06 التحضير الجيد للبكالوريا 2015
الإختبار رقم 06

التمرين 01 :

I.1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+1=0$.

I.2. a عدد مركب طويلته α و عمدته θ.

عبر بدلالة α و θ على طويلتي z_1 و z_2 وعمدتيهما حيث : $z_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a$ ، و $z_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a$.

I.3. ليكن العدد المركب L حيث : $L=\sqrt{6}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$

أ. أحسب L^2 ، ثم اكتبه على الشكل المثلثي والأسي.

ب. استنتج طويلة و عمدة العدد المركب L.

جـ. عين قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

لدينا النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_C=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

أ. بين أن : $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ب. ما طبيعة المثلث ABC .

جـ. عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$.

د. عين لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[BD]$.

هـ. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه D ونسبته $\frac{3}{2}$، وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

هـ.أ. عين الكتابة المركبة للتشابه S.

هـ.ب. بين أن مساحة الرباعي $ABCD$ تساوي $\frac{3\sqrt{3}}{2}cm^2$.

التمرين 02 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$.

1. عين أساس المتتالية وحدها الأول u_0.
2. أحسب الحد العام u_n بدلالة n.
3. ليكن S_n المجموع : $u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$. أحسب S_n بدلالة n، ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
4. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

4.أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

4.ب. نضع $S'_n=v_0+v_1+v_2+\dots+v_n$. عين العدد الطبيعي n حتى يكون $S'^2_n=2^{30}$.

التمرين 03 :

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $f(x)=\frac{2e^x}{e^x-1}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في ا لمستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I;J)$.

I.1. أدرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة.

2.I بين أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

3.I أحسب $f(\ln 2)$; $f(\ln 3)$ ، $f(2\ln 3)$.

4.I أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2$.

5.I أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمات المقاربة.

II. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^{\star}$ بـ: $g(x)=\dfrac{2e^x}{\left|e^x-1\right|}$.

1.II أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2.II أرسم المنحنى (Cg) وذلك ضمن معلم جديد.

3.II ناقش بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة : $(\lambda-3)\left|e^x-1\right|=2e^x$ .....(1)

4.II لتكن الدالة h حيث : $h(y)=x$. $x>2$ و $y>0$.

أ.4.II بين أن $y=\ln\dfrac{x}{x-2}$.

ب.4.II جد العلاقة البيانية للمنحنيين (C_f) و (C_h).

جـ.4.II عين المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_h)، ثم ارسمه.

التمرين 04 :

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=\left]0;+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$.

1.I عين $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2.I أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3.I بين أنه من أجل كل x من D : $f(x)\geq 0$.

II. لتكن الدالة g المعرفة على $D=\left]0;+\infty\right[$ بـ : $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\ln x}{x}$.

1.II بين أنه من أجل كل x من D : $g'(x)=\dfrac{1+f(x)}{x^2}$.

2.II بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=0$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_g) ؟

3.II عين نقطة تقاطع المنحنى (C_g) والمستقيم المقارب المائل.

4.II بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

5.II (Δ) مماس للمنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة x_0.

عين x_0 أذا علمت أن معامل توجيه المماس هو $\dfrac{1}{2}$. أكتب معادلة المماس (Δ).

6.II أثبت أن المنحنى (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

7.II أرسم المنحنى (C_g) و المستقيم (Δ).

8.II ناقش بيانيا وذلك حسب قيم الوسيط λ وجود وعدد حلول المعادلة : $\dfrac{\ln x}{x}=\lambda$.

حلول تمارين الاختبار 06

الحل المفصل للتمرين 01 :

تذكر :
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$x^2\mp x+\left(x\mp\frac{\bigstar}{x}\right)^2-\left(\frac{\bigstar}{x}\right)^2$

1.I. تعيين مجموعة حلول المعادلة : $z^3+1=0$ ......(1)

(1) تكافئ : $(z+1)(z^2-z+1)=0$

$$\Leftrightarrow (z+1)\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)\left[\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\right]=0$$ ، ومنه : $S=\left\{-1;\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

2.I. التعبير بدلالة α و θ عن طويلتي وعمدتي z_1 و z_2:

$$z_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a=\left[1;-\frac{\pi}{3}\right][\alpha;\theta]=\left[\alpha;-\frac{\pi}{3}+\theta\right]$$

$$z_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)a=\left[1;\frac{\pi}{3}\right][\alpha;\theta]=\left[\alpha;\frac{\pi}{3}+\theta\right]$$

إذن : • $|z_1|=\alpha$ و $\arg(z_1)=-\frac{\pi}{3}+\theta(2\pi)$. • $|z_2|=\alpha$ و $\arg(z_2)=\frac{\pi}{3}+\theta(2\pi)$.

