التمرين الأول: (05 نقاط)

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.نعتبر النقطة $A(1;1;2)$ والمستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية: $x+y-z+2=0$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$.

1) بيّن أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) وأنّ النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P) .

2) عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المحدد بالنقطة A وبالمستقيم (D).

3) بيّن أنّ النقطة $A'\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$ هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى المستوي (P) .

4) ليكن (Q') المستوي المعين بالنقطة A' وبالمستقيم (D).تحقق أنّ معادلة ديكارتية لــ (Q') هي: $x+5y-3z+12=0$.

5) ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (D) و φ الزاوية الحادة للمستويين (Q) و (Q') .بين أنّ الزاوية الحادة للمستقيمين (HA) و (HA') هي نفسها φ ثم أحسب $\cos\varphi$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهولين x و y التالية: $\alpha x-6y=\alpha^2+3$ حيث α عدد طبيعي غير معدوم. وليكن $pgcd(\alpha;6)=d$.

1) جد القيم الممكنة لــ d .

2) عين قيم α التي من أجلها يكون العدد الصحيح x مضاعفا للعدد 2 .

3) أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: $5x-6y=28$ .... (1)

ب- جد كل الثنائيات $(x;y)$ التي يكون من أجلها x و y أوليان فيما بينهما.

ج- من بين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) عين تلك التي تحقق y قاسما لــ x .

التمرين الثالث (05 نقاط)

حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z^2-6z+34\right)\left(\bar{z}+1+3i\right)=0$.

1) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب $z_A=3+5i$ ، $z_B=3-5i$ ، $z_C=7+3i$ ، $z_D=-1+3i$.

أ-أكتب العددين المركبين L و L' على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي حيث : $L=\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ و $L'=\dfrac{z_B-z_D}{z_A-z_D}$.

ب ـ ما نوع التحويل النقطي S_1 الذي مركزه C و يحول النقطة A إلى النقطة B (يطلب تعيين عناصره المميزة). ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج -. ما نوع التحويل النقطي S_2 الذي مركزه D و يحول النقطة A إلى النقطة B (يطلب تعيين عناصره المميزة). ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

د- تعرف على طبيعة التحويل $S_2 \circ S_1$ ثم عين عناصره المميزة .

د - بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

3) M نقطة من المستوي لاحقتها z : عين مجموعة النقط M من المستوي في كل من الحالتين:

أ) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{AB}\right)=0$ ب) $|z-z_A|^2+|z-z_B|^2+|z-z_C|^2+|z-z_D|^2=100$

التمرين الرابع: (6 نقاط)

I – نعتبر الدّالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x-2+ln\sqrt{x}$.

1) أ– أحسب نهايتي g عند 0 وعند $+\infty$.

ب– أدرس اتجاه تغير الدّالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ– بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثم جد حصرا له .

ب– عين إشارة $g(x)$ ثم أستنتج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

II – f الدّالة المعرفة كما يلي: $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2 ln x \quad ;x>0 \end{cases}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدّالة f عند 0 ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) بيّن أنّ: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ ثم أعط حصرا لـــ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

4) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدّالة f .

5) أحسب $f(1)$ ، $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ثم أرسم المنحنى (C_f) .

هدية : بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي a ومن أجل كل عدد حقيقي b موجب تماما: $ab\le blnb+e^{a-1}$

إنّ العالم يفسح الطريق للمرء الذي يعرف إلى أين ذاهب .

حل التمرين الأول :

1) لنبيّن أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) وأنّ النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P) .

- المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) لأنّ: من أجل كل عدد حقيقي t لدينا:

$(t+1)+(-2+t)-(1+2t)+2=0.t+0=0$ وهذا يعني أنّ (D) محتوى في المستوي (P) ....
0.5

- لدينا : $x_A+y_A-z_A+2=1+1-2+2=2\neq 0$ ومنه A لا تنتمي إلي المستوي (P) 0.5

2)تعيين معادلة للمستوي (Q) المحدد بالنقطة A وبالمستقيم (D).

