الـموضوع رقم (02)

شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول : -- (الهندسة الفضائية)

الفضاء منسوب الى معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A\left(3;-2;2\right)$ ، $B\left(6;1;5\right)$ ، $C\left(6;-2;-1\right)$.

1/ بين أن المثلث ABC قائم .

2/ بين أن المستوي (P) الذي معادلته $x+y+z-3=0$ عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A .

4/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

5/ لتكن $D\left(0;4;-1\right)$ نقطة من الفضاء ، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

6/ أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ ، ثم بين أن قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان .

7/ أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC) .

التمرين الثاني : -- (الأعداد المركبة)

1/ أنشر العبارة $(1-2i)^2$.

2/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-(1+2i)z+2i=0$

نرمز لحلي العادلة بـ z_1 و z_2 حيث z_1 الحل التخيلي الصرف و z_2 الحل الحقيقي .

3/ المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، حيث وحدة الطول $2cm$

ليكن f تحويل نقطي الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة Z ، النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z'=e^{\frac{\pi}{3}i}Z$.

أ- أوجد طبيعة التحويل f وَ عناصره المميزة .

ب- لتكن (Γ) مجموعة النقط $M\left(x;y\right)$ ذات اللاحقة Z حيث : $\left|Z-z_1+z_2\right|=2$

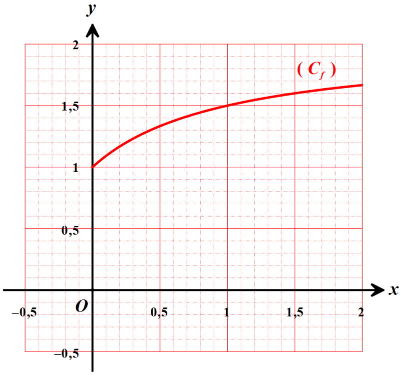
عين المجموعة (Γ) .

ج- أوجد صورة المجموعة (Γ) بالتحويل f .

التمرين الثالث : -- (المتتاليات العددية)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;2]$ بـ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ كما هو معطى في الشكل .

1/ بين أنه إذا كان $x\in[1;2]$ ، فإن $f(x)\in[1;2]$.



2/ (u_n) وَ (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ وَ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

أ- مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و على محور التراتيب الحدود v_0 وَ v_1 .

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب لكل من المتتاليتين (u_n) وَ (v_n) .

3/ برهن بالتراجع عن الخواص التالية :

من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 2$ ؛ $1 \le v_n \le 2$ ؛ $u_n \le u_{n+1}$ وَ $v_n \ge v_{n+1}$.

4/ أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ب- بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \ge 0$ واستنتج أن : $v_{n+1} - u_{n+1} \le \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

ج- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ، ثم استنتج أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية ℓ يطلب قيمتها .

التمرين الرابع : -- (الدوال اللوغاريتمية)

I - نعتبر الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $g(x) = -x^2 + 1 - 2\ln|x|$

1/ ادرس تغيرات الدالة g .

2/ احسب $g(-1)$ وَ $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي : $f(x) = -x + 2 + \dfrac{1 + 2\ln|x|}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الطول هي $2\ cm$.

1/ بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

2/ أ- ادرس تغيرات الدالة f ثم عين المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل و ليكن (Δ) .

3/ برهن أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ يكون : $f(-x) + f(x) = 4$ ، ماذا تستنتج ؟

4/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0,4;0,5[$.

5/ أ- أنشئ كل من (Δ) وَ (C_f) .

ب- ناقش بيانيا حسب قيم m ($m \in \mathbb{R}$) عدد و إشارة حلول المعادلة : $1 - x^2 + x\ln m + 2\ln|x| = 0$

6/ أ- احسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المعرف بمجموعة النقط $M(x;y)$ كما يلي : $\alpha \le x \le e$ وَ $2 - x \le y \le f(x)$.

ب- اثبت أن : $A(\alpha) = (\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 9)\,cm^2$.