3.I أ. حساب L^2 ثم كتابته على الشكل المثلثي والأسي حيث : $L^2=\sqrt{6}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$.

لدينا : $L^2=\left[\sqrt{6}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i\right]^2$

$=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2-2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i=-4\sqrt{12}-8i$ إذن : $L^2=-8\sqrt{3}-8i$.

• كتابة L^2 على الشكل المثلثي ثم الأسي :

$$L^2=-8\sqrt{3}-8i=-8\left(\sqrt{3}+i\right)$$
$$=-16.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=16\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=16\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=16\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

إذن : $L^2=16\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ و $L^2=e^{\frac{7\pi}{6}i}$.

للتوضيح
$\frac{19\pi}{12}=\pi+\frac{7\pi}{12}=\pi+\frac{12\pi-5\pi}{12}$
$=\pi+\pi-\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{12}$

3.I ب. استنتاج طويلة وعمدة العدد المركب L :

نضع : $L=[r;\theta]$ ، فيكون :

$L^2=\left[16;\frac{7\pi}{6}\right]$ تكافئ : $\left[r^2;2\theta'\right]=\left[16;\frac{7\pi}{6}\right]$

$\Leftrightarrow (r^2=16)$ و $\theta'=\frac{7\pi}{12}+\pi K$. $K\in\{0;1\}$. إذن : $L_0=\left[4;\frac{7\pi}{12}\right]$ و $L_1=\left[4;\frac{19\pi}{12}\right]$.

لكن : $\mathrm{Re}(L)=\sqrt{6}-\sqrt{2}>0$ و $\mathrm{Im}(L)=-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)<0$. إذن : $L=L_1=\left[4;\frac{19\pi}{12}\right]$.

3.I جـ. تعيين قيمتي $\cos\frac{19\pi}{12}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}$:

لدينا : $4\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2}-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$ ، أي أن :

$\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$ ، ومنه : $\cos\frac{19\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{19\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

II. لدينا النقط A ، B و C حيث : $z_A=-1$; $z_B=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_C=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

II.أ. تبيان أن : $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا :
$$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{i\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{i}$$
إذن : $\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

II.ب. طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=\frac{|z_C-z_A|}{|z_C-z_B|}=\frac{\left|\sqrt{3}+i\right|}{|2i|}=\frac{2}{2}=1$ ، $\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right|=\frac{AC}{BC}=1$ ، أي أن : $CA=CB$.

$\arg\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}=(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})=\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

النتيجة : المثلث ABC متقايس الأضلاع، وفي اتجاه غير مباشر.

II.جـ. تعيين لاحقة النقطة D :

$t_{\overrightarrow{BA}}(C)=D$ تكافئ : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$.

$\Leftrightarrow z_D=z_C+z_A-z_B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}$.

II.د. تعيين لاحقة النقطة I :

I منتصف $[BD]$ تكافئ : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$$\Leftrightarrow z_I-z_B=\frac{1}{2}(z_D-z_B)$$

$\Leftrightarrow z_I=\frac{1}{2}z_D+\frac{1}{2}z_B=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}i\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$.

II.هـ.أ. تعيين الكتابة المركبة للتشابه S :

نفرض $M(z)$ و $M'(z')$ ، فيكون :

$S_{\left(D;\frac{\pi}{3};\frac{3}{2}\right)}(M)=(h)$ تكافئ : $z_{M'}-z_D=\frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}(z_M-z_D)$ ، ومنه :

$$z'=\frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}z_M+\left(1-\frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}i}\right)z_D=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]$$
$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)z+\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)$$

إذن : $z'=\left(\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)z+2+i\sqrt{3}$.

II.هـ.ب. المثلث ABC متقايس الأضلاع، فيكون : $BC=|z_C-z_B|=\left|i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$.

ويكون طول ارتفاع المثلث ABC هو : $h=BC\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$.

