين أن $\frac{z_A}{z_B}=-i$. استنتج طبيعة المثلث OAB، حيث O مبدأ المعلم $(O\,;I\,;J)$ المنسوب إلى المستوي المركب.

II. z عدد مركب حيث : $z=\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$.

II. أ. أحسب طويلة و عمدة العدد المركب z.

II. ب. أكتب z على الشكل المثلثي ثم الأسي

II. جـ. أكتب z على الشكل الجبري ثم استنتج قيمتي $\sin\frac{7\pi}{12}$ و $\cos\frac{7\pi}{12}$.

II. د. بين أن $z^{2004}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{2004}$.

التمرين 03 :

I. حل في المجموعة $\mathbb{R}^2$ الجملة : $\left.\begin{matrix} \ln(x^2-4)+\ln y=1+\ln 3 \\ \ln\frac{1}{y}+\ln\frac{1}{x}=-1 \end{matrix}\right\}$

II. f دالة معرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $f(x)=x\ln(x-3)$.

1. أدرس تغيرات الدالة f.

2. عين $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. فسر بيانيا النتيجة.

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف، و هل (C_f) يقطع محوري الإحداثيات ؟

4. أرسم المنحنى (C_f) في المستوي المتعامد والمتجانس. **ملاحظة** : **I.** مستقل عن **II.**

التمرين 04 :

I. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2-xe^x$.

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $0,8<\alpha<0,9$.

3. عين حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{2x+2}{e^x+2}$، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2.أ. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2.ب. بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

3. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ') و (Δ) حيث هو المستقيم ذو المعادلة : $y=x$.

4.أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

4. ب. بين أن $f(\alpha)=\alpha$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

5. أرسم (Δ) ، (Δ') و (C_f).

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$

III. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<\alpha$.

2. باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود : $u_0;u_1$ و u_2، ثم خمن اتجاه تغير (u_n).

3. برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

حلول تمارين الاختبار 02

الحل المفصل للتمرين 01 : ....

1. التمثيل الوسيطي للمستقيم $(D):(A;\vec{u})$ ، حيث : $A(1;-1;2)$ و $\vec{u}(-2;1;3)$.

نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون :

$M\in(D)$ تكافئ : $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ ، ومنه : $\left.\begin{aligned}x&=1-2\lambda\\y&=-1+\lambda\\z&=2+3\lambda\end{aligned}\right\}$ ؛ $\lambda\in\mathbb{R}$.

2.أ. كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

$(\Delta):\left.\begin{aligned}4x+y&=0\\2x-z&=0\end{aligned}\right\}$ تكافئ : $\left.\begin{aligned}x&=\alpha\\y&=-4\alpha\\z&=2\alpha\end{aligned}\right\}$ ، ومنه : $(\Delta):\left.\begin{aligned}x&=0+\alpha\\y&=0-4\alpha\\z&=0+2\alpha\end{aligned}\right\}$ ، $\alpha\in\mathbb{R}$.

$(\Delta):(O;\vec{v})$ حيث : $O(0;0)$ و $\vec{v}(1;-4;2)$.

2.ب. تبيان أن (D) و (Δ) ليسا من نفس المستوي :

(D) و (Δ) ليسا من نفس المستوي إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا و $(D)\cap(\Delta)=\varnothing$.

$\begin{vmatrix}1&-2\\-4&1\end{vmatrix}=1-8=7\neq0$. إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

لندرس $(D)\cap(\Delta)$:

$M(x;y;z)\in(D)\cap(\Delta)$ تكافئ : يوجد عدد حقيقي وحيد λ، حيث :

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}4(1-2\lambda)+(-1+\lambda)&=0\\2(1-2\lambda)-(2+3\lambda)&=0\end{aligned}\right\}$$

$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}-7\lambda+3&=0\\-7\lambda&=0\end{aligned}\right\}$ ، و منه : $\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{3}{7}\\\lambda&=0\end{aligned}\right\}$. إذن : $(D)\cap(\Delta)=\varnothing$.

