08 التحضير الجيد للبكالوريا 2015
الإختبار رقم 08

التمرين 01 : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.

• اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي :

1. المعادلة $3z+\overline{z}=4+2i$ تقبل حلا وحيدا قيمته : **أ.** $1+2i$. **ب.** $1-i$. **جـ.** $1+i$.

2. لدينا : $M(z)$; $A(1-i)$ و $B(-2+i)$.

مجموعة النقط M حيث $|z-1+i|=|z+2-i|$ هي :

أ. المستقيم (AB). **ب.** دائرة قطرها $[AB]$. **جـ.** مستقيم عمودي على $[AB]$.

3. z عدد مركب $|z-i|$ تساوي : **أ.** $|z|+1$. **ب.** $|i\overline{z}-1|$. **جـ.** $|z|-i$.

4. z عدد مركب غير معدوم، عمدته θ، عمدة $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ هي :

أ. $\dfrac{\pi}{6}+\theta$. **ب.** $\dfrac{5\pi}{6}-\theta$. **جـ.** $\dfrac{5\pi}{6}+\theta$.

5. n عدد طبيعي. العدد المركب $(-1-i)^n$ يكون حقيقيا إذا وفقط إذا كان :

أ. $n=4\alpha$. **ب.** $n=4\alpha+3$. **جـ.** $n=3$.

6. مجموعة حلول المعادلة $\dfrac{z+9}{z+2}=-z$ هي :

أ. $\{-3-3\sqrt{3}i\ ;\ -3+3\sqrt{3}i\}$. **ب.** $\left\{-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\ ;\ -\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$. **جـ.** $\{-3\sqrt{3}i\ ;\ 3\sqrt{3}i\}$.

7. لدينا $M(z)$; $\omega(-1+3i)$ مجموعة النقط M حيث : $|z+1-3i|=|\sqrt{3}-i|$ لها معادلة :

أ. $x+y-3=0$. **ب.** $z=-1+3i+2e^{\theta i}$. **جـ.** $(x-1)^2+(y+3)^2=\sqrt{2}$.

8. إذا كان $z_1=-2e^{-\frac{\pi}{3}i}$، فإن الشكل الأسي لـ z_1 هو :

أ. $2e^{-\frac{x}{3}i}$. **ب.** $2e^{\frac{\pi}{3}i}$. **جـ.** $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

9. إذا كان $z=-2+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ فإن عمدة z هي :

أ. $\dfrac{\pi}{6}$. **ب.** $\dfrac{7\pi}{6}$. **جـ.** $-\dfrac{\pi}{6}$.

10. عمدة $(1+2i)$ تساوي : **أ.** $\arg(1-2i)$. **ب.** $\arg(-2i)$. **جـ.** $-\arg(1+2i)$.

11. مجموعة النقط M لاحقتها z حيث : $\arg(\overline{z}+1-2i)=\dfrac{\pi}{2}+2\pi K$.

أ. نصف مستقيم $(OA]$ حيث : A لاحقتها $-1-2i$. **ب.** نصف مستقيم $(AF]$ حيث : F لاحقتها $z_A+e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

جـ. نصف مستقيم $(AF]$ حيث : A لاحقتها $e^{\frac{\pi}{2}i}$.

12. A و B نقطتان لاحقتاهما $z_A=2-3i$ و $z_B=5+i$.

لاحقة النقطة C بحيث يكون المثلث ABC متقايس الضلعين مع $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=-\dfrac{\pi}{2}$ هي :

أ. $z_C=1+2i$. **ب.** $z_C=1+4i$. **جـ.** $z_C=1+3i$.

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. نفرض المستوي (P) يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ ، وشعاعه الناظمي $\vec{n}(-2;1;5)$ والمستوي (π) الذي معادلته :
$x+2y-7=0$.

1.أ. برهن أن (P) و (π) متعامدان.

1.ب. بين أن تقاطع (P) و (π) هو مستقيم (Δ) يمر بالنقطة $C(-1;4;-1)$، وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$.

1.جـ. أحسب بعد النقطة $A(5;-2;-1)$ عن المستوي (P) وبعد النقطة A عن المستوي (π).

1.د. عين بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

2.أ. من أجل كل عدد حقيقي t ، لدينا النقطة M_t ذات الإحداثيات : $(1+2t\ ;\ 3-t\ ;\ t)$.

عين بدلالة t الطول AM_t ولنرمز له بـ $Q(t)$.