وعندئذ مساحة المثلث ABC هي : $S=\frac{1}{2}BC.h=\frac{1}{2}.\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

وتكون مساحة الرباعي $ABCD$ هي : $S'=2S=2.\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

الحل المفصل للتمرين 02 : ....

المعطيات :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : $\ln u_1+\ln u_5=-12$ و $\ln u_2-\ln u_4=4$.

1. تعيين الأساس والحد الأول u_0:

لدينا : $u_n=u_0q^n$، فيكون : $u_1=u_0q$; $u_2=u_0q^2$; $u_4=u_0q^4$ و $u_5=u_0q^5$، فيكون :

$(\ln u_1+\ln u_5=-12)$ تكافئ : $\ln(u_1.u_5)=-12$

$\Leftrightarrow u_1.u_5=e^{-12}$

$\Leftrightarrow (u_0q)(u_0q^5)=e^{-12}$

$\Leftrightarrow u_0^2q^6=e^{-12}$ ....(1)

$(\ln u_2-\ln u_4=4)$ تكافئ : $\ln\frac{u_2}{u_4}=4$

$\Leftrightarrow \frac{u_2}{u_4}=e^4$

$\Leftrightarrow \frac{u_0q^2}{u_0q^4}=e^4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{q^2}=e^4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{q}=e^2$، ومنه : $q=e^{-2}$، وعندئذ :

(1) تكافئ : $u_0^2.q^5=e^{-12}$

$\Leftrightarrow u_0^2.(e^{-2})^6=e^{-12}$

$\Leftrightarrow u_0^2.e^{-12}=e^{-12}$

$\Leftrightarrow u_0^2=1$، ومنه : $u_0=1$

2. حساب الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا : $u_n=u_0q^n$، فيكون : $u_n=(e^{-2})^n$. إذن : $u_n=e^{-2n}$.

3. حساب المجموع S_n:

$S_n=u_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1-(e^{-2})^{n+1}}{1-e^{-2}}$، ومنه : $S_n=\frac{e^2}{e^2-1}\left[1-(e^{-2})^{n+1}\right]$.

لدينا : $q=\frac{1}{e^2}$، أي أن : $0<q<1$، فيكون : $\lim_{n\to+\infty}(e^{-2})^{n+1}=0$. إذن : $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{e^2}{e^2-1}$.

4. لدينا (V_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$.

4.أ. تبيان أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها :

لدينا : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}=\ln(u_n.u_{n+1})=\ln(e^{-2n}.e^{-2(n+1)})=\ln e^{-4n-2}$. إذن : $v_n=-4n-2$.

ويكون : $v_{n+1}-v_n=-4(n+1)-2-(-4n-2)=-4$.

إذن : (V_n) متتالية حسابية أساسها : $r=-4$، وحدها الأول : $v_0=-2$.

4.ب. تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون : $S_n'^2=2^{30}$.

لدينا : $S_n' = v_0+v_1+v_2+\dots+v_n = \frac{n+1}{2}(v_0+v_n) = \frac{n+1}{2}(-2-4n-2) = -2(n+1)^2$

إذن :

$S_n'^2 = 2^{30}$ تكافئ : $4(n+1)^4 = 2^{30}$

$\Leftrightarrow (n+1)^4 = 2^{28}$

$\Leftrightarrow 4\ln(n+1) = 28\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(n+1) = 7\ln 2$

$\Leftrightarrow \ln(n+1) = \ln 2^7$

$\Leftrightarrow n+1 = 2^7$

$\Leftrightarrow n+1 = 128$. إذن : $n = 127$.

الحل المفصل للتمرين 03 :

I. لدينا الدالة f المعرفة على $D = \mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

1.I دراسة تغيرات الدالة f:

• مجموعة التعريف : $D =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

• النهايات :

◂ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ ، لأن : $\lim_{x\to-\infty}(2e^x) = 0^+$ و $\lim_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1$.

◂ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-e^{-x}} = 2(1) = 2$.

• $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$ ، لأن : $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}(e^x - 1) = 0^-$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} 2e^x = 2$.

• $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(e^x - 1) = 0^+$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^x = 2$.

• الدالة f تقبل الاشتقاق على D، فيكون :

$f'(x) = 2.\frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x)}{(e^x-1)^2} = 2\frac{e^x(e^x - 1 - e^x)}{(e^x-1)^2}$. إذن : $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}(-2)$.

