الإختبار رقم 03

التمرين 01 :

I. (u_n) المتتالية المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$.

1. أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$، المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$، والمنحنى (d) الممثل للدالة f حيث : $f(x)=\frac{3}{4}x+2$.
2. باستعمال الرسم المحصل عليه، مثل على محور الفواصل وبدون حساب الحدود : $u_0\,;u_1\,;u_2\,;u_3$ و u_4.
3. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.
4. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 8$.
5. تحقق أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
6. هل متقاربة ؟ برر الإجابة.

II. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-8$.

1. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
2. أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
3. أحسب بدلالة n المجموعين :
$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$ و $Q_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$.
4. أحسب المجموع : $S_n'=v_0^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2$.
5. أحسب بدلالة n الجداء : $\pi_n=v_0.v_1.v_2.\ \ldots\ v_n$

التمرين 02 :

a عدد مركب حيث : $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$.

1. عين العدد المركب a^2 ثم اكتبه على الشكل المثلثي والأسي.
2. أحسب a^4 ثم بين أن : $a^4.(\overline{a})^4=1$.
3. نضع : $Z=a^4-1-i\sqrt{3}$.

3.أ. عين طويلة وعمدة Z، ثم اكتب النتيجة بالشكل المثلثي ثم الأسي.

3.ب. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا.

4. بالاعتماد على جواب السؤال الأول :

4.أ. عين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

4.ب. عين القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

التمرين 03 :

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J;K)$.

(S) مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ بحيث : $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$.

1. بين أن (S) هي صطح كرة ذات المركز $F(0;2;-1)$ ونصف القطر $r=\sqrt{3}$.

2.أ. تحقق أن النقطة $A(-1;1;0)$ تنتمي إلى سطح كرة (S) .

2.ب. أكتب معادلة للمستوي (P) المماس لـ (S) عند النقطة A.

3.أ. تحقق أن : $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار بالنقطة $B(1;3;-2)$ و $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي له.

3.ب. بين أن المستوي (Q) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

التمرين 04 :

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{-x}+x-1$.

1. أحسب $g'(x)$ ، ثم بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون : $g(x)\geq 0$.

3. استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون : $e^{-x}+x\geq 1$.

II. نفرض الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}+x}$، وتمثيلها البياني.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.

1. بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$.

2.أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^{\star}$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$.

2.ب. بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. فسر النتيجتين بيانيا.

3.أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{e^{-x}(1+x)}{(e^{-x}+x)^2}$.

3.ب. أدرس إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4.أ. أكتب معالة لمماس المنحنى (C_f) عند النقطة O

4.ب. تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ ، ثم استنتج إشارة $x-f(x)$.

4.جـ. استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

5. أنشئ (Δ) و (C_f) في المعلم $(O;I;J)$. **يعطى :** $\left(\dfrac{1}{1-e}\simeq -0,6\right)$.

استراحة :

عين $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **حيث :** $f(x)=\dfrac{\ln(4x-3)}{x^2+x-2}$.

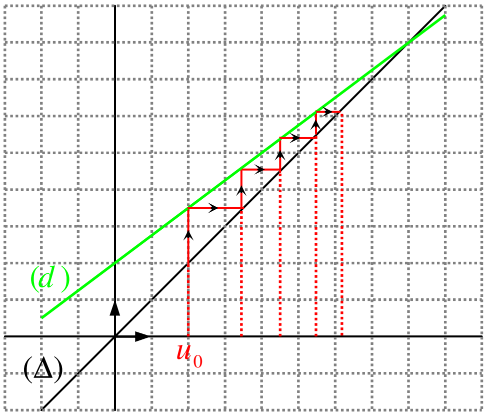
بالتوفيق.

حلول تمارين الاختبار 03

الحل المفصل للتمرين 01 :

المعطيات :

I. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.



1. رسم (Δ) و (d).

$(\Delta) : y = x$

x	0	1
y	0	1

$(d) : y = \frac{3}{4}x + 2$

x	0	4
y	2	5

2. تمثيل الحدود : $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3$ و u_4.

3. التخمين :

يبدو من التمثيل البياني أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، والعدد الحاد هو 8، وبالتالي فهي متقاربة.

4. البرهان بالتراجع على $\mathbb{N}$ أن : $u_n \le 8$.

نفرض $P(n)$ القضية $u_n \le 8$، فيكون :

$n=0$: $u_0 = 2 < 0$، إذن : $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة، أي أن $u_n \le 8$، ثم نبرهن على أنها صحيحة من أجل $n+1$ كذلك، أي أن : $u_{n+1} \le 8$.