نعرف الدالة Q من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

2.ب. أدرس اتجاه تغير الدالة على $\mathbb{R}$ ثم عين نهايتها الحدية الصغرى.

2.جـ. أعط التفسير الهندسي للقيمة الحدية الصغرى.

التمرين 03 :

I. (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 وأساسها r.

I.1. عين u_2 و r علما بأن : $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=9 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=35 \end{cases}$.

I.2. عين عبارة u_n بدلالة n.

I.3. أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

II. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ : $v_n=e^{7-2n}$.

II.1. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

II.2. بين أن : $v_0+v_1+\cdots+v_n=-e^9.\dfrac{e^{-2(n+1)}-1}{e^2-1}$.

- عين $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0+v_1+\cdots+v_n)$.

II.3. أحسب الجداء $\pi_n=v_0\times v_1\times\cdots\times v_n$.

- عين $\lim\limits_{n\to+\infty}\pi_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين 04 :

I. f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{3}{x}-x+4\ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

I.أ. عين نهاية الدالة f عند حدود المجال.

I.ب. بين أنه من أجل كل x من مجموعة التعريف يكون : $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x-3}{x^2}$.

I.جـ. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

I.د. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 9 و 10.

I.هـ. أدرس إشارة $f(x)$.

I.و. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

I.ز. أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند نقطة الانعطاف.

I.ح. برهن أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما : $\frac{1}{4}$.

I.ط. أبين أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=+\infty$.

- فسر النتيجة بيانيا.

I.ي. أرسم المنحنى (C_f) .

I.ك. بين أن الدالة $x \mapsto -x + x\ln x$ هي دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \ln x$.

I.ل. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y=0$; $x=1$ و $x=3$.

II. نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\frac{3-x^2}{|x|}+2\ln x^2$.

II.أ. بين أن الدالة g زوجية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_g) ؟

II.ب. أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

II. جـ. أرسم المنحنى (C_g) في المعلم السابق، مع شرح طريقة الرسم.

حلول تمارين الاختبار 08

الحل المفصل للتمرين 01 : ....

الإجابة الصحيحة هي : **جـ.** $1+i$.

التبرير : نضع $z=x+yi$ ، فيكون :

$3(x+yi)+x-yi=4+2i$ تكافئ : $(3x+x)+(3y-y)i=4+2i$

$\Leftrightarrow 4x+2y=4+2i$

$\Leftrightarrow (4x=4)$ و $(2y=2)$ ، ومنه : $(x;y)=(1;1)$ إذن : $z=1+i$.

2. الإجابة الصحيحة هي : **جـ.** مستقيم عمودي على $[AB]$.

التبرير : $|z-1+i|=|z+2-i|$ تكافئ : $|z-(1-i)|=|z-(-2+i)|$

$\Leftrightarrow |z_M-z_A|=|z_M-z_B|$

$\Leftrightarrow AM=BM$. $A(1-i)$, $B(-2+i)$.

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (Δ) محور القطعة $[AB]$.

3. الإجابة الصحيحة هي : **ب.** $|i\bar{z}-1|$.

التبرير : $|i\bar{z}-1|=\left|i\left(\bar{z}-\frac{1}{i}\right)\right|=|\bar{z}+i|=\left|\overline{\bar{z}+i}\right|=|z-i|$.

4. الإجابة الصحيحة هي : **جـ.** $\frac{5\pi}{6}+\theta$.

التبرير : $-3+i\sqrt{3}=-\left(\sqrt{3}\right)^2+i\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}+i\right)=2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

$\frac{-3+i\sqrt{3}}{\bar{z}}=2\sqrt{3}.\frac{-e^{\frac{5\pi}{6}i}}{e^{-\theta i}}=2\sqrt{3}.e^{\left(\frac{5\pi}{6}-(-\theta)\right)i}=2\sqrt{3}.e^{\left(\frac{5\pi}{6}+\theta\right)i}$. إذن : $\arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right)=\frac{5\pi}{6}+\theta$.

5. الإجابة الصحيحة هي : **أ.** $n=4\alpha$.