النتيجة : (D) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

3.أ. كتابة معادلة المستوي (P) :

المستوي (P) عمودي على المستقيم (D) ويمر بالنقطة O.

معادلة المستوي (P) هي كما يلي :

نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون :

$M\in(P)$ تكافئ : $\vec{u}.\overrightarrow{OM}=0$

$\Leftrightarrow -2x+y+3z=0$. إذن : (P) معادلته $2x-y-3z=0$.

3.ب. تبيان أن المستقيم (Δ) محتوى في (P).

$(\Delta)\subset(P)$ معناه : إذا كانت $M\in(\Delta)$ فإن : $M\in(P)$.

لتكن $M(\alpha;-4\alpha;2\alpha)$ نقطة كيفية من (Δ)، فيكون : $2(\alpha)-(-4\alpha)-3(2\alpha)=6\alpha-6\alpha=0$.

إذن : إحداثيات M تحقق معادلة (P) ، و عندئذ : $(\Delta)\subset(P)$.

الحل المفصل للتمرين 02 : ....

I.1. تعيين حلول المعادلة : $\frac{1}{2}z^2+z+1=0$ ....(1)

(1) تكافئ : $z^2+2z+2=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2+1=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2-i^2=0$ ، ومنه : $S=\{-1-i\ ;\ -1+i\}$.

I.2 تبيان أن $\frac{z_A}{z_B}=-i$ حيث : $z_A=-1+i$ و $z_B=-1-i$.

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{-1+i}{-1-i}=\frac{1}{2}(-1+i)^2=\frac{1}{2}(-2i)$. إذن : $\frac{z_A}{z_B}=-i$.

الاستنتاج : $\frac{z_A}{z_B}=-i$ تكافئ : $\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=-i$، ومنه : $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=-\frac{\pi}{2}$.

$\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=-i$ تكافئ : $\left|\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right|=|-i|$.

$$\Leftrightarrow \frac{|z_A-z_O|}{|z_B-z_O|}=1$$

$\Leftrightarrow \frac{OA}{OB}=1$، ومنه : $OA=OB$.

إذن المثلث OAB قائم في O ومتقايس الضلعين، وفي اتجاه غير مباشر.

II.أ. حساب طويلة وعمدة العدد المركب z حيث : $z=\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$.

لدينا : • $-1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

• $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{\ }}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$، فيكون :

$|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg(z)=\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]=\frac{7\pi}{12}[2\pi]$.

II.ب. كتابة z على الشكل المثلثي ثم الأسي :

• الشكل المثلثي : $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$. • الشكل الأسي : $z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$.

II.جـ. كتابة z على الشكل الجبري :

$$z=\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{4}(-1+i)\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}+1+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

• تعيين قيمتي $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$:

لدينا : $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi 7}{12}+i\sin\frac{\pi 7}{12}\right)=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$، فيكون :

$\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi 7}{12}+i\sin\frac{\pi 7}{12}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i\right)$، أي أن :

$\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$، وعندئذ : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

II. د. تبيان أن $z^{2004}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$:

$$z^{2004}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2004}\left[\cos\left(2004.\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(2004.\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}\left[\cos(167.7\pi)+i\sin(167.7\pi)\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}\left[\cos(167\pi)+i\sin(167\pi)\right]$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}(\cos\pi+i\sin\pi)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}(-1)$$

إذن : $z^{2004}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$.

الحل المفصل للتمرين 03 :

I. تعيين مجموعة حلول الجملة :
$$\left.\begin{array}{l}\ln(x^2-4)+\ln y=1+\ln 3\\ \ln\frac{1}{y}+\ln\frac{1}{x}=-1\end{array}\right\}\text{(I)}.................$$

الجملة تكون ممكنة الحل إذا وفقط إذا كان :

$(x^2-4>0)$ و $(x>0)$ و $(y>0)$ ، ومنه : $(x>2)$ و $(y>0)$ ، وعندئذ :

(I) تكافئ :
$$\left.\begin{array}{l}\ln(x^2-4)+\ln y=\ln e+\ln 3\\ -\ln x-\ln y=-1\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\ln y(x^2-4)=\ln(3e)\\ \ln(xy)=\ln e\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}y(x^2-4)=3e\\ xy=e\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{y(x^2-4)}{xy}=\frac{3e}{e}\\ \frac{x^2-4}{x}=3\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+1)=0$ ، ومنه : $x=4$. -1 : مرفوض.