لدينا : $u_n \le 8$ يستلزم : $\frac{3}{4}u_n \le 6$

$\Leftarrow \frac{3}{4}u_n + 2 \le 8$، ومنه : $u_{n+1} \le 8$. إذن : $P(n+1)$ صحيحة أيضا.

النتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 8$.

5. التحقق من أن المتتالية (u_n) متزايدة :

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3}{4}u_n + 2\right) - u_n = -\frac{1}{4}u_n + 2 = -\frac{1}{4}u_n + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}(u_n - 8)$.

لكن $u_n - 8 \le 0$ ، فيكون $-\frac{1}{4}(u_n - 8) \ge 0$. إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

6. المتتالية متقاربة لأنها متزايدة ومحدودة من الأعلى، والعدد الحاد هو 8.

II.1. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية حيث : $v_n = u_n - 8$.

لدينا : $v_n = u_n - 8$، فيكون : $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \left(\frac{3}{4}u_n + 2\right) - 8 = \frac{3}{4}u_n - 6 = \frac{3}{4}(v_n + 8) - 6 = \frac{3}{4}v_n + 6 - 6 = \frac{3}{4}v_n$.

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 8 = -6$.

II.2. حساب v_n و u_n بدلالة n، ثم استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا : • $v_n = v_0 q^n$، فيكون : $v_n = -6\left(\frac{3}{4}\right)^n$. • $u_n = v_n + 8$، فيكون : $u_n = -6\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.

الاستنتاج :

لدينا : $0 < q = \frac{3}{4} < 1$ ، فيكون : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

3.II حساب المجموعين :

$.S_n=v_0+v_1+v_2+\dots+v_n=v_0\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=-6\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$ إذن : $.S_n=24\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right]$

$$Q_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n=(v_0+8)+(v_1+8)+(v_2+8)+\dots+(v_n+8)$$
$$=v_0+v_1+v_2+\dots+v_n+8(1+1+1+\dots+1)=S_n+8(n+1)$$

إذن : $.Q_n=24\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-1\right)+8(n+1)$

4.II حساب المجموع S'_n :

لاحظ : $v_n=v_0q^n$.

$$S'_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2=v_0^2+(v_0q)^2+(v_0q^2)^2+\dots+(v_0q^2)^n$$
$$=v_0^2+v_0^2q^2+v_0^2q^4+v_0^2q^6+\dots+v_0^2q^n$$
$$=v_0^2(1+q^2+q^4+q^6+\dots+q^{2n})$$
$$=v_0^2(1+X+X^2+X^3+\dots+X^n \qquad X=q^2$$
$$=v_0^2\cdot\frac{1-X^{n+1}}{1-X}$$
$$=v_0^2\cdot\frac{1-(q^2)^{n+1}}{1-q^2}$$
$$=(-6)^2\cdot\frac{1-\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

إذن : $.S_n^{n}=\dfrac{36.16}{7}\left[1-\left(\dfrac{9}{16}\right)^{n+1}\right]$

5.II حساب الجداء π_n :

لاحظ : $v_n=v_0q^n$.

$$\pi_n=v_0.v_1.v_2.\,\dots\dots\,.v_n$$
$$=v_0(v_0q)(v_0q^2)(v_0q^3).\,\dots\dots\,.(v_0q^3)$$
$$=(v_0.v_0.v_0.\,\dots\dots\,.v_0).(q.q^2.q^3.\,\dots\dots\,.q^n)$$
$$=(v_0^{1+1+1+\dots+1})(q^{1+2+3+\dots+n})$$
$$=v_0^{(n+1)(1)}.q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

إذن : $.\pi_n=(-6)^{n+1}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

الحل المفصل للتمرين 02 :

1. تعيين a^2 وكتابته على الشكل المثلثي ثم الأسي حيث : $.a=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$

$$.a^2=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}i\right)^2=\frac{1}{4}\left[2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)+2i\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\right]=\frac{1}{4}\left(2\sqrt{3}+2i\right)$$

إذن : $.a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

ويكون : $\left|a^2\right|=1$ ، و عمدة a^2 تساوي $.\dfrac{\pi}{6}$ إذن : $a^2=\cos\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}i\sin\dfrac{\pi}{6}$ و $.a^2=e^{\frac{\pi}{6}i}$

2. حساب a^4 ثم تبيان أن : $.a^4.(\overline{a})^4=1$

لدينا : $\left(1+i\sqrt{3}\right)\frac{1}{2}=\left(2+2\sqrt{3}i\right)\frac{1}{4}=\left(\sqrt{3}+i\right)^2\frac{1}{4}=a^4=(a^2)^2$.

