امتحانات تجريبية مع حلولها المفصلة

الشعبة : علوم تجريبية

المراجعة النهائية

الموضوع رقم (01)

شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول : -- (المتتاليات العددية)

1/ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = -6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$

أ- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

ب- برهن بالتراجع من أجل كل $n \geq 3$ أن : $u_n > 0$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ أن : $u_n > 2n - 3$.

ج- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ ماذا تستنتج ؟

2/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n - 4n + 10$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

ج- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

ثم الجداء P_n التالي : $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n$.

التمرين الثاني : -- (الأعداد المركبة)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z+2+i)\left[z^2-(3+i)z+2i+2\right]=0$

1/ أ- اثبت أن المعادلة تقبل حلا حقيقيا يطلب تعيينه .

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة السابقة علما أن z_0 ، z_1 و z_2 حلول المعادلة و تحقق: $|z_2|>|z_1|>|z_0|$.

2/ أ- عين طويلة و عمدة z_0 ، ثم أحسب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}$.

ب- استنتج حسب قيم n الطبيعية قيمة العدد $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$.

3/ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ،

نضع A ، B و C ثلاث نقط من هذا المستوي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2 .

أ- أوجد معادلة الدائرة (ς) التي مركزها النقطة C و المستقيم ذو المعادلة : $2x - y + 1 = 0$ مماساً لها .

ب- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي تحقق : $(z-z_1)\overline{(z-z_1)} = (z-z_2)\overline{(z-z_2)}$.

التمرين الثالث : --- (الهندسة الفضائية)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط، عين الجواب الصحيح معللاً اختيارك .

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

النقط: $A(2;1;0)$ ، $B(2;-1;0)$ ، $C(5;1;0)$ ، $D(-2;5;5)$

1/ الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هما : ج1: متوازيان ج2: متعامدان ج3: لا متوازيان وَ لا متعامدان .

2/ الشعاع الناظمي للمستوي (ABC) هو : ج1: $\overrightarrow{n_1}(0;1;0)$ ج2: $\overrightarrow{n_2}(1;0;0)$ ج3: $\overrightarrow{n_3}(0;0;1)$.

3/ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: ج1: $z=0$ ج2: $z=1$ ج3: $y=0$.

4/ مركز ثقل المثلث ABC هي : ج1: $G_1\left(3;\frac{1}{3};0\right)$ ج2: $G_2\left(\frac{1}{3};3;0\right)$ ج3: $G_3(3;3;0)$.

5/ مساحة المثلث ABC هو : ج1: $A_1=\frac{1}{2}(ua)$ ج2: $A_2=3(ua)$ ج3: $A_3=2(ua)$.

6/ بعد النقطة D عن المستوي (ABC) هو: ج1: $d_1=3$ ج2: $d_2=2$ ج3: $d_3=5$.

7/ حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو: ج1: $V_1=5(uv)$ ج2: $V_2=2(uv)$ ج3: $V_3=15(uv)$.

التمرين الرابع : --- (الدوال الأسية)

f دالة عددية لمتغير حقيقي x حيث : $f(x)=-x+1+e^{2x}-e^{x}$

ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f .

2/ أ - احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$.

ج - ادرس وضعية $\left(C_f\right)$ بالنسبة لـ (Δ).

3/ ليكن x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس لـ $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الفاصلة x_0 .

- عين x_0 حتى يكون (T) موازياً لـ (Δ).

4/ بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها .

5/ ارسم كل من (Δ)، (T) وَ $\left(C_f\right)$ ، حيث وحدة الطول $2cm$.

6/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيم $\left(T_m\right)$ ذو المعادلة : $y=-x+m$

7/ أ- احسب $A(n)$ مساحة الحيز من المستوى المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيمات التي معادلاتها :

$x=\ln(n)$ ، $x=\ln(n+1)$ ، $y=-x+1$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

ب- أحسب بدلالة العدد الطبيعي n الغير معدوم المجموع التالي : $S_n=A(1)+A(2)+....+A(n)$.