التبرير :

لدينا : $-1-i=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

فيكون : $(-1-i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(\frac{5\pi n}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi n}{4}\right)\right]$ ، وعندئذ :

$(-1-i)^n\in\mathbb{R}$ تكافئ : $\operatorname{Im}(-1-i)^n=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5\pi n}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{5\pi n}{4}=K\pi \quad , \quad K\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{5n}{4}=K$

$\Leftrightarrow \frac{n}{4}=\frac{K}{5}=\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{n}{4}=\alpha$ ، ومنه : $n=4\alpha \quad , \quad \alpha\in\mathbb{N}$

6. الإجابة الصحيحة هي : **ب.** $\left\{-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

التبرير : $\frac{z+9}{z+2}=-z$ ....(1)

المعادلة تكون ممكنة الحل إذا كان : $z\neq -2$ ، وعندئذ :

(1) تكافئ : $z+9=-z(z+2)$

$\Leftrightarrow z^2+3z+9=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+9=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(z=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$ أو $\left(z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$

تذكر :

$z^2\mp\star z=(z\mp\star z)^2-\left(\frac{\star}{2}\right)^2$

7. الإجابة الصحيحة هي : ب. $z=-1+3i+2e^{\theta i}$.

التبرير : $\left|z+1-3i\right|=\left|\sqrt{3}-i\right|$ تكافئ : $\left|z-(-1+3i)\right|=\left|\sqrt{3}-i\right|$

$\Leftrightarrow \left|z_M-z_\omega\right|=\sqrt{3+1}$

$\Leftrightarrow \omega M=2$

$\Leftrightarrow M$ تنتمي إلى الدائرة مركزها ω ونصف قطرها Ω .

$\Leftrightarrow z_M=z_\omega+2e^{\theta i}$

$\Leftrightarrow z=-1+3i+2e^{\theta i}$ ، $\theta\in\mathbb{R}$.

8. الإجابة الصحيحة هي : جـ. $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

التبرير : $z_1=-2e^{-\frac{\pi}{3}i}=2e^{\pi i}\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}=2e^{\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)i}$.

9. الإجابة الصحيحة هي : ب. $\frac{7\pi}{6}$.

التبرير : $z=-2+e^{-\frac{\pi}{3}i}=-2+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-2+\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$=\sqrt{3}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

إذن : $\arg(z)=\frac{7\pi}{6}$.

10. الإجابة الصحيحة هي : جـ. $-\arg(1+2i)$.

التبرير :

لدينا $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ ، أي أن : $\arg(z)=-\arg(\bar{z})$ ، فيكون :

$\arg(1+2i)=-\arg(\overline{1-2i})=-\arg(1+2i)$.

11. الإجابة الصحيحة هي : ب. نصف مستقيم $\left(AF\right]$ حيث : F لاحقتها $z_A + e^{\frac{\pi}{2}i}$.

التبرير : $\arg(\overline{z}+1-2i) = \frac{\pi}{2}$ تكافئ : $-\arg(\overline{\overline{z}+1-2i}) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\arg(z+1+2i) = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \arg\left(z-(-1-2i)\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow (\vec{u};\overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{2}$. $A(-1-2i)$.

$\Leftrightarrow \left]AF\right)$ حيـث: $F\left(z_A + e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)$.

إذن مجموعة النقط M هي نصف المستقيم $\left]AF\right)$ حيـث: $F\left(z_A + e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)$.

12. الإجابة الصحيحة هي : ب. $z_C = 1+4i$.

التبرير : $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$ تكافئ : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -i$

$\Leftrightarrow \frac{z_C - (5+i)}{-3-4i} = -i$

$\Leftrightarrow \frac{z-(5+i)}{3+4i} = i$

$\Leftrightarrow z = 5+i+i(3+4i) = 1+4i$

الحل المفصل للتمرين 02 : ....

المعطيات :

المستوي (P) يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ وشعاعه الناظمي : $\vec{n}(-2;1;5)$ ، والمستوي (π) معادلته : $x+2y-7=0$.

1.أ. تبيان أن (P) و (π) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}'(1;2;0)$ الشعاع الناظمي للمستوي (π) ، فيكون :

$\vec{n}.\vec{n}' = (-2)(1)+(1)(2)+5(0) = -2+2 = 0$.

إذن : $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ متعامدان، وعندئذ : (P) و (π) متعامدان.

1.ب. تبيان أن (P) و (π) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يمر بالنقطة $C(-1;4;-1)$، وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$.

معادلة المستوي (P) تكتب بالشكل : $-2x+y+5z+d=0$.

لكن : $B\in(P)$ تكافئ : $-2(1)+(-2)+5(1)+d=0$ ، ومنه : $d=-1$.

وعندئذ معادلة المستوي (P) هي : $-2x+y+5z-1=0$.