$a^4.(\overline{a})^4=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right).\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}(1+3)$. إذن : $a^4.(\overline{a})^4=1$.

3.أ تعيين طويلة وعمدة z حيث : $z=a^4-1-i\sqrt{3}$.

لدينا : $z=a^4-1-i\sqrt{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1-\sqrt{3}i$. $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ويكون : $z=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$، ومنه : $z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; $z=e^{\frac{4\pi}{6}i}$.

3.ب تعيين قيم n حتى يكون z^n تخيليا صرفا :

لدينا : $z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$، فيكون : $z^n=\cos\frac{4n\pi}{3}+i\sin\frac{4n\pi}{3}$.

$z\in\mathbb{R}$ تكافئ : $\text{Im}(z)=0$

$\Leftrightarrow \sin\frac{4n\pi}{3}=0$

$\Leftrightarrow \frac{4n\pi}{3}=K\pi$

$\Leftrightarrow \frac{4n}{3}=K$

$\Leftrightarrow 4n=3K$

$\Leftrightarrow \frac{n}{3}=\frac{K}{4}=\alpha$، ومنه : $n=3\alpha$.

4.أ حساب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$:

لدينا : $a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$، فيكون : $|a^2|=1$، ومنه : $|a|=1$.

$\arg(a^2)=\frac{\pi}{6}+2\pi K$، ومنه : $2\arg(a)=\frac{\pi}{12}+2\pi K$. إذن : $\arg(a)=\frac{\pi}{12}+2\pi K$.

وعندئذ : $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}i$، ومنه :

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\text{Re}(a)}{|a|}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\text{Im}(a)}{|a|}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

$\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=-\cos\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

الحل المفصل للتمرين 03:

المعطيات : (S) مجموعة النقط M حيث : $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$ ....(1)

1. تبيان أن (S) هي سطح كرة مركزها $F(0;2;-1)$ و $r=\sqrt{3}$.

(1) تكافئ : $x^2+(y^2-4y)+(z^2+2z)+2=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2-4+(z+1)^2-1+2=0$

$\Leftrightarrow (x+0)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2$، ومنه :

(S) هي سطح كرة ذات المركز $F(0;2;-1)$ ونصف القطر $r=\sqrt{3}$.

2.أ التحقق من أن $A\in(S)$:

لدينا : $x_A^2+(y_A-2)^2+(z_A+1)^2=(-1)^2+(1-2)^2+(0+1)^2=3$. إذن : $A\in(S)$.

2.ب. كتابة معادلة المستوي (P) المماس لـ (S) عند A :

(P) يمس (S) في A معناه : $\overrightarrow{FA}$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

لكن : $\overrightarrow{FA}(-1;-1;1)$ ، فتكون معادلة المستوي (P) هي : $-x-y+z+d=0$........(2)

$A\in(P)$ تكافئ : $-(-1)-(1)+0+d=0$ ، ومنه : $d=0$.

الخلاصة : المستوي (P) معادلته : $-x-y+z=0$.

3.أ. نفرض $M(x;y;z)$ ، فيكون :

$M\in(Q)$ تكافئ : $\vec{n}\perp\overrightarrow{BM}$.

$\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BM}=0$

$\Leftrightarrow 1(x-1)+1(y-3)+1(z+2)=0$

$\Leftrightarrow x+y+z-1-3+2=0$ ، ومنه : $x+y+z-2=0$.

إذن :

المستوي الذي يشمل النقطة B، وشعاعه الناظمي $\vec{n}(1;1;1)$ معادلته : $x+y+z-2=0$ ، وهي معادلة المستوي (Q).

3.ب. تبيان أن المستوي (Q) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها، ونصف قطرها :

$$d\left(F;(Q)\right)=\frac{|x_F+y_F+z_F-2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|0+2-1-2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

إذن : $d\left(F;(Q)\right)<\sqrt{3}$ ، وعندئذ : (Γ) و (Q) يتقاطعان وفق دائرة.

لتكن النقطة H مسقط F على المستوي (Q) ، فيكون : $(FH)\cap|Q|=\{H\}$.

ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (FH) هو : $\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=-1+\lambda\end{array}\right.$; $\lambda\in\mathbb{R}$.

نفرض $H(x;y;z)$ ، فيكون :

$H\in(FH)$ تكافئ : $H(\lambda;2+\lambda;-1+\lambda)$.

$H\in(Q)$ تكافئ : $\lambda+(\lambda+2)+(-1+\lambda)-2=0$ ، ومنه : $\lambda=\frac{1}{3}$.   إذن : $H\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

ويكون نصف قطر الدائرة : r'.