التصحيح النموذجي للموضوع رقم (02)
شعبة : علوم تجريبية

حل التمرين الأول

1/ لنبين أن المثلث ABC قائم :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ منه : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=3(3)+3(0)+3(-3)=9-9=0$

بما أن $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ فإن المثلث ABC قائم A .

2/ لنبين أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) :

لدينا المستوي (P) معادلته الديكارتية : $x+y+z-3=0$ حيث $\vec{n}(1;1;1)$ شعاعه الناظم

- لاحظ أن : $\overrightarrow{AB}=3\vec{n}$ معناه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً و بالتالي المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB)
- و $x_A+y_A+z_A-3=3-2+2-3=0$ منه : $A\in(P)$.

3/ كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي (P') :

المستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) و يشمل النقطة A هو مجموعة من النقط $M(x;y;z)$ بحيث : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AM}=0$

لدينا : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AM}=0$ تكافئ : $3(x-3)+0(y+2)-3(z-2)=0$ منه : $3x-3z-3=0$ إذن : $(P'):x-z-1=0$.

4/ تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

لدينا : $\begin{cases}x+y+z-3=0\\x-z-1=0\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x+y+z-3=0...(1)\\z=x-1...(2)\end{cases}$ نعوض (1) في (2) نجد : $2x+y-4=0$ منه : $y=-2x+4$

نضع : $x=k$ مع $k\in\mathbb{R}$ فنحصل على التمثيل الوسيطي التالي : $(\Delta):\begin{cases}x=k\\y=-2k+4\\z=k-1\end{cases}$.

5/ إثبات أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC):

يكفي إثبات أن $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لدينا : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AM}=-3(3)+6(3)-3(3)=-9+18-9=0$ معناه $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعان متعامدان .

وَ : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{AM}=-3(3)+6(0)-3(-3)=-9+0+9=0$ معناه $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعان متعامدان .

إذن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .

6/ حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

لدينا : $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times AD$ مع : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC=\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}$ و $AD=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

منه : $V_{ABCD}=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times\cancel{3}\sqrt{6}$ إذن : $V_{ABCD}=27\ (u\,v)$.

- لنبين أن : $\widehat{BDC}=\frac{\pi}{4}rad$

لدينا: $\overrightarrow{DB}(6;-3;6)$ و $\overrightarrow{DC}(6;-6;0)$ منه : $DB=\sqrt{81}=9$ و $DC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

$\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{DC}=6(6)-3(-6)+6(0)=54$ ...(1) و $\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{DC}=DB\times DC\times\cos\widehat{BDC}$ ...(2)

من (1) وَ (2) ينتج : $DB\times DC\times\cos\widehat{BDC}=54$ منه : $54\sqrt{2}\cos\widehat{BDC}=54$ وَ منه : $\cos\widehat{BDC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ أي: $\widehat{BDC}=\frac{\pi}{4}rad$.

7/ حساب مساحة المثلث BDC :

نعلم أن : $S_{BDC} = \frac{1}{2} \times DB \times DC \times \sin \widehat{BDC}$ منه : $S_{BDC} = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ إذن : $S_{BDC} = 27\ (ua)$.

– استنتاج بعد النقطة A عن المستوي (BDC) :

لدينا : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{BDC} \times d(A;(BDC))$ منه : $d(A;(BDC)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BDC}}$ إذن : $d(A;(BDC)) = 3$.

حل التمرين الثاني

1/ نشر العبارة : $(1-2i)^2$

لدينا : $(1-2i)^2 = 1^2 + (2i)^2 - 2(1)(2i) = 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$ إذن : $(1-2i)^2 = -3-4i$.

2/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (1+2i)z + 2i = 0$

مميز المعادلة هو : $\Delta = (1+2i)^2 - 4(2i) = 1^2 + (2i)^2 + 2(1)(2i) - 8i = 1 - 4 + 4i - 8i = -3 - 4i = (1-2i)^2$

منه : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2i-(1-2i)}{2} = \frac{4i}{2}$ أي : $z_1 = 2i$ و $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2i+(1-2i)}{2} = \frac{2}{2}$ أي : $z_2 = 1$.