لدينا :

$(P)\cap(\pi) = (\Delta)$ تكافئ : $\left.\begin{array}{r} -2x+y+5z-1=0 \\ x+2y-7=0 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y=2x-5z+1 \\ x+2(2x-5z+1)-7=0 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y=2x-5z+1 \\ x=2z+1 \end{array}\right\}$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2z+1 \\ y=-z+3 \end{array}\right\}$ ، ومنه (Δ) : $\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$ ، $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\lambda=-1=(x\,;y\,;z)=(-1;4;-1)$. إذن : $C(-1;0;1)$.

(Δ) شعاع توجيهه : $\vec{v}(2;-1;1)$.

1.جـ. حساب بعد النقطة $A(5;-2;-1)$ عن المستوي (P) و (π) :

$$d\left(A\,;(P)\right)=\frac{\left|-2x_A+y_A+5z_A-1\right|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{\left|-10-2-5-1\right|}{\sqrt{30}}=\frac{3}{5}\sqrt{30}.$$

$$d\left(A\,;(\pi)\right)=\frac{\left|x_A+2y_A-7\right|}{\sqrt{1+4+0}}=\frac{\left|5-4-7\right|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

1.د. تعيين بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) :

$$d^2\left(A\,;(\Delta)\right)=d^2\left(A\,;(P)\right)+d^2\left(A\,;(\pi)\right)=\left(\frac{3}{5}\sqrt{30}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2=18.$$

إذن : $d\left(A\,;(1)\right)=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

2.أ. حساب الطول AM_λ حيث : $M_\lambda(1+2\lambda;3-\lambda;\lambda)$:

لدينا : $\overrightarrow{AM_\lambda}(2\lambda-4;5-\lambda;\lambda+1)$، فيكون :

$AM_\lambda{}^2=(2\lambda-4)^2+(5-\lambda)^2+(\lambda+1)^2=6\lambda^2-24\lambda+42$. إذن : $AM_\lambda=\sqrt{6\lambda^2-24\lambda+42}=Q(\lambda)$.

2.ب. دراسة اتجاه تغير الدالة Q حيث : $Q:\lambda\mapsto\sqrt{6\lambda^2-24\lambda+42}$

(الدالة Q معرفة) تكافئ : $6\lambda^2-24\lambda+42\geq 0$.

من أجل كل λ من $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta=(12)^2-6(40)<0$. إذن : $D=\mathbb{R}$.

الدالة Q تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، فيكون : $Q'(\lambda)=\dfrac{6(\lambda-2)}{\sqrt{6\lambda^2-24\lambda+42}}$.

إذن : $\lambda\in\left]-\infty;2\right[$: الدالة Q متناقصة تماما.

$\lambda\in\left]2;+\infty\right[$: الدالة Q متزايدة تماما.

وعندئذ الدالة Q تقبل عند 2 قيمة حدية صغرى قيمتها : $Q'(\lambda)=\sqrt{6(4)-24(2)+42}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

2.جـ. التفسير الهندسي للقيمة الحدية الصغرى :

$M_\lambda\in(\Delta)$ معناه : بعد النقطة A عن (Δ) هي أقصر مسافة.

الحل المفصل للتمرين 03 :

المعطيات :

I. (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 حيث : $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=9 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=35 \end{cases}$

1.I. تعيين u_2 والأساس r :

لنستعين بالمخطط $\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \alpha-r & \alpha & \alpha+r \end{array}$ فيكون :

$u_1+u_2+u_3=9$ تكافئ : $(\alpha-r)+\alpha+(\alpha+r)=9$، ومنه : $\alpha=u_2=3$، وعندئذ :

$u_1^2+u_2^2+u_3^2=35$ تكافئ : $(3-r)^2+(3)^2+(3+r)^2=35$

$\Leftrightarrow 2r^2+27=35$

$\Leftrightarrow r^2-4=0$

$\Leftrightarrow (r-2)(r+2)=0$، ومنه : $r=-2$، لأن : (u_n) متناقصة.

2.I تعيين عبارة u_n بدلالة n :

لدينا : $u_n = u_0 + nr$ ، فيكون : $u_2 = u_0 + 2r$ ، ومنه : $u_0 = u_2 - 2r = 3 - 2(-2) = 7$.

إذن : $u_n = u_0 + nr$ ، ومنه : $u_n = -2n + 7$.

3.I حساب المجموع S_n :

$$S_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(7 - 2n + 7) = (n+1)(-n+7).$$

1.II تبيان أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها حيث : $v_n = e^{7-2n}$.