ويكون : $4y=e$ ، ومنه : $y=\frac{e}{4}$. إذن : $S=\left\{\left(4;\frac{e}{4}\right)\right\}$.

II.1. دراسة تغيرات الدالة f على $]3;+\infty[$ حيث : $f(x)=x\ln(x-3)$.

• النهايات :

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}f(x)=-\infty$ ، لأن : $(x-3)\to 0^+$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

• الدالة f تقبل الاشتقاق على $]3;+\infty[$ ، فيكون : $f'(x)=\ln(x-3)+\frac{x}{x-3}$.

• إشارة $f'(x)$:

نلاحظ أنه لا يمكن حل المعادلة : $f'(x)=0$ ، ولذا نضع : $g(x)=f'(x)$ ، ثم ندرس إشارة $g(x)$.

لدينا :

$g(x)=\ln(x-3)+\frac{x}{x-3}$ ، فيكون : $g'(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{3}{(x-3)^2}$ ، ومنه : $g'(x)=\frac{x-6}{(x-3)^2}$.

• إشارة $g'(x)$:

x	3		6		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

لما x يؤول إلى 3^+ : $g(x)$ تأخذ الشكل ($+\infty-\infty$: ح.ع.ت). لنتخلص منها :

$$g(x)=\ln(x-3)+\frac{x}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}\ln(x-3)+\frac{x}{x-3}=\frac{1}{x-3}\left[(x-3)\ln(x-3)+x\right]$$

لكن : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}(x-3)\ln(x-3)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\frac{1}{x-3}=+\infty$. إذن : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}g(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-3}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$.

• جدول التغيرات :

x	3		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2+\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

• $x\in\left]3;+\infty\right[$: $g(x)>2+\ln 3$.

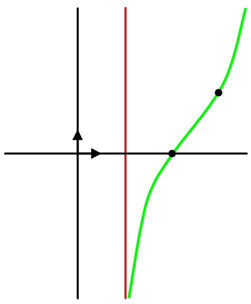
إذن : من أجل كل x من $\left]3;+\infty\right[$: $f'(x)>0$ ، ومنه : الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.II $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-3)=+\infty$.

• التفسير البياني : (C_f) يقبل فرعا مكافئا في اتجاه حامل محور التراتيب.



3.II تبيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

لدينا : $f'(x)=g(x)$ ، فيكون : $f''(x)=g'(x)=\frac{x-6}{(x-2)^2}$.

• إشارة $f''(x)$:

x	3		6	
$f''(x)$		$-$	0	$+$

إذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A(6;6\ln 3)$.

4.II رسم المنحنى (C_f) :

الحل المفصل للتمرين 04 :

I. المعطيات : g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2-xe^{x}$.

1.I دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها :

• مجموعة التعريف : $D=\left]-\infty;+\infty\right[$

• النهايات : ◂ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x})=0$. ◂ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{x})=+\infty$.

• الدالة المشتقة : $g'(x)=-(e^{x}+xe^{x})$ ، ومنه : $g'(x)=(-x-1)e^{x}$.

• إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

إذن :

$x=-1$: $g'(-1)=0$.

◂ $x\in\left]-\infty;-1\right[$: الدالة g متزايدة تماما. ◂ $x\in\left]-1;+\infty\right[$: الدالة g متناقصة تماما.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{2e+1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

2.I تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

على المجال $\left]-1;+\infty\right[$:

• الدالة g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما.

• $x\in\left]-\infty;-1\right[$: $g(x)\in\left]2;\frac{2e+1}{2}\right[$ و $0\notin\left]2;\frac{2e+1}{2}\right[$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حلا في المجال $\left]-\infty;-1\right[$.