وعندئذ : من أجل كل x من D : $f'(x) < 0$ ، وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على D.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	0^- ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 2

$x = 0$: معادلة مقارب شاقولي.

$y = 0$: معادلة مقارب أفقي.

$y = 2$: معادلة مقارب أفقي.

2.I تبيان أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f):

تكون النقطة Ω مركز تناظر إذا كان : $f(x) = f(2.0 - x) = 2(1)$ ، أي أن : $f(x) + f(-x) = 2$.

$$f(x) + f(-x) = \frac{2e^x}{e^x-1} + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1} = 2\left[\frac{e^x}{e^x-1} + \frac{e^x(e^{-x})}{e^x(e^{-x}-1)}\right].$$

$$= 2\left[\frac{e^x}{e^x-1} + \frac{1}{1-e^x}\right] = 2\left[\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{e^x-1}\right] = 2\left(\frac{e^x-1}{e^x-1}\right) = 2$$

إذن : النقطة Ω مركز تناظر للمنحنى (C_f).

3.I حساب $f(\ln 2)$; $f(\ln 3)$ ، $f(2\ln 3)$:

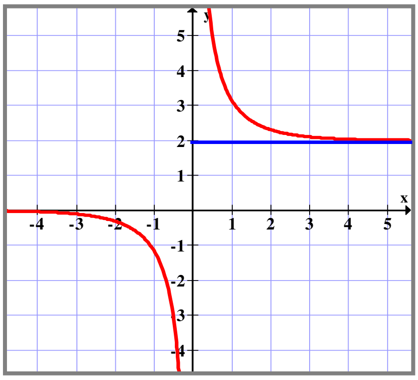
• $f(\ln 2)=\frac{2e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}=\frac{2(2)}{2-1}=4$. • $f(\ln 3)=\frac{2(3)}{3-1}=3$. • $f(2\ln 3)=f(\ln 9)=\frac{2(9)}{9-1}=\frac{9}{4}$.

4.I دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2$:

$f(x)-2=\frac{2e^x}{e^x-1}-2=\frac{2}{e^x-1}>0$.

إذن : (C_f) فوق (Δ).

5.I رسم المنحنى (C_f) والمستقيمات المقاربة :



(C_f)

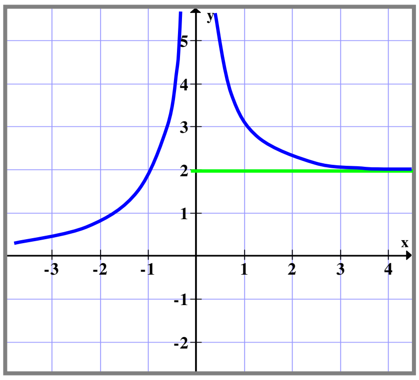
II. لدينا : $g(x)=\frac{2e^x}{\left|e^x-1\right|}$

1.II كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

$x>0$: $\left|e^x-1\right|=e^x-1$ وعندئذ : $g(x)=f(x)$

$x<0$: $\left|e^x-1\right|=-(e^x-1)$ وعندئذ : $g(x)=-f(x)$

2.II رسم المنحنى (C_g) في معلم جديد:



(C_f)

$x>0$: $g(x)=f(x)$ ، أي أن : (C_g) ينطبق على (C_f).

$x<0$: $g(x)=-f(x)$ ، أي أن : (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

3.II تعيين بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة : $(\lambda-3)\left|e^x-1\right|=2e^x$ .....(1)

(1) تكافئ : $\lambda-3=\frac{2e^x}{\left|e^x-1\right|}$ ، لأن : $x\neq 0$.

$\Leftrightarrow g(x)=\lambda-3$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y=\frac{2e^x}{\left|e^x-1\right|} & :(C_g) \\ y=\lambda-3 & :(d) \end{array}\right.$$

$\lambda=3$: (1) تكافئ : $2e^x=0$ مستحيل، إذن : $S=\varnothing$

$\lambda\neq 3$: المعادلة (1) هي معادلة فواصل النقط المشتركة بين (C_g) و (d).

إذن حسب التمثيل البياني نكتب :

$(\lambda-3)\in]-\infty;0[$ تكافئ : $\lambda\in]-\infty;3[$ ، المعادلة مستحيل الحل.