لدينا: $\vec{u}(1;1;2)$ شعاع توجيه (D) ولتكن $E(1;-2;1)$ نقطة من (D) و $A(1;1;2)$ لا تنتمي إلى (D). نبين أن الشعاعين $\vec{u}(1;1;2)$ و $\overrightarrow{EA}(0;3;1)$ غير مرتبطين خطيا .لأنّ: $\frac{0}{1}\neq\frac{3}{1}$ 0.25

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ الشعاع الناظمي للمستوي (Q) ولتعيين معادلة (Q) نكتب: $\vec{n}\perp\vec{u}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{EA}$ أي معناه

$\begin{cases}\vec{u}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EA}.\vec{n}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}a+b+2c=0\\ 3b+c=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}a+b+2c=0\\ c=-3b\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=-b-2c=-b+6b=5b\\ c=-3b\end{cases}$ إذن

$\vec{n}(5;1;-3)$ من أجل $b=1$ 0.5

وبالتالي تكو ن معادلة (Q) من الشكل: $5x+y-3z+d=0$ وبمأنّ $A\in(Q)$ فإنّ:

$5x_A+y_A-3z_A+d=+5+1-6+d=0$ أي : $d=0$ إدن معادلة (Q) هي : $5x+y-3z=0$

0.25...

3) لنبيّن أنّ النقطة $A'\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$ هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى المستوي (P) .

− A' نظيرة A بالنسبة إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان I منتصف $[AA']$ ينتمي إلى المستوي (P) و $\vec{n}_P \parallel \overrightarrow{AA'}$.

إحداثيات النقطة I هي $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ وهي تحقق معادلة المستوي (P) أي: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+2=-2+2=0$.

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AA'}\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ ولدينا $\vec{n}_P(1;1;-1)$ ومنه : $\overrightarrow{AA'}=-\frac{4}{3}\vec{n}_P$ أي $\vec{n}_P \parallel \overrightarrow{AA'}$ 01

A' نظيرة A بالنسبة إلى المستوي (P) أو نقول $(A$ و A' نقطتان متناظرتان بالنسبة للمستوي (P)) .

4)ليكن (Q') المستوي المعين بالنقطة A' و وبالمستقيم (D). ثم تحقق أنّ معادلة ديكارتية لــ (Q') هي: $x+5y-3z+12=0$.

(Q') المستوي المعين بالنقطة A' و وبالمستقيم (D)

- نتحقق من أنّ (D) محتواة في (Q') و A' نقطة من (Q') .
- لدينا: $\vec{u}(1;1;2)$ شعاع توجيه (D) ولتكن $E(1;-2;1)$ نقطة من (D) و $\overrightarrow{EA'}\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$ 0.5

ليكن $\vec{n}_{Q'}(\alpha;\beta;\gamma)$ وعندئذ يكون: $\begin{cases}\vec{n}_{Q'}.\vec{u}=0\\ \vec{n}_{Q'}.\overrightarrow{EA'}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ \frac{1}{3}(-4\alpha+5\beta+7\gamma)=0\end{cases}$ أي

$\begin{cases}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ -4\alpha+5\beta+7\gamma=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}4\alpha+4\beta+8\gamma=0..............(1)\\ -4\alpha+5\beta+7\gamma=0..............(2)\end{cases}$ وبجمع (2) من (1) نجد أنّ

$9\beta+15\gamma=0$ أي $\gamma=-\frac{9}{15}\beta=-\frac{3}{5}\beta$ ومنه $\alpha=-\beta+\frac{6}{5}\beta=\frac{1}{5}\beta$ ومن أجل $\beta=5$ نجد: $\alpha=1$ و
$\gamma=-3$ إذن يكون $\vec{n}_{Q'}(1;5;-3)$ وعندئذ تكون معادلة (Q') هي من الشكل: $x+5y-3z+d=0$ ولدينا :
A' نقطة من (Q') أي: $x_{A'}+5y_{A'}-3z_{A'}+d=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}-\frac{30}{3}+d=0$ أي: $d-12=0$ أي $d=12$.

$(Q'): x+5y-3z+12=0$ 0.5

5) ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (D) و φ الزاوية الحادة للمستويين (Q) و (Q'). لنبين أنّ الزاويةالحادة للمستقيمين (HA) و (HA') هي نفسها φ ثم لنحسب $\cos\varphi$.
لدينا: $(AH)\perp(D)$ و $(AA')\perp(D)$ إذن $(A'H)\perp(D)$ و $(D)=(Q)\cap(Q')$
الزاويةالحادة للمستقيمين (HA) و (HA') هي تعين كما يلي : أولا لدينا $\vec{n}_Q(1;5;-3)\perp(Q')$ و
$\vec{n}(5;1;-3)\perp(Q)$ ومنه: $\cos\varphi=\frac{\vec{n}_Q.\vec{n}'_{Q'}}{\|\vec{n}_Q\|\times\|\vec{n}'_{Q'}\|}=\frac{5+5+9}{\sqrt{35}\times\sqrt{35}}=\frac{19}{35}$.