$r'^2=r^2-d^2\left(F;Q(x)\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.   إذن : $r'=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

الحل المفصل للتمرين 04:

I. المعطيات : الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{-x}+x-1$.

1. حساب $g'(x)$ واتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=-e^{-x}+1$

$g'(x)\geq 0$ تكافئ : $-e^{-x}+1\geq 0$

$\Leftrightarrow e^{-x}\leq 1$

$\Leftrightarrow 1\leq e^{x}$

$\Leftrightarrow \ln 1\leq \ln e^{x}$ ، ومنه : $x\geq 0$.

$g'(x)\leq 0$ تكافئ : $-e^{-x}+1\leq 0$

$\Leftrightarrow e^{-x}\geq 1$

$\Leftrightarrow \ln e^{-x}\geq \ln 1$

$\Leftrightarrow -x\geq 0$ ، ومنه : $x\leq 0$ ، ويكون :

- $x\in]-\infty;0]$: الدالة g متناقصة تماما.
- $x\in[0;+\infty[$: الدالة g متزايدة تماما.

.2 تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون : $g(x)\geq 0$.

$x\leq 0$ تكافئ : $g(x)\geq g(0)$ ، لأن : الدالة g متناقصة.

$\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ ، لأن : $g(0)\geq 0$

$x\geq 0$ تكافئ : $g(x)\geq g(0)$ ، لأن : الدالة g متزايدة.

$\Leftrightarrow g(x)\geq 0$.   **النتيجة** : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)\geq 0$.

.3 استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x}+x\geq 1$

لدينا : $g(x)\geq 0$ تكافئ : $e^{-x}+x-1\geq 0$ ، ومنه : $e^{-x}+x\geq 1$.

II.1. تبيان أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ حيث : $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}+x}$.

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$e^{-x}+x\geq 1$ ، أي أنه من أكل x من $\mathbb{R}$ يكون : $e^{-x}+x\neq 0$ ، وعندئذ : $D_f=\left]-\infty;+\infty\right[$.

II.2.أ. تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^{\star}$: $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$.

لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}+x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x}{e^{-x}+x}=\dfrac{1}{\frac{e^{-x}}{x}+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{xe^{x}}+1}$.

II.2.ب. لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}$ ، فيكون : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)=-\infty$ ، وعندئذ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^{-}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x}=+\infty$ ، فيكون : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{xe^{x}}\right)=1$ ، وعندئذ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

الاستنتاج :
- عند $-\infty$: (C_f) يقبل مقاربا أفقيا (Δ) معادلته : $y=0$ ، و (C_f) تحت (Δ).
- عند $+\infty$: (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته : $y=1$.

II.3.أ. لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}+x}$؛ فيكون :

$f'(x)=\dfrac{1(e^{-x}+x)-(-e^{-x}+1)(x)}{(e^{-x}+x)^2}=\dfrac{e^{-x}+xe^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}$.   إذن : $f'(x)=\dfrac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x}+x)^2}$.

II.3.ب. دراسة إشارة $f'(x)$ حيث $f'(x)=\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+x)^2}(x+1)$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x+1)$ فقط :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0^{-}	$\searrow$	$\dfrac{1}{1-e}$	$\nearrow$	1

II.4.أ. معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة O :

لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ ، فتكون معادلة المماس (T) هي : $y=f'(0)(x-0)+f(x)$ ، ومنه $(T):y=x$.

II.4.ب. التحقق من أن : $x-f(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)+1}$.

$x-f(x)=x-\dfrac{x}{e^{-x}+x}=\dfrac{x(e^{-x}+x)}{e^{-x}+x}-\dfrac{x}{e^{-x}+x}=\dfrac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x}=\dfrac{x(e^{-x}+x-1)}{e^{-x}+x-1+1}$.

إذن : $x - f(x) = \dfrac{x\,g(x)}{g(x)+1}$.

• إشارة $x - f(x)$:

لدينا : $g(x) \ge 0$ ، فيكون : $g(x)+1 \ge 1$ ، وعندئذ : $g(x)+1>0$. إذن إشارة $x - f(x)$ من إشارة $x\,g(x)$.

لنشكل جدول الإشارة :

	$-\infty$	-1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$+$
$x-g(x)$	$-$	0	$+$

II.4.جـ. دراسة الوضع النسبي لـ(C_f) و(Δ) الذي معادلته $y=x$:

$x=0$: (C_f) و(Δ) يتقاطعان في النقطة O.

$x<0$: (Δ) أسفل (C_f) .

$x>0$: (Δ) فوق (C_f) .

II.4.د رسم (Δ) و (C_f) :