$(\lambda-3)\in]0;2[$ تكافئ : $\lambda\in]3;5[$ ، المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا.

$(\lambda-3)\in]2;+\infty[$ تكافئ : $\lambda\in]5;+\infty[$ ، المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

4.II لدينا الدالة h حيث : $h(y)=x$. $x>2$ و $y>0$.

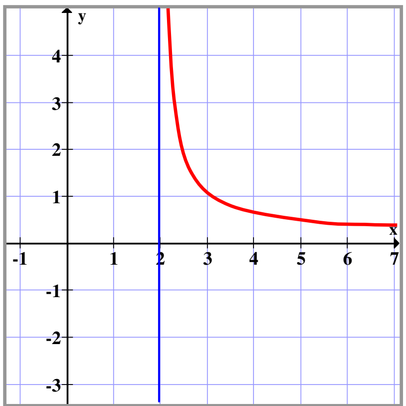
4.II.أ تبيان أن $y=\ln\frac{x}{x-2}$:

$h(x)=x$ تكافئ : $\frac{2e^y}{e^y-1}=x$

$\Leftrightarrow x(e^y-1)=2e^y$

$\Leftrightarrow (x-2)e^y=x$

$\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{x-2}$ ، لأن : $x>2$. إذن : $y=\ln\frac{x}{x-2}$.



II.4.ب تعيين العلاقة بين (C_f) و (C_h) :

لدينا $M(x\,;y)$ تكافئ : $M'(x\,;y)\in(C_h)$. إذن : (C_f) و (C_h) متناظران بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

• $y=2$: معادلة مقارب للمنحنى (C_λ) ، فيكون : $x=2$ مقارب للمنحنى (C_h) .

• $x=0$: معادلة مقارب للمنحنى (C_f) ، فيكون : $y=0$ مقارب للمنحنى (C_h) .

الحل المفصل للتمرين 04 :

I. لدينا الدالة f المعرفة على $D=]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$.

I.1. تعيين $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

• $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x=-\infty$.

• لما x يؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($\infty-\infty+$: ح. ع. ت). لنتخلص منها :

لدينا : $f(x)=x\left(\frac{1}{2}x-\frac{\ln x}{x}\right)$ ، فيكون : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

I.2. دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها :

الدالة f تقبل الاشتقاق على D ، فيكون : $f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(x^2-1)$.

• إشارة $f'(x)$:

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$ 0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

إذن :

$x\in]0;1]$: $f'(x)\le 0$ ، و عندئذ : الدالة f متناقصة تماما.

$x\in[1;+\infty[$: $f'(x)\ge 0$ ، و عندئذ : الدالة f متزايدة تماما.

• جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

I.3. تبيان أنه من أجل كل x من D : $f(x)\ge 0$

$x\ge 1$ يستلزم : $f(x)\ge f(1)$ ، لأن الدالة f متزايدة.

$\Leftarrow f(x)\ge\frac{1}{2}$ ، ومنه : $f(x)\ge 0$.

$0<x\le 1$ يستلزم : $f(1)\le f(x)<\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

$\Leftarrow \frac{1}{2}\le f(x)<+\infty$ ، ومنه : $f(x)\ge 0$. إذن : من أجل كل x من D : $f(x)\ge 0$.

II. لدينا الدالة g المعرفة على $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{\ln x}{x}$

II.1. تبيان أنه من أجل كل x من D : $g'(x)=\frac{1+f(x)}{x^2}$

لدينا : $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}.\ln x$ ، فيكون :

$$g'(x)=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln x\;\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}(1-\ln x)=\frac{1}{2}.\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{2}x^2+1-\ln x\right]=\frac{1}{x^2}\left[1+\frac{1}{2}x^2-\ln x\right]$$

إذن : $g'(x)=\frac{1+f(x)}{x^2}$.

2.II تبيان أن $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=0$:

لدينا : $g(x)-\frac{1}{2}x=\frac{\ln x}{x}$ ، فيكون : $\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{1}{2}x\right)=0$.

الاستنتاج : (C_g) يقبل مقاربا مائلا عند $+\infty$ معادلته : $y=\frac{1}{2}x$.

