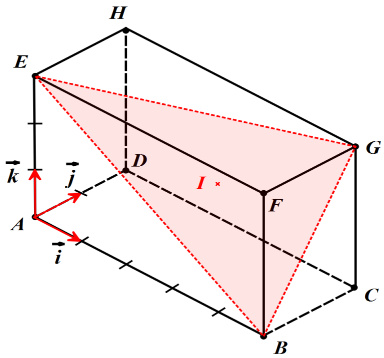
الموضوع رقم (03)

شعبة علوم تجريبية

التمرين الأول : -- (الهندسة الفضائية)



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،

الشكل المقابل $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات وَ I مركز ثقل المثلث EBG

1/ عين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G و H .

2/ عين المعادلة الديكارتية للمستوي (EBG) .

3/ أثبت أن : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}\right)$ ثم استنتج إحداثيات النقطة I .

4/ أ- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DF) .

ب- تحقق أن النقط D ، I وَ F على استقامة واحدة .

5/ نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء تحقق : $\left\|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{GM}\right\|=\sqrt{38}$.

أ- تحقق أن النقطة F تنتمي إلى المجموعة (S) .

ب- عين طبيعة المجموعة (S) وَ عناصرها المميزة .

ج- عين طبيعة تقاطع المجموعتين (EBG) وَ (S) مستنتجاً عناصرها المميزة .

التمرين الثاني : -- (الأعداد المركبة)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ الجملة ذات المجهولين z وَ z' التالية : $\begin{cases}2z'+\overline{z}=2\sqrt{3}+1-3i\\ z'-3\overline{z}=\sqrt{3}-3+2i\end{cases}$

2/ أكتب كل من z وَ z' على الشكل الأسي .

3/ نعتبر العدد المركب Z المعرف كما يلي : $Z=\frac{z}{z'}$.

أ- أكتب على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي العدد المركب Z .

ب- استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{5\pi}{12}$ وَ $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4/ ليكن n عدد طبيعي أكبر تماماً من 1 ،

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقط A ، A_n لواحقها على الترتيب z وَ z^n .

- عين قيم n العدد الطبيعي حتى تكون النقط O ، A وَ A_n على استقامة واحدة .

التمرين الثالث : ----------------------------- (الاحتمالات)

لدينا نردين D_1 و D_2 ، النرد D_1 مغشوش و له كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث $k \in \{1;2;3\}$
نرمز بـ u_k احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k .

1/ احسب u_1 ، u_2 ، u_3 علما أن هذه الأعداد تشكل ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$.

النرد D_2 ليس مغشوش و له كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث $p \in \{1;2\}$
نرمز بـ v_p احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p .

2/ احسب v_1 ، v_2 .

3/ نرمي النردين D_1 و D_2 في آن واحد و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجموع رقمي الوجهين بعد السقوط .

- حدد قانون المتغير العشوائي X .

التمرين الرابع : ----------------------------- (الدالتين اللوغاريتية و الأسية)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، وحدة الطول $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\| = 8cm$

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = e^x + \ln x - \frac{1}{x}$

1/ ادرس تغيرات الدالة g .

2/ اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0{,}5 < \alpha < 1$.

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{\ln x}{e^x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسياً .

2/ اثبت أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسياً .

3/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4/ بين أنه إذا كان $x \in [1;4]$ فإن : $f(x) \in [1;4]$.

5/ أ- نأخذ $\alpha \approx 0{,}7$ ، عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-1} .

ب- أرسم المنحنى (C_f) .

III- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بـ $u_1 = 2$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ مثل على المنحنى (C_f) النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ذات الفواصل u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على الترتيب .

2/ أثبت بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \le u_n \le 4$.

3/ ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4/ استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التصحيح النموذجي للموضوع رقم (03)
شعبة : علوم تجريبية

حل التمرين الأول

1/ تعيين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G و H :

$A(0;0;0)$ ، $B(5;0;0)$ ، $C(5;2;0)$ ، $D(0;2;0)$ ، $E(0;0;3)$ ، $F(5;0;3)$ ، $G(5;2;3)$ ، $H(0;2;3)$.

2/ تعيين المعادلة الديكارتية للمستوي (EBG) :

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظم للمستوي (EBG) ، فهو عمودي على كل من $\overrightarrow{EB}(5;0;-3)$ و $\overrightarrow{EG}(5;2;0)$

منه : $\begin{cases}\overrightarrow{EB}.\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EG}.\vec{n}=0\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}5a-3c=0\\ 5a+2b=0\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}5a=3c\\ 5a=-2b\end{cases}$ منه : $\begin{cases}5a=3c\\ 3c=-2b\end{cases}$ أي : $\begin{cases}a=\dfrac{3}{5}c\\ c=-\dfrac{2}{3}b\end{cases}$

نفرض مثلاً $b=-15$ فنجد : $c=10$ و $a=6$ إذن : $\vec{n}(6;-15;10)$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (EBG) حيث : $\overrightarrow{EM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{EM}(x;y;z-3)$

إذن : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ أي : $6x-15y+10(z-3)=0$ و بالتالي : $(EBG):6x-15y+10z-30=0$.

3/ إثبات أن : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}\right)$

لدينا I مركز ثقل المثلث EBG معناه : $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IG}=\vec{0}$

و حسب علاقة شال نجد : $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}\right)=\vec{0}$ تكافئ : $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

تكافئ : $-3\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}=\vec{0}$ تكافئ : $3\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}$ إذن : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}\right)$.