التصحيح النموذجي للموضوع رقم (01)

شعبة : علوم تجريبية

حل التمرين الأول

1/ أ- حساب الحدود u_1 ، u_2 وَ u_3:

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 2(0) - 1 = -3 + 0 - 1 = -4$ منه : $u_1 = -4$.

من أجل $n = 1$ لدينا : $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 2(1) - 1 = -2 + 2 - 1 = -1$ منه : $u_2 = -1$.

من أجل $n = 2$ لدينا : $u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 2(2) - 1 = -\frac{1}{2} + 4 - 1 = \frac{5}{2}$ منه : $u_3 = \frac{5}{2}$.

ب- لنبرهن بالتراجع من أجل كل $n \geq 3$ أن $u_n > 0$:

لتكن $p(n)$ الخاصية التالية : $u_n > 0$

⇦ لنتحقق من صحة $p(3)$: من أجل $n = 3$ لدينا $u_3 = \frac{5}{2} > 0$ منه $p(3)$ محققة .

⇦ نفرض صحة $p(n)$ أي من أجل $n \geq 3$ أن $u_n > 0$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 0$.

لدينا حسب فرضية التراجع من أجل $n \geq 3$ أن $u_n > 0$ منه : $\begin{cases} \frac{1}{2}u_n > 0 \\ 2n - 1 > 0 \end{cases}$ بالجمع نجد : $\frac{1}{2}u_n + 2n - 1 > 0$ أي : $u_{n+1} > 0$

منه $p(n+1)$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \geq 3$ لدينا : $u_n > 0$.

الاستنتاج : لدينا من أجل كل $n \geq 3$: $u_n > 0$ مع : $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2(n-1) - 1$ أي : $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 2n - 3$

و من أجل $n \geq 4$: $u_{n-1} > 0$ منه : $\frac{1}{2}u_{n-1} > 0$ و منه : $\frac{1}{2}u_{n-1} + 2n - 3 > 2n - 3$ و بالتالي : $u_n > 2n - 3$.

ج- تعيين نهاية المتتالية (u_n):

لدينا من أجل $n \geq 4$: $u_n > 2n - 3$ حيث : $\lim_{n \to +\infty}(2n - 3) = +\infty$

إذن حسب مبرهنة المقارنة يكون لدينا : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ، نستنتج أن (u_n) متتالية متباعدة .

2/ أ- لنبرهن أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : $v_n = u_n - 4n + 10$ منه : $v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 = \frac{1}{2}u_n - 2n + 5 = \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) = \frac{1}{2}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وَ حدها الأول $v_0 = u_0 + 10 = 4$.

ب- لنبين أن : $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

لدينا : $v_n = u_n - 4n + 10$ منه : $u_n = v_n + 4n - 10$ و منه : $u_n = v_0 \times q^n + 4n - 10$ و منه : $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

و منه : $u_n = 2^2 \times \frac{1}{2^n} + 4n - 10$ إذن : $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$.

ج- حساب المجموع :

لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

منه : $S_n = (v_0 + 4(0) - 10) + (v_1 + 4(1) - 10) + (v_2 + 4(2) - 10) + ... + (v_n + 4(n) - 10)$

تكافئ : $S_n=\left(v_0+v_1+v_2+....+v_n\right)+4\left(1+2+....+n\right)-\left(10+10+10+....+10\right)$

تكافئ : $S_n=v_0\left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)+4\times\dfrac{n}{2}\left(1+n\right)-10\left(n+1\right)$ تكافئ : $S_n=4\left(\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right)+2n\left(n+1\right)-10\left(n+1\right)$

إذن : $S_n=-8\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\left(n+1\right)\left(2n-10\right)$.

– حساب الجداء :

لدينا : $P_n=v_0\times v_1\times v_2\times....\times v_n$ منه : $P_n=v_0\times v_0q\times v_0q^2\times....\times v_0q^n$ تكافئ : $P_n=v_0^{n+1}\times q^{1+2+....+n}$

تكافئ : $P_n=v_0^{n+1}\times q^{\frac{n}{2}(1+n)}$ إذن : $P_n=4^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}(1+n)}$.