3/ أ– إيجاد طبيعة التحويل f و عناصره المميزة :

لدينا : $Z' = e^{\frac{\pi}{3}i} Z$ و هو من الشكل : $Z' = aZ + b$ مع : $a = e^{\frac{\pi}{3}i}$ و $b = 0$

بما أن : $|a| = 1$ فإن التحويل f دوران مركزه مبدأ المعلم $O(0;0)$ لأن $b = 0$ و زاويته $\arg(a) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ب– تعيين المجموعة (Γ) :

لدينا : $|Z - z_1 + z_2| = 2$ تكافئ : $|x + iy - 2i + 1| = 2$ تكافئ : $|x + 1 + i(y-2)| = 2$ تكافئ : $\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 2$

بالتربيع الطرفين نجد : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ، إذن المجموعة (Γ) دائرة مركزها $\omega(-1;2)$ و نصف قطرها 2 .

– إيجاد صورة المجموعة (Γ) :

صورة الدائرة (Γ) بالدوران f هي دائرة (Γ') مركزها ω' صورة ω بالدوران f و نصف قطرها 2 .

تعيين ω' : لدينا $f(\omega) = \omega'$ منه : $Z_{\omega'} = e^{\frac{\pi}{3}i} Z_{\omega}$ و منه : $Z_{\omega'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1+2i)$

أي : $Z_{\omega'} = -\frac{1}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ و بالتالي : $\omega'\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

إذن : $(\Gamma') : \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(y - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$.

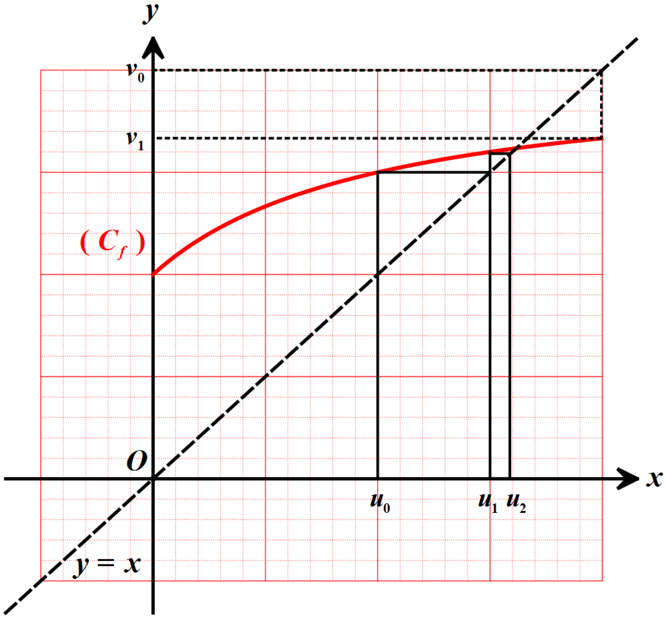
حل التمرين الثالث

1/ لنبين أنه إذا كان $x \in [1;2]$ ، فإن $f(x) \in [1;2]$:

لدينا : $x \in [1;2]$ و f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f(x) \in [f(1); f(2)]$ و منه : $f(x) \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right]$

بما أن : $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right] \subset [1;2]$ فإن : $f(x) \in [1;2]$.

2/ أ- تمثيل الحدود :



ب- التخمين :

- بما أن : $u_0 < u_1 < u_2$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و تقترب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$
- بما أن : $v_0 > v_1$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة و تقترب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$

3/ لنبرهن بالتراجع عن الخواص التالية : لتكن في كل حالة $p(n)$ الخاصية .

الخاصية الأولى : $1 \le u_n \le 2$

- لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ منه : $1 \le u_0 \le 2$ إذن $p(0)$ محققة .
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $1 \le u_n \le 2$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $1 \le u_{n+1} \le 2$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $1 \le u_n \le 2$ و حسب السؤال الأول نجد : $1 \le f(u_n) \le 2$ أي : $1 \le u_{n+1} \le 2$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le u_n \le 2$.