.... 0.5+0.5

التمرين الثاني :

الحل: 1) تعيين القيم الممكنة لـ d 0.5

لدينا: $\alpha x-6y=\alpha^2+3$ أي: $\alpha x-\alpha^2=6y+3$ أي معناه: $\alpha x-\alpha^2=3(2y+1)$
d يقسم α ويقسم 6 أي d يقسم $\alpha x-\alpha^2$ و $d\in\{1;2;3;6\}$ ومنه d يقسم $3(2y+1)$ و $d\in\{1;2;3;6\}$ أي $d\in\{1;3\}$. أو d يقسم $(2y+1)$ أي d فردي وعليه يكون: $d=1$ أو $d=3$.

2) x مضاعفا للعدد 2 معناه يوجد عدد صحيح k بحيث يكون: $x=2k$. وعليه يكون:
$\alpha(2k)-6y=\alpha^2+3$ أي
$2(\alpha k-3y)=\alpha^2+3$ وهذا يعني أنّ α^2+3 يقبل القسمة على 2 أي $\alpha\equiv-1[2]$ أو $\alpha\equiv1[2]$. أي α عدد فردي.0.5

لنحل المعادلة في $\mathbb{Z}^2$: $5x-6y=28$. نلاحظ أنّ $(2;-3)$ حل خاص للمعادلة: لأنّ: $5(2)-6(-3)=28$
وعليه يكون : $5x-6y=28$ .... (1) و $5(2)-6(-3)=28$ .... (2) وبطرح (2) من (1) نجد:

$5(x-2)=6(y+3)$ .... (3)

$5/5(x-2)$ ومنه $5/6(y+2)$ ولدينا 5 و 6 أوليان فيما بينهما وحسب غوص فإنّ $5/y+3$ أي يوجد عدد صحيح k بحيث يكون: $y=5k-3$ وبالتعويض في (3) نجد: $x=6k+2$ حيث k عدد صحيح .

$S=\{(6k+2;5k-3)/k\in\mathbb{Z}\}$ . ... .0.5+0.5

mokhtar tahi

ب− تعيين الثنائيات $(x;y)$ التي يكون من أجلها x و y أوليان فيما بينهما معناه: $p\,gcd(x;y)=1$ ...0.5

لدينا: $p\,gcd(x;y)=p\,gcd(6k+2;5k-3)=p\,gcd(5k-3;k+5)=p\,gcd(k+5;28)$ 0.5

إذن: $p\,gcd(k+5;28)=1$ وهذا يعني أنّ:

$k+5\equiv$	1	3	5	9	11	13	15	17	19	23	25	27	$[28]$
$k\equiv$	24	26	0	4	6	8	10	12	14	18	20	22	$[28]$

النتيجة: توجد إثنى عشرة ثنائية تحقق المطلوب وذلك حسب قيم k الموجودة سابقا في الجدول.

*الثنائيات التي تحقق y قاسما لــ x هي معناه $y\in D_{28}$ أي $k\in\{-5;1;2\}$ 0.5

* ومنه نجد: $S''=\{(-28;-28);(8;2);(14;7)\}$ 0.5

التمرين03: (05 نقاط)

1	حلول المعادلة: $S=\{-1+3i;3-5i;3+5i\}$	0.5+0.25
	أ− حساب L و L' وكتابته على الشكل الجبري والآسي: $L=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $L'=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	0.5+0.5
	ب− S_1 هو تشابه مباشر للمستوي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ونسبته 2، $z_B-z_C=2e^{i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_C)$	0.75
2	ج− S_2 هو تشابه مباشر للمستوي مركز D وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ونسبته 2، $z_B-z_D=2e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_A-z_D)$	0.75
	د− طبيعة التحويل $S_2\circ S_1$ هو تحاك مركزه ω ونسبته 4 حيث: $z_\omega=\frac{29}{3}+\frac{25}{3}i$.	0.5
3	أ− مجموعة النقط M هومستقيم يشمل النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;1)\}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له	0.5
	ب−مجموعة النقط M هي الدّائرة التي مركزها النقطة G مرجح $\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;1)\}$ و نصف قطرها $r=\frac{3}{2}$	0.5
	* النقط $D;C;B;A$ تنتمي إلى نفس الدّائرة	0.5
		م= 05ن
	التمرين04: (6 نقاط)	06