حل التمرين الثاني

لدينا : $\left(z+2+i\right)\left[z^2-(3+i)z+2i+2\right]=0$ .... (1)

1/ أ– إثبات أن المعادلة (1) تقبل حلا حقيقيا :

ليكن $z=x$ الحل الحقيقي للمعادلة (1) حيث : $x^2-\left(3+i\right)x+2i+2=0$ تكافئ : $x^2-3x-ix+2i+2=0$

تكافئ : $x^2-3x+2+i\left(2-x\right)=0$ أي : $\begin{cases}x^2-3x+2=0\\2-x=0\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^2-3x+2=0\\x=2\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}x=2\ ,\ x=1\\x=2\end{cases}$

و بما أن الحل المشترك هو $x=2$ ، فإن الحل الحقيقي للمعادلة (1) هو $z=2$.

ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1):

لدينا : $\left(z+2+i\right)\left(z^2-(3+i)z+2i+2\right)=0$ تكافئ : $\left(z+2+i\right)\left(z-2\right)\left(z-a\right)=0$ مع a عدد مركب

تكافئ : $\left(z+2+i\right)\left(z^2-az-2z+2a\right)=0$ تكافئ : $\left(z+2+i\right)\left[z^2-\left(a+2\right)z+2a\right]=0$ بالمطابقة مع (1)

نجد : $\begin{cases}a+2=3+i\\2a=2+2i\end{cases}$ منه : $a=1+i$

إذن المعادلة (1) تكتب على الشكل : $\left(z+2+i\right)\left(z-2\right)\left(z-1-i\right)=0$

و بالتالي حلول المعادلة (1) هي : $z_0=1+i$ و $z_1=2$ و $z_2=-2-i$ لأن : $|z_2|>|z_1|>|z_0|$.

2/ أ– تعيين طويلة و عمدة z_0 :

⇦ لدينا : $z_0=1+i$ منه : $|z_0|=\sqrt{2}$ و $\arg\left(z_0\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

⇦ لدينا : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}=\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{2017}$ و حسب دستور موافر نجد : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}=\cos\dfrac{2017\pi}{4}+i\sin\dfrac{2017\pi}{4}$

منه : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}=\cos\dfrac{\pi+2016\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2016\pi}{4}$ و منه : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+504\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+504\pi\right)$

و منه : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ إذن : $\left(\dfrac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2017}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ب- استنتاج حسب قيم n الطبيعية قيمة العدد : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$

لدينا : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{4n}$ و حسب دستور موافر نجد : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = \cos(n\pi) + i\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}$

منه : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = \cos(n\pi)$ و نميز حالتين :

⇦ إذا كان n عدداً زوجياً فإن : $\cos(n\pi) = 1$ و بالتالي : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = 1$.

⇦ إذا كان n عدداً فردياً فإن : $\cos(n\pi) = -1$ و بالتالي : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{4n} = -1$.

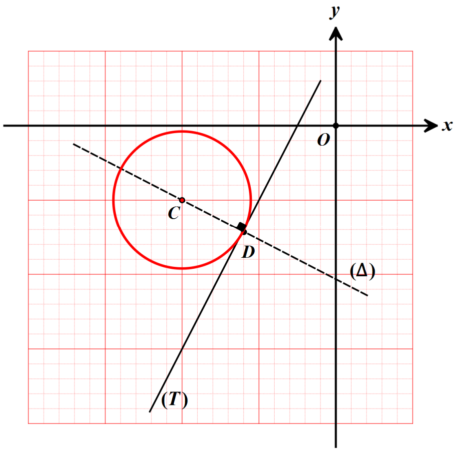
3/ أ- إيجاد معادلة الدائرة (ς) :