وعلى المجال $[-1;+\infty[$:

• الدالة g معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما.

• $x\in[-1;+\infty[$: $g(x)\in\left]-\infty;\frac{2e+1}{2}\right[$ و $0\in\left]\frac{2e+1}{2};+\infty\right[$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $g(\alpha)=0$.

النتيجة : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\mathbb{R}=]-\infty;-1[\cup[-1;+\infty[$.

التحقق من أن : $0,8<\alpha<0,9$

لدينا : $[0,8\ ;\ 0,9]\subset\mathbb{R}$. إذن الدالة g متناقصة تماما.

على المجال $[0,8\ ;\ 0,9]$: $g(0,8)\simeq 0,22$ و $g(0,9)\simeq -0,21$ ، أي أن : $g(0,8).g(0,9)<0$.

إذن : $0,8<\alpha<0,9$.

3.I تعيين إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II. المعطيات : f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$.

1.II تبيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، وتفسير النتيجة بيانيا.

لما x تؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($\frac{+\infty}{+\infty}$: ح.ع.ت). لنتخلص منها :

$$f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}=2.\frac{x+1}{e^x+2}=2.\frac{e^{-x}(x+1)}{e^{-x}(e^x+2)}=2.\frac{xe^{-x}+e^{-x}}{1+2e^{-x}}=2.\frac{-(-xe^{-x})+e^{-x}}{1+2e^{-x}}$$

لكن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x})=\lim\limits_{X\to-\infty}(Xe^{X})=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2(0)=0$.

• التفسير البياني : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$.

2.II.أ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+2)=2$ ، فيكون : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2.II.ب تبيان أن المستقيم (Δ') الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C_f).

لدينا :

$$f(x)-(x+1)=\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+1)=\frac{2(x+1)-(x+1)(e^x+2)}{e^x+2}=\frac{(x+1)\left[2-(e^x+2)\right]}{e^x+2}=\frac{-(x+1)e^x}{e^x+2}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-(xe^x)-e^x}{e^x+2}=0\right]$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

إذن (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ') عند $-\infty$ معادلته : $y=x+1$.

3.II دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ') و (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

لدينا : $f(x)-(x+1)=\frac{-(x+1)e^x}{e^x+2}=\frac{g'(x)}{e^x+2}$ ، فتكون إشارة $f(x)-(x+1)$ من إشارة $g'(x)$ ، وعندئذ :

$x=-1$: $(C_f)\cap(\Delta')=\{A(-1;0)\}$

$x<-1$: (C_f) فوق (Δ')

$x>-1$: (C_f) تحت (Δ')

• دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

$$f(x)-x=\frac{2x+2}{e^x+2}-x=\frac{2x+2-x(e^x+2)}{e^x+2}=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}.$$

إذن : إشارة $f(x)-x$ من إشارة $g(x)$ ، وعندئذ :

$x=\alpha$: (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة $B(\alpha;0)$.

$x<\alpha$: (C_f) فوق (Δ) .

$x>\alpha$: (C_f) تحت (Δ) .

II.4.أ. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ، ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ فيكون :

لدينا : $f'(x)=\dfrac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)^2}=\dfrac{4-2xe^x}{(e^x+2)^2}=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$

إذن : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$.

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، وعندئذ :

• جدول الإشارة :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

إذن :

$x\in\left]-\infty;\alpha\right[$: الدالة f متزايدة.　　$x\in\left]\alpha;+\infty\right[$: الدالة f متناقصة تماما.

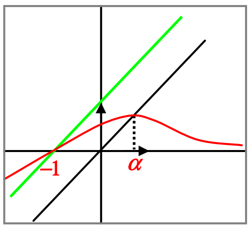
II.4.ب. تبيان أن $f(\alpha)=\alpha$ ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

لدينا : $g(\alpha)=0$ تكافئ : $2-\alpha e^{\alpha}=0$ ، ومنه : $e^{x}=\dfrac{2}{\alpha}$.