لنحسب v_{n+1} بدلالة v_n : $v_{n+1} = e^{7-2(n+1)} = e^{7-2n-2} = e^{7-2n} . e^{-2} = \frac{1}{e^2}.v_n$.

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{e^2}$ ، وحدها الأول $v_0 = e^7$.

2.II تبيان أن : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = e^7 . \frac{1-(e^{-2})^{n+1}}{1-e^{-2}} = -e^9 . \frac{e^{-2(n+1)} - 1}{e^2 - 1}$$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} e^{-2(n+1)} = 0$ ، فيكون : $\lim_{x \to +\infty} (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = \frac{-e^9}{e^2 - 1}$.

3.II حساب الجداء π_n :

$$\pi_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n = v_0 \times (v_0 r)(v_0 r^2)(v_0 r^3).....(v_0 r^n)$$
$$= (v_0 \times v_0 \times \dots \times v_n).(r \times r^2 \times r^3 \times \dots\dots \times r^n)$$
$$= v_0^{n+1} \times r^{1+2+3+\dots+n} = (e^7)^{n+1} \times (e^{-2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$= e^{7(n+1)} \; e^{-n(n+1)} = e^{-n^2+6n+7}$$

ويكون : $\lim_{x \to +\infty} \pi_n = 0$.

الحل المفصل للتمرين 04 :

المعطيات :

f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{3}{x} - x + 4\ln x$.

أ.I تعيين نهاية الدالة f عند حدود المجال

• لما x يؤول إلى 0^+ : $f(x)$ تأخذ الشكل ($+\infty - \infty$: ح. ع. ت). لنتخلص منها :

لدينا : $f(x) = \frac{3}{x} - x + 4\ln x = -x + \frac{1}{x}(3 + 4x\ln x)$ ،

فيكون : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$ ، لأن : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} (x\ln x) = 0^-$; $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

• لما x يؤول إلى $+\infty$: $f(x)$ تأخذ الشكل ($-\infty + \infty$: ح. ع. ت). لنتخلص منها :

لدينا : $f(x) = \frac{3}{x} - x + 4\ln x = \frac{3}{x} - x\left(1 - 4.\frac{\ln x}{x}\right)$ ، فيكون : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$.

ب.I تبيان أنه من أجل كل x من D، يكون : $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على D، فيكون : $f'(x) = 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 1 + 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2}$.

إذن : $f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2}$.

I.جـ. استنتاج اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها.

• إشارة $f'(x)$:

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$f'(x)=0$ تكافئ: $-x^2+4x-3=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0$ ، ومنه : $(x=4)$ أو $(x=1)$.

إذن : • $x\in\left]0;1\right[\cup\left]4;+\infty\right[$: الدالة f متناقصة تماما.

• $x\in\left]1;4\right[$: الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	$-\infty$

I.د. تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 9 و 10 :

على المجال $\left[9;10\right]$:

• الدالة f مستمرة .

• $f(9)\simeq 0{,}12$; $f(10)\simeq -0{,}49$،أي أن : $f(9).f(10)<0$.

• الدالة f متناقصة تماما.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $f(\alpha)=0$ و $9>\alpha>10$.

وهذا يعني بيان أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $A(\alpha;0)$.

I.هـ. دراسة إشارة $f(x)$:

من جدول التغيرات نجد إشارة $f(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

I. و. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها :

لدينا : $f'(x)=-\dfrac{x^2+4x+3}{x^2}$ ، فيكون :

$$f''(x)=-\frac{(2x-4)(x^2)-2x(x^2-4x+3)}{x^4}=-\frac{2x^2-4x-2x^2+8x-6}{x^3}=-\frac{4x-6}{x^3}$$

وعندئذ :

$f''(x)\geq 0$ تكافئ: $-(4x-6)\geq 0$ ، لأن : $x^3>0$.

$\Leftrightarrow 2x-3\leq 0$ ، ومنه : $0<x<\dfrac{3}{2}$

$f''(x)\leq 0$ تكافئ: $2x-3\geq 0$ ، ومنه : $x\geq\dfrac{3}{2}$.

إذن : (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $\dfrac{3}{2}$ وترتيبها : $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+4\ln\dfrac{3}{2}$.

I.ز. كتابة معدلة المماس عند نقطة الانعطاف :

لدينا : $f'(x)=\dfrac{-x^2+4x-3}{x^2}=-1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}$ ، فيكون :

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=-1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}=-1+\dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}$ ، وعندئذ : $y=f'\left(\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{1}{2}+4\ln\dfrac{3}{2}$.