لدينا النقطة C لاحقتها $z_2 = -2 - i$ منه : $C(-2;-1)$

و معادلة الدائرة التي مركزها النقطة C تكتب على الشكل : $(x+2)^2 + (y+1)^2 = r^2$ حيث r نصف قطر الدائرة (ς)

حساب r :

لدينا : $2x - y + 1 = 0$ منه : $y = 2x + 1$ و ليكن (T) وَ نعتبر $(\Delta): y = ax + b$ المستقيم الذي يشمل النقطة C و يعامد (T)



بما أن المستقيمان (T) وَ (Δ) متعامدان فإن : $2a = -1$ تكافئ : $a = -\frac{1}{2}$

و C نقطة من (Δ) أي : $y_C = a x_C + b$ منه : $-1 = -\frac{1}{2}(-2) + b$

و منه : $-1 = 1 + b$ أي : $b = -2$ ، إذن : $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x - 2$

لتكن $D(x_D;y_D)$ نقطة تقاطع المستقيم (T) مع المستقيم (Δ)

حيث : $2x_D + 1 = -\frac{1}{2}x_D - 2$ منه : $4x_D + 2 = -x_D - 4$ و منه : $x_D = -\frac{6}{5}$

نعوض $x_D = -\frac{6}{5}$ في معادلة المستقيم (T) نجد : $y_D = -\frac{7}{5}$ ، إذن : $D\left(-\frac{6}{5};-\frac{7}{5}\right)$

بما أن : $r = CD$ فإن : $r = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$ منه : $r = \sqrt{\frac{4}{5}}$

إذن معادلة الدائرة (ς) هي : $(x+2)^2 + (x+1)^2 = \frac{4}{5}$.

ب- تعيين مجموعة النقط M :

لدينا : $(z - z_1)\overline{(z - z_1)} = (z - z_2)\overline{(z - z_2)}$ تكافئ : $(x + iy - 2)\overline{(x + iy - 2)} = (x + iy + 2 + i)\overline{(x + iy + 2 + i)}$

تكافئ : $(x - 2 + iy)(x - 2 - iy) = [x + 2 + i(y+1)][x + 2 - i(y+1)]$

تكافئ : $(x+2)^2 + (y+1)^2$ تكافئ : $(x-2)^2 + y^2 = \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + 2y + 1$ ... $\cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + 2y + 1$

تكافئ : $-4x = 4x + 2y + 1$ تكافئ : $8x + 2y + 1 = 0$

إذن مجموعة النقط M هو مستقيم ذو المعادلة : $8x + 2y + 1 = 0$.

حل التمرين الثالث

1/ لدينا : $\overrightarrow{AB}(0;-2;0)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;0)$ و $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0(3)-2(0)+0(0)=0$ أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعان متعامدان .
إذن الجواب الصحيح هو : ج2 .

2/ بما أن : $\overrightarrow{n_3}\bullet\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{n_3}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ فإن $\overrightarrow{n_3}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، فهو ناظمي للمستوي (ABC)
إذن الجواب الصحيح هو : ج3 .

3/ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي من الشكل: $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ منه : $z+d=0$ لأن $\overrightarrow{n_3}(0;0;1)$ شعاعه الناظم
لدينا A نقطة من المستوي (ABC) منه : $z_A+d=0$ و منه : $d=0$ و بالتالي المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $z=0$
إذن الجواب الصحيح هو : ج1 .

4/ إحداثيات مركز ثقل المثلث ABC هي : $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$ منه : $\left(3;\frac{1}{3};0\right)$ و هي النقطة G_1
إذن الجواب الصحيح هو : ج1 .

5/ مساحة المثلث ABC هي : $\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\times3}{2}=3(ua)$ و هي قيمة A_2
إذن الجواب الصحيح هو : ج2 .

6/ بعد النقطة D عن المستوي (ABC) هو: $\frac{|0+0+z_D|}{1}=5$ و هي قيمة d_3
إذن الجواب الصحيح هو : ج3 .