الخاصية الثانية : $1 \le v_n \le 2$

- لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = 2$ منه : $1 \le v_0 \le 2$ إذن $p(0)$ محققة .
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $1 \le v_n \le 2$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $1 \le v_{n+1} \le 2$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $1 \le v_n \le 2$ و حسب السؤال الأول نجد : $1 \le f(v_n) \le 2$ أي : $1 \le v_{n+1} \le 2$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \le v_n \le 2$.

الخاصية الثالثة : $u_n \le u_{n+1}$

- لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 1$ و $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{2}$ منه : $u_0 \le u_1$ إذن $p(0)$ محققة .
- نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \le u_{n+1}$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \le u_{n+2}$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $u_n \le u_{n+1}$ و f دالة متزايدة منه : $f(u_n) \le f(u_{n+1})$ و منه : $u_{n+1} \le u_{n+2}$ أي $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \le u_{n+1}$.

الخاصية الرابعة : $v_n \ge v_{n+1}$

- لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = 2$ و $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ منه : $v_0 \ge v_1$ إذن $p(0)$ محققة .

• نفرض صحة $p(n)$ أي : $v_n \geq v_{n+1}$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $v_{n+1} \geq v_{n+2}$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $v_n \geq v_{n+1}$ و f دالة متزايدة منه : $f(v_n) \geq f(v_{n+1})$ و منه : $v_{n+1} \geq v_{n+2}$ أي $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \geq v_{n+1}$.

4/ أ- لنثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$

لدينا :
$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) = \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} = \frac{(2v_n+1)(u_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$= \frac{(2v_nu_n+2v_n+u_n+1)-(2u_nv_n+2u_n+v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} = \frac{\cancel{2v_nu_n}+2v_n+u_n\cancel{+1}\cancel{-2u_nv_n}-2u_n-v_n\cancel{-1}}{(v_n+1)(u_n+1)}$$
$$= \frac{2v_n+u_n-2u_n-v_n}{(v_n+1)(u_n+1)} = \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

ب- لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n - u_n \geq 0$

• لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n=0$ لدينا : $v_0 - u_0 = 2-1 = 1 \geq 0$ إذن $p(0)$ محققة .

• نفرض صحة $p(n)$ أي : $v_n - u_n \geq 0$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $v_n - u_n \geq 0$ نقسم الطرفين على العدد $(v_n+1)(u_n+1)$ الموجب تماماً

فنجد : $\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \geq 0$ و بالتالي : $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ أي $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n - u_n \geq 0$.

- لنستنتج أن : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$

لدينا : $\begin{cases} v_n \geq 1 \\ u_n \geq 1 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n+1 \geq 2 \\ u_n+1 \geq 2 \end{cases}$ و منه : $(v_n+1)(u_n+1) \geq 4$ أي : $\dfrac{1}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \dfrac{1}{4}$

نضرب طرفي المتباينة بالعدد الموجب $v_n - u_n$ فنجد : $\dfrac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \leq \dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$ إذن : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

ج- لنثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$ منه :
$$\begin{cases} \cancel{v_1 - u_1} \leq \frac{1}{4}(v_0 - u_0) \\ \cancel{v_2 - u_2} \leq \frac{1}{4}(\cancel{v_1 - u_1}) \\ \cancel{v_3 - u_3} \leq \frac{1}{4}(\cancel{v_2 - u_2}) \\ \vdots \\ v_n - u_n \leq \frac{1}{4}(\cancel{v_{n-1} - u_{n-1}}) \end{cases}$$
بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

– الاستنتاج : لدينا $v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) \le \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)\le 0$

و بما أن : $v_n - u_n \ge 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ أي (u_n) و (v_n) لهما نفس النهاية ℓ .

– بما أن المتتالية (u_n) متقاربة و تقترب نحو العدد ℓ حيث : $1\le\ell\le 2$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+1}$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2u_n+1}{u_n+1}$ و منه : $\ell = \frac{2\ell+1}{\ell+1}$ تكافئ : $\ell^2+\ell=2\ell+1$ تكافئ : $\ell^2-\ell-1=0$

مميز المعادلة هو : $\Delta=5$ أي للمعادلة حلين مختلفين : $\ell=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ (مرفوض) أو $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (مقبول) .

ملاحظة : المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان .

حل التمرين الرابع

I– 1/ دراسة تغيرات الدالة g:

① مجموعة التعريف : $D_g =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

② حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+1-2\ln(-x)\right) = -\infty+1-\infty$ منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2+1-2\ln|x|\right)=0+1+\infty$ منه : $\lim\limits_{x\to0} g(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+1-2\ln x\right)=-\infty+1-\infty=-\infty$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

③ اتجاه التغير: الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على D_g حيث : $g'(x)=-2x-2\left(\frac{1}{x}\right)$ منه : $g'(x)=\frac{-2(x^2+1)}{x}$.

إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة المقام لأن البسط دوما سالب إذن :

- إذا كان : $x\in]-\infty;0[$ فإن $g'(x)>0$ و بالتالي g متزايدة تماما .
- إذا كان : $x\in]0;+\infty[$ فإن $g'(x)<0$ و بالتالي g متناقصة تماما .

④ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘ 0	↘ $-\infty$

2/ حساب $g(-1)$ وَ $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$:

$g(1)=0$ وَ $g(-1)=0$

و من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : إذا كان $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن $g(x)<0$.

إذا كان $x\in]-1;0[\cup]0;1[$ فإن $g(x)>0$.

II– 1/ لنبين صحة $f'(x)$:

لدينا : $f'(x)=-1+\frac{2\left(\frac{1}{x}\right)x-1-2\ln|x|}{x^2}=\frac{-x^2+1-2\ln|x|}{x}$ منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

2/ أ– دراسة تغيرات الدالة f:

① مجموعة التعريف : $D_f=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

② حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-2\underbrace{\frac{\ln(-x)}{(-x)}}_{0}\right)$ منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+2\underbrace{\frac{\ln(+x)}{(+x)}}_{0}\right)$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$.

③ اتجاه التغير: حسب السؤال الأول لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لاحظ أن إشارة $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$

- إذا كان : $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن $f'(x)<0$ و بالتالي f دالة متناقصة .
- إذا كان : $x\in]-1;0[\cup]0;1[$ فإن $f'(x)>0$ و بالتالي f دالة متزايدة .

④ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)=2$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$f(1)=2$	↘	$-\infty$

- المستقيمات المقاربة لـ (C_f):

لدينا : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\infty$ منه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(-x+2)]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2\ln|x|}{x}\right)=0$ فإن المستقيم $(\Delta): y=-x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞ .

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ):

لدينا : $f(x)-y=0$ تكافئ : $\dfrac{1+2\ln|x|}{x}=0$ منه : $1+2\ln|x|=0$ أي : $x=\dfrac{\sqrt{e}}{e}$ أو $x=-\dfrac{\sqrt{e}}{e}$ حيث $\dfrac{\sqrt{e}}{e}\approx0,6$

- إذا كان : $x\in]-\infty;-0,6[\cup]0;0,6[$ فإن : $f(x)-y<0$ أي (C_f) يقع تحت (Δ) .
- إذا كان : $x\in]-0,6;0[\cup]0,6;+\infty[$ فإن : $f(x)-y>0$ أي (C_f) يقع فوق (Δ) .
- إذا كان : $x=-0,6$ أو $x=0,6$ فإن (C_f) و(Δ) يتقاطعان في نقطتين هما $A_1(0,6;1,4)$ ، $A_2(-0,6;2,6)$.

3/ لنبرهن أن: $f(-x)+f(x)=4$

$f(-x)+f(x)=\cancel{x}+2+\cancel{\dfrac{1+2\ln|-x|}{-x}}\cancel{-x}+2+\cancel{\dfrac{1+2\ln|x|}{x}}=2+2$ إذن : $f(-x)+f(x)=4$.