3.II تعيين نقطة تقاطع (C_g) و (d) :

لدينا :

$g(x)=\frac{1}{2}x$ تكافئ : $\frac{1}{2}x+\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=0$

$\Leftrightarrow \ln x=0$

$\Leftrightarrow \ln x=\ln 1$ ، ومنه : $x=1$.

إذن : $(C_g)\cap(d)=\left\{A\left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$.

4.II تبيان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها

لدينا : $g'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{f(x)}{x^2}$ ، فيكون :

$$g''(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{f'(x).(x^2)-(2x)f(x)}{x^4}=-\frac{2}{x^3}+\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$$

$$=-\frac{2}{x^3}+\frac{x\left(\frac{x^2-1}{x}\right)-2\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)}{x^3}=-\frac{2}{x^3}+\frac{x^2-1-x^2+2\ln x}{x^3}=-\frac{2}{x^3}+\frac{-1+2\ln x}{x^3}$$

إذن : $g''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$ ، ويكون :

$g''(x)\geq 0$ تكافئ : $2\ln x-3\geq 0$ ، لأن : $x^3>0$

$\Leftrightarrow \ln x\geq\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x\geq e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow x\geq e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow x\geq\sqrt{e^3}$ ، ومنه : $x\geq e\sqrt{e}$.

وبالمثل :

$g''(x)\leq 0$ تكافئ : $0<x\leq e\sqrt{e}$.

إذن : (C_g) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e\sqrt{e}$.

5.II تعيين x_0 حيث معامل توجيه المماس للمنحنى (C_g) يساوي $\frac{1}{2}$:

$g'(x_0)=\frac{1}{2}$ تكافئ : $\frac{1+f(x)}{x_0^2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1+f(x)=\frac{1}{2}x_0^2$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x_0^2-\ln x_0=\frac{1}{2}x_0^2$

$\Leftrightarrow 1-\ln x_0=0$

$\Leftrightarrow \ln x_0=1$

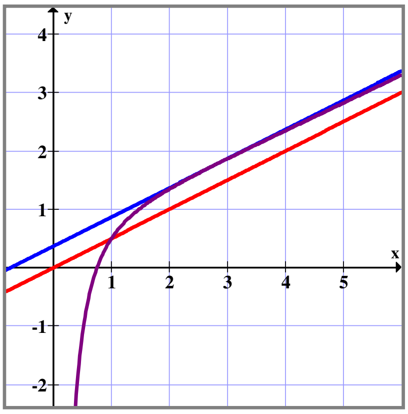
$\Leftrightarrow \ln x=\ln 2$ ، ومنه : $x_0=e$.

• كتابة معادلة المماس (Δ) :

لدينا : $x_0 = e$ ، $y_0 = g(x_0) = \frac{1}{2}e + \frac{1}{e}$ ، $g'(e) = \frac{1}{2}$ ، فتكون معادلة (Δ) هي :

$y = \frac{1}{2}(x - e) + \frac{1}{2}e + \frac{1}{e}$ ، ومنه : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{e}$.

6.II إثبات أن (C_g) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:



على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ نرى أن الدالة g تحقق ما يلي :

- معرفة ومستمرة.
- $g\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -1,25$ ، $g(1) = \frac{1}{2}$ ، أي أن : $g(1).g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.
- الدالة متزايدة تماما.

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث :

$g(x) = 0$ و $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

7.II رسم المنحنى (C_g) والمستقيم (Δ) :

8.II المناقشة البيانية وذلك حسب قيم الوسيط λ وجود وعدد حلول المعادلة :

لدينا :

$\frac{\ln x}{x} = \lambda$ تكافئ : $\frac{1}{2}x + \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}x + \lambda$

$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + \lambda$

إذن :

المعادلة المفروضة هي معادلة فواصل النقط المشتركة بين المنحنى (C_g) والمستقيم (Δ_λ) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x + \lambda$.

لدينا :

- $(\Delta) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{e}$. • $(d) : y = \frac{1}{2}x$. • $(\Delta_\lambda) : y = \frac{1}{2}x + \lambda$ ، فيكون :

$\lambda > \frac{1}{e}$: المعادلة مستحيلة الحل.

$\lambda = \frac{1}{e}$: المعادلة تقبل حلا واحدا.

$\lambda \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$: المعادلة تقبل حلين متمايزين.

$\lambda < 0$: المعادلة تقبل حلا واحدا.