7/ حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو: $\frac{1}{3}A_{ABC}\times d\left(D;(ABC)\right)=\frac{A_2\times d_3}{3}=\frac{3\times5}{3}=5\ (uv)$ و هي قيمة V_1
إذن الجواب الصحيح هو : ج1 .

حل التمرين الرابع

1/ دراسة تغيرات الدالة f :

① مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty;+\infty[$.

② حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{-x+1}_{+\infty}+\underbrace{e^{2x}}_{0}-\underbrace{e^{x}}_{0}\right)$ منه : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{e^{x}}_{+\infty}\left(\underbrace{\frac{-x}{e^{x}}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{e^{x}}}_{0}+\underbrace{e^{x}}_{+\infty}-1\right)=+\infty$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

③ اتجاه التغير: الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'(x)=-1+2e^{2x}-e^{x}$ منه : $f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1$.

لدينا : $f'(x)=0$ تكافئ : $2e^{2x}-e^{x}-1=0$ ، نضع $X=e^{x}$ (حيث $X>0$) في المعادلة نجد : $2X^2-X-1=0$ ...(*)

مميز المعادلة (*) هو $\Delta=9$ إذن حلول المعادلة (*) : $X_1=1$ أو $X_2=-\frac{1}{2}$ (حل مرفوض لأن $X>0$)

لما : $X_1=1$ فإن : $e^{x}=1$ منه $x=0$

إذا كان $x\in]-\infty;0[$ فإن : $f'(x)<0$ و بالتالي f دالة متناقصة تماما .

إذا كان $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)>0$ و بالتالي f دالة متزايدة تماما .

③ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(0)=1$	↗ $+\infty$

2/ – دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) :

بما أن : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=0$ فإن $(\Delta): y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$

حساب a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1+e^{2x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\frac{-x+1}{x}}_{-1}+\underbrace{\frac{e^{x}}{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(e^{x}-1\right)}_{+\infty}\right]=+\infty$

منه المنحنى (C_f) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب و بجوار $+\infty$.

– دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لديناً : $f(x)-y=e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(e^{x}-1\right)$

إذن : $f(x)-y=0$ تكافئ : $e^{x}\left(e^{x}-1\right)=0$ تكافئ : $e^{x}-1=0$ منه : $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	$+$		$+$
e^x-1	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$

- إذا كان $x\in]-\infty;0[$ فإن $f(x)-y<0$ و بالتالي (C_f) يقع تحت (Δ) .
- إذا كان $x\in]0;-\infty[$ فإن $f(x)-y>0$ و بالتالي (C_f) يقع فوق (Δ) .
- إذا كان $x=0$ فإن $f(x)-y=0$ و بالتالي (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة $(0;1)$.

3/ تعيين x_0 حتى يكون (T) موازياً لـ (Δ) :

المستقيمان (T) وَ (Δ) متوازيان معناه : $f'(x_0)=-1$ تكافئ : $2e^{2x_0}-e^{x_0}-1=-1$ تكافئ : $2e^{2x_0}-e^{x_0}=0$

تكافئ : $e^{x_0}\left(2e^{x_0}-1\right)=0$ تكافئ : $2e^{x_0}-1=0$ لأن : $e^{x_0}\neq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

تكافئ : $e^{x_0}=\frac{1}{2}$ تكافئ : $x_0=\ln\frac{1}{2}$ إذن : $x_0=-\ln 2$.

4/ لنبين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف :

لدينا : $f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1$ منه : $f''(x)=4e^{2x}-e^{x}$ و منه : $f''(x)=e^{x}\left(4e^{x}-1\right)$

x	$-\infty$	$-ln4$	$+\infty$
e^x	$+$		$+$
$4e^x-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$f''(x)=0$ يعني : $4e^{x}-1=0$ تكافئ : $e^{x}=\frac{1}{4}$ تكافئ : $x=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$ أي : $x=-\ln 4$

حسب جدول الإشارة المقابل ، نلاحظ أن المشتقة الثانية تنعدم و تغير من إشارتها عند $x=-\ln 4$