إذن : معادلة المماس هي : $y=\dfrac{1}{3}x+4\ln\dfrac{3}{2}$

ح.I البرهان على وجود مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما : $\frac{1}{4}$

لدينا : $f'(x)=\frac{1}{4}$ و $x\in D$ ، فيكون :

$f'(x)=\frac{1}{4}$ تكافئ : $-\frac{x^2-4x+3}{x^2}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 5x^2-16x+12=0$

$\Leftrightarrow (5x-6)(x-2)=0$ ، ومنه : $(x=2)$ أو $\left(x=\frac{6}{5}\right)$.

بما أن المعادلة $f'(x)=\frac{1}{4}$ تقبل حلين في المجموعة D، وبالتالي المنحنى (C_f) يقبل مماسين في نقطتين الأولى فاصلتها 2، والثانية فاصلتها $\frac{6}{5}$.

ط.I تبيان أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=+\infty$:

لدينا : $f(x)=\frac{3}{x}-x+4\ln x$ ، فيكون : $f(x)+x=\frac{3}{x}+4\ln x$ ،

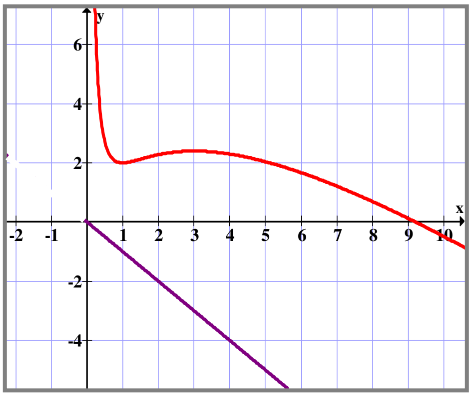
وعندئذ : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=+\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0$.

• التفسير البياني :

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=+\infty$ تكافئ : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]=+\infty$.

إذن : بجوار $+\infty$ يوجد فرع قطع مكافئ في اتجاه منحنى المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=-x$.

ي.I رسم المنحنى (C_f) :



ك.I تبيان أن الدالة $x\mapsto -x+x\ln x$ هي دالة أصلية للدالة : $x\mapsto \ln x$.

نضع : $G(x)=-x+x\ln x$ ، فيكون :

$G'(x)=-1+\ln x+\frac{1}{x}(x)=-1+\ln x+1=\ln x$. إذن : G هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto -x+x\ln x$.

ل.I حساب المساحة :

حسب المعطيات نكتب : $S=\int_1^3 (f(x)-0)dx=\int_1^3\left(\frac{3}{x}-x+4\ln x\right)dx$

$=\left[3\ln x-\frac{1}{2}x^2+4(-x+x\ln x\right]_1^3$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2-4x+3\ln x+4x\ln x\right]_1^3=H(3)-H(1)$ إذن : $S=(-12+15\ln 3).u.S$.

II. لدينا الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\frac{3-x^2}{|x|}+2\ln x^2$

أ.II تبيان أن الدالة g زوجية :

مجموعة تعريف الدالة g هي : $D_g=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، وهذا يعني أن العناصر متناظرة على D_g .

$g(-x)=\frac{3-(-x)^2}{|-x|}+2\ln(-x)^2=\frac{3-x^2}{|x|}+2\ln x^2=g(x)$. إذن : الدالة g زوجية .

الاستنتاج : يقبل محور التراتيب كمحور تناظر له.

II.ب. كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

$x>0$: $|x|=x$ ، وعندئذ : $g(x)=\dfrac{3-x^2}{x}+2\ln x^2=\dfrac{3}{x}-\dfrac{x^2}{x}+2\ln x^2=\dfrac{3}{x}-x+\ln x^4=f(x)$.

$x>0$: $|x|=-x$ ، وعندئذ : $g(x)=\dfrac{3}{-x}-\dfrac{x^2}{-x}+2\ln(-x)^2=-\dfrac{3}{x}+x+\ln(-x)^4=f(-x)$.

إذن :

- $x>0$: $g(x)=f(x)$
- $x<0$: $g(x)=f(-x)$

II. جـ. رسم المنحنى (C_g) في المعلم السابق، مع الشرح :

- $x>0$: $g(x)=f(x)$ ، أي أن (C_g) ينطبق على (C_f) .
- $x<0$: $g(x)=f(-x)$ ، أي أن (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.