الاستنتاج : لدينا $f(-x)+f(x)=4$ و هي من الشكل : $f\left(2\times\underset{\alpha}{\underbrace{0}}-x\right)+f(x)=2\times\underset{\beta}{\underbrace{2}}$

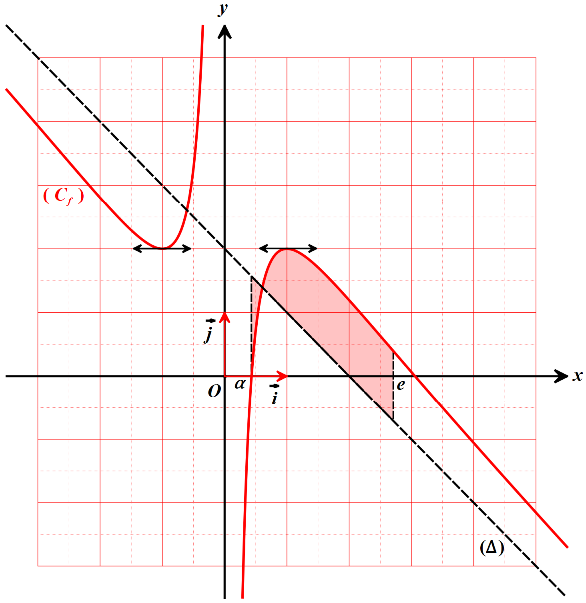
نستنتج أن النقطة $\omega(0;2)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

4/ لنبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا :

- لدينا : $f(0,4)=-0,4815$ و $f(0,5)=0,7274$ منه : $f(0,4)\times f(0,5)<0$
- وَ f دالة مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[0,4;0,5]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $\alpha\in]0,4;0,5[$.

5/ أ- الرسم :



ب- المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط m :

لدينا : $1-x^2+x\ \ln m+2\ \ln|x|=0$ ...(1) حيث $m>0$

منه : $-x\ln m=-x^2+1+2\ln|x|$ تكافئ : $-\ln m=-x+\dfrac{1+2\ln|x|}{x}$ تكافئ : $2-\ln m=-x+2+\dfrac{1+2\ln|x|}{x}$

منه : $2-\ln m=f(x)$

إذن حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل ذو المعادلة $y=2-\ln m$ مع المنحنى (C_f) إذن :

- إذا كان $(2-\ln m)\in]-\infty;2[$ أي $\ln m\in]0;+\infty[$ منه $m\in]1;+\infty[$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $(2-\ln m)=2$ أي $\ln m=0$ منه $m=1$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين مضاعفين هما : $x_1=1$ و $x_2=-1$.
- إذا كان $(2-\ln m)\in]2;+\infty[$ أي $\ln m\in]-\infty;0[$ منه $m\in]0;1[$ فإن المعادلة (1) تقبل حلين سالبين .

6/ أ- حساب المساحة $A(\alpha)$:

حسب المعطيات نكتب : $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{\frac{\sqrt{e}}{e}}[y-f(x)]dx+\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{e}[f(x)-y]dx$

$$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{\frac{\sqrt{e}}{e}}-\frac{1+2\ln x}{x}dx+\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{e}\frac{1+2\ln x}{x}dx=\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{\alpha}\left(\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx+\int_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{e}\left(\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$A(\alpha)=[\ln x]_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{\alpha}+\left[(\ln x)^2\right]_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{\alpha}+[\ln x]_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{e}+\left[(\ln x)^2\right]_{\frac{\sqrt{e}}{e}}^{e}=\left[(\ln\alpha)^2+\ln\alpha+\frac{5}{2}\right]\times \text{u.a}\qquad / \ \text{u.a}=4\text{cm}^2$$

$$A(\alpha)=\left[4(\ln\alpha)^2+4\ln\alpha+10\right]\text{cm}^2\ ....(*)$$

ب- لنثبت أن : $A(\alpha)=(\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2+9)cm^2$

لدينا : $f(\alpha)=0$ تكافئ : $-\alpha+2+\dfrac{1+2\ln\alpha}{\alpha}=0$ أي : $\ln\alpha=\dfrac{\alpha^2-2\alpha-1}{2}$ بالتعويض في (*)

نجد : $A(\alpha)=4\left(\dfrac{\alpha^2-2\alpha-1}{2}\right)^2+4\dfrac{\alpha^2-2\alpha-1}{2}+10=(\alpha^2-2\alpha-1)^2+2(\alpha^2-2\alpha-1)+10$

إذن : $A(\alpha)=(\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2+9)cm^2$.