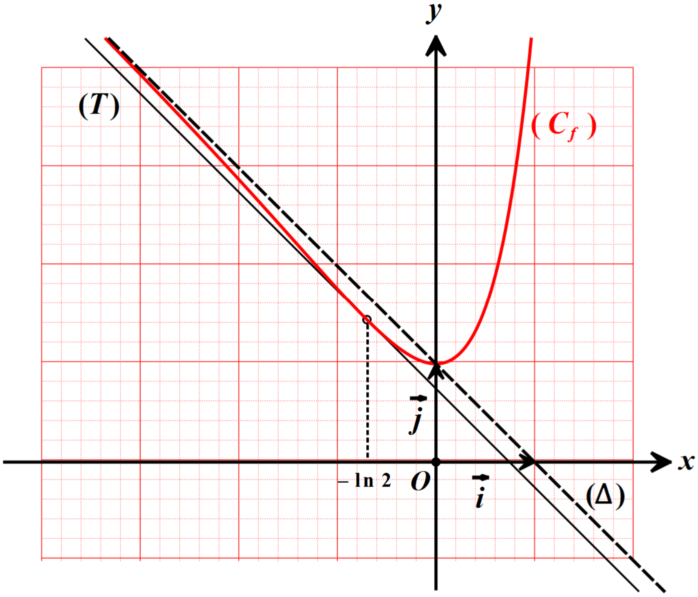
إذن النقطة $\left(-\ln 4;\frac{13}{16}+\ln 4\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

5/ الرسم :

معادلة المماس (T) عند $x_0=-\ln 2$ تكتب على الشكل : $y=f'(-\ln 2)(x+\ln 2)+f(-\ln 2)$

حيث : $f'(-\ln 2)=-1$ وَ $f(-\ln 2)=\frac{3}{4}+\ln 2$

إذن : $(T): y=-x+\frac{3}{4}$.



6/ المناقشة البيانية :

لدينا : $(\Delta): y=-x+1$ وَ $(T_m): y=-x+m$ ... (1) (لاحظ أن للمستقيمين نفس معامل التوجيه وَهو -1)

إذن حلول المعادلة (1) هي فواصل نقاط تقاطع المستقيمات (T_m) الموازية لـ (Δ) مع المنحنى (C_f).

- إذا كان $m\in\left]-\infty;\frac{3}{4}\right[$ فإن (C_f) وَ (T_m) لا يتقاطعان .
- إذا كان $m=\frac{3}{4}$ فإن (C_f) وَ $\left(T_{\frac{3}{4}}\right)$ يتقاطعان في نقطة مضاعفة فاصلتها $x_0=-\ln 2$.
- إذا كان $m\in\left]\frac{3}{4};1\right[$ فإن (C_f) وَ (T_m) يتقاطعان في نقطتين .
- إذا كان $m\in[1;+\infty[$ فإن (C_f) وَ (T_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة .

7/ أ- حساب المساحة $A(n)$:

لدينا : $A(n)=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[f(x)-y\right]dx=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}\left[e^{2x}-e^{x}\right]dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}\right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)}$

منه : $A(n)=\left[\frac{1}{2}(n+1)^2-(n+1)-\frac{1}{2}n^2+n\right]\times \text{u.a}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\times\text{u.a}$

بما أن الوحدة هي $2cm$ فإن : $\text{u.a}=4\text{cm}^2$ إذن : $A(n)=(4n-2)\text{cm}^2$.

ب- حساب S_n بدلالة n :

لدينا : $S_n=A(1)+A(2)+A(3)+....+A(n)$ منه : $S_n=(4-2)+(8-2)+(12-2)+....+(4n-2)$

$$=(4+8+12+....+4n)\underbrace{-2-2-2-....-2}_{n}$$

$$=4(1+2+3+....+n)-2n$$

$$=4\frac{n}{2}(1+n)-2n$$

$$=2n(1+n)-2n$$

إذن : $S_n=\left(2n^2\right)cm^2$.