I − $g(x)=x-2+\ln\sqrt{x}$ و . $x\in]0;+\infty[$ كما يمكن كتابة $g(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

أ− $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 0.5

ب− من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $g'(x)=1+\frac{1}{2x}>0$ ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}^{*+}$. 0.25

جدول تغيرات g : 0.25

x	0	α	$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$+$	
تغيرات g	$-\infty$	0	$+\infty$

2) أ− تبيان أنّ $g(x)=0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا α 0.5

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$. ومن جهة أخرى لدينا:

$g(1)=-2<0$ و $g(2)=\frac{1}{2}\ln 2>0$ إذن: $g(1)\times g(2)<0$ وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1<\alpha<2$.

ب− تعيين إشارة $g(x)$: لدينا من أجل كل $x\in]0;\alpha[$: $g(x)<0$ ومن أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$: $g(x)>0$ ومن أجل $x=\alpha$: $g(x)=0$. 0.25

استنتاج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$:

$g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ معناه $0<\frac{1}{x}<\alpha$ معناه $x>\frac{1}{\alpha}$ ويكون: $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ إذاكان: $\frac{1}{x}>\alpha$ أي 0.5

$0<x<\alpha$ ويكون: $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ إذاكان: $\frac{1}{x}=\alpha$ أي: $x=\frac{1}{\alpha}$.

II −
$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x \quad ;x>0 \end{cases}$$

1) استمرارية f من اليمين عند 0:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\to\infty} -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x=0=f(0)\;;\left(\lim_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0\right)$$ 0.25

وعليه f مستمرة من اليمين عند 0 .

- دراسة قابلية اشتقاق f من اليمين عند 0:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{-7}{8}x+1-\frac{1}{4}x\ln x\right)=1$$ لأنّ: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} x\ln x=0$ 0.5

ومنه f قابلة للاشتقاق من اليمين عند 0 وعددها المشتق هو 1 أي $f'(0)=1$ ومنه نستنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة التي فاصلتها 0 من اليمين معامل توجيهه 1 .

2) لنبيّن أنّه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

0.5 — $f'(x)=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$ أي:

$f'(x)=x\left(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln x\right)=x\left(\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{x}\right)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ و م.

2) لنبيّن أنّ: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$.

لدينا: $g(\alpha)=0$ أي معناه: $\ln\alpha=4-2\alpha$ ومنه:

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{7}{8}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\left[-\frac{7}{8}+\alpha+1-\frac{1}{2}\alpha\right]$$

$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\alpha\right)=\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1+4\alpha}{8}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ و م.

0.5+0.25 — إيجاد حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$.

لدينا: $1<\alpha<2$ ومنه $4<4\alpha<8$ ومنه $5<1+4\alpha<9$ ....

$1<\alpha^2<4$ ومنه $8<8\alpha^2<32$ ومنه $\frac{1}{32}<\frac{1}{8\alpha^2}<\frac{1}{8}$ ومنه: $\boxed{\frac{5}{32}<f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<\frac{1}{8}}$.

0.25 — 4) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left[-\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x\right]=-\infty$ ....

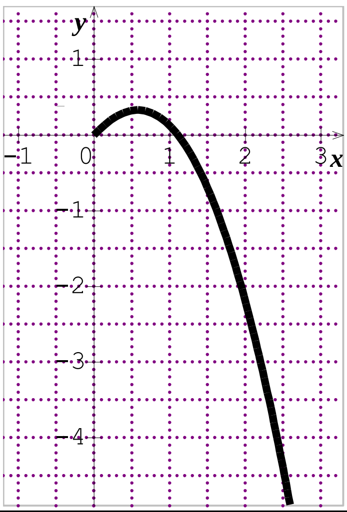
جدول تغيرات f

0.5

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	
تغيرات f	0 ↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$	↘ $-\infty$

0.5 — حساب $f(1)=\frac{1}{8}$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)\simeq-4;4$.

0.5 — الرسم :



إنّ العالم يفسح الطريق للمرء الذي يعرف إلى أين ذاهب .