فيكون : $f(\alpha)=\alpha\dfrac{2\alpha+2}{e^{\alpha}+2}=\dfrac{2\alpha+2}{\dfrac{2}{\alpha}+2}=\dfrac{\alpha(2\alpha+2)}{2+2\alpha}$ ، ومنه : $f(\alpha)=\alpha$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0



II.5. رسم (Δ) و (C_f) :

II.6. مناقشة عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

المعادلة $f(x)=f(m)$ تعني البحث عن فواصل النقط المشتركة للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=f(m)$ والموازي لحامل محور الفواصل.

بالاعتماد على التمثيل البياني نجد :

$m\in\left]-\infty;-1\right]$: $f(m)\in\left]-\infty;0\right]$ ، عندئذ : المستقيم (Δ_m) يشترك مع (C_f) في نقطة واحدة.

إذن المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا وحيدا.

$m\in\left]-1;\alpha\right[$: $f(m)\in\left]0;\alpha\right[$ ، وعندئذ : (Δ_m) و (C_f) يشتركان في نقطتين متمايزتين.

إذن : المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين.

$m=\alpha$: $f(\alpha)=\alpha$ ، وعندئذ المستقيم (Δ_m) مماس للمنحنى (C_f) .

إذن : المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلا مضاعفا قيمته α.

$m\in\left]\alpha;+\infty\right[$: $f(m)\in\left]0;\alpha\right[$ ، وعندئذ : (Δ_m) و (C_f) يشتركان في نقطتين متمايزتين.

إذن : المعادلة $f(x)=f(m)$ تقبل حلين متمايزين.

III. المعطيات : (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=0$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<\alpha$.

نفرض $P(n)$ الخاصية $0 \leq u_n < \alpha$.

$n = 0$: $u_0 = 0$، أي أن $0 \leq u_0 < \alpha$. إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن : $0 \leq u_n < \alpha$، ثم نبرهن أنها صحيحة، حتى الرتبة $n+1$ كذلك، أي أن $0 \leq u_{n+1} < \alpha$.

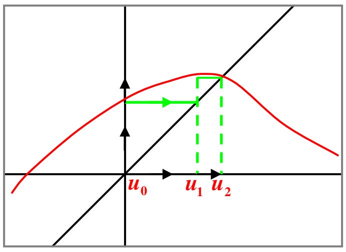
لدينا : الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; \alpha]$، فيكون :

$0 \leq u_n < \alpha$ يستلزم : $f(0) \leq f(u_n) < f(\alpha)$.

$$\Leftarrow \frac{2}{3} \leq u_{n+1} < \alpha$$

$$\Leftarrow 0 \leq \frac{2}{3} \leq u_{n+1} < \alpha$$

$\Leftarrow 0 \leq u_{n+1} < \alpha$. إذن : $P(n+1)$ صحيحة أيضا.



الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $0 \leq u_n < \alpha$.

2. تمثيل الحدود u_0 ; u_1 و u_2 على محور الفواصل، ثم تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n).

• رسم الحدود : u_0 ; u_1 و u_2.

• التخمين :

بالاعتماد على الشكل نلاحظ أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

3. البرهان على أن المتتالية (u_n) متقاربة :

لندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$، لكن : $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{e^x + 2}$. (السؤال **II .3**)

فيكون : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{g(u_n)}{e^{u_n} + 2}$، وعندئذ : إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $g(u_n)$.

لدينا $0 \leq u_n < \alpha$، فيكون : $g(u_n) > 0$، وبالتالي : $u_{n+1} - u_n > 0$. إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

النتيجة : المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة.

• حساب نهاية المتتالية (u_n) :

نفرض نهاية المتتالية (u_n) هي ℓ، فيكون : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

وعندئذ :

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{g(u_n)}{e^{u_n} + 2} \text{ يستلزم : } \ell - \ell = \frac{g(\ell)}{e^{\ell} + 2}$$

$\Leftarrow g(\ell) = 0$، ومنه : $\ell = \alpha$. إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.