– استنتاج إحداثيات النقطة I :

لدينا : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}\right)$ معناه : $\begin{cases}x_I=\dfrac{1}{3}(x_B+x_E+x_G)\\ y_I=\dfrac{1}{3}(y_B+y_E+y_G)\\ z_I=\dfrac{1}{3}(z_B+z_E+z_G)\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x_I=\dfrac{10}{3}\\ y_I=\dfrac{2}{3}\\ z_I=\dfrac{6}{3}\end{cases}$ إذن : $I\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{2}{3};2\right)$.

4/ أ– تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DF) :

لدينا $\overrightarrow{DF}(5;-2;3)$ شعاع توجيه للمستقيم (DF) و D نقطة منه ، إذن التمثيل الوسيطي لـ (DF) هو: $\begin{cases}x=5t\\ y=-2t+2\\ z=3t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$.

ب– لنتحقق أن النقط D ، I و F على استقامة واحدة :

النقط D ، I و F على استقامة واحدة يعني أن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (DF)

بتعويض إحداثيات النقطة $I\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{2}{3};2\right)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (DF) نجد : $\begin{cases}\dfrac{10}{3}=5t\\ \dfrac{2}{3}=-2t+2\\ 2=3t\end{cases}$ منه : $\begin{cases}t=\dfrac{2}{3}\\ t=\dfrac{2}{3}\\ t=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

بما أن قيمة t وحيدة فإن $I \in (DF)$ و بالتالي النقط D ، I و F على استقامة واحدة .

5/ أ- لنتحقق أن النقطة I تنتمي إلى المجموعة (S) :

لدينا : $\overrightarrow{EF}(5;0;0)$ و $\overrightarrow{BF}(0;0;3)$ و $\overrightarrow{GF}(0;-2;0)$

منه : $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}=\begin{pmatrix}5+0+0\\0+0-2\\0+3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ و منه : $\left\|\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}\right\|=\sqrt{5^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{38}$ أي : $F \in (S)$.

ب- تعيين طبيعة المجموعة (S) و عناصرها المميزة :

لدينا : $\left\|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{GM}\right\|=\sqrt{38}$ تكافئ : $\left\|3\overrightarrow{IM}\right\|=\sqrt{38}$ تكافئ : $\left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\frac{\sqrt{38}}{3}$

إذن المجموعة (S) هي سطح كرة مركزها النقطة I و نصف قطرها $FI=\frac{\sqrt{38}}{3}$.

ج- تعيين طبيعة تقاطع المجموعتين (EBG) و (S) :

بما أن I مركز الكرة (S) تنتمي إلى المستوي (EBG) فإن المجموعة $(EBG)\cap(S)$ هي دائرة مركزها النقطة I و نصف قطرها $\frac{\sqrt{38}}{3}$.

حل التمرين الثاني

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة الجملة :

لدينا : $\begin{cases}2z'+\overline{z}=2\sqrt{3}+1-3i\;....(1)\\ z'-3\overline{z}=\sqrt{3}-3+2i\end{cases}$ بضرب المعادلة (1) في 3 نجد : $\begin{cases}6z'+3\overline{z}=6\sqrt{3}+3-9i\\ z'-3\overline{z}=\sqrt{3}-3+2i\end{cases}$ بالجمع طرف لطرف

نجد : $7z'=7\sqrt{3}-7i$ منه : $z'=\sqrt{3}-i$

نعوض $z'=\sqrt{3}-i$ في المعادلة (1) نجد : $2\left(\sqrt{3}-i\right)+\overline{z}=2\sqrt{3}+1-3i$ تكافئ : $\cancel{2\sqrt{3}}-2i+\overline{z}=\cancel{2\sqrt{3}}+1-3i$

تكافئ : $-2i+\overline{z}=+1-3i$ تكافئ : $\overline{z}=1-i$ منه : $z=1+i$

إذن حلول الجملة هي الثنائية : $(z;z')=\left(1+i,\sqrt{3}-i\right)$.

2/ كتاب كل من z و z' إلى الشكل الأسي :

⇦ بالنسبة للعدد z : لدينا $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ و $\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، إذن : $z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

⇦ بالنسبة للعدد z' : لدينا $|z'|=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$ و $\arg(z')=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ، إذن : $z'=2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

3/ أ- الشكل الجبري للعدد المركب Z :

لدينا : $Z=\frac{z}{z'}$ منه : $Z=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}=\frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+i^2}{\sqrt{3}^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$

إذن : $Z=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$.

- الشكل الأسي للعدد المركب Z :

لدينا : $Z=\frac{z}{z'}$ منه : $Z=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ إذن : $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

ب- استنتج قيمة لكل من: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

لدينا : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\mathrm{Re}(Z)}{|Z|}$ منه : $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\cos\frac{5\pi}{12}$ إذن : $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

وَ : $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\mathrm{Im}(Z)}{|Z|}$ منه : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sin\frac{5\pi}{12}$ إذن : $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

4/ تعيين قيم n العدد الطبيعي :

تكون النقط O ، A وَ A_n على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان : $\frac{z_n}{z}\in\mathbb{R}$ و هذا يعني : $\arg\left(\frac{z_n}{z}\right)=k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

لدينا : $\frac{z_n}{z}=\frac{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}e^{i\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}e^{i\frac{(n-1)\pi}{4}}$

إذن : $\arg\left(\frac{z_n}{z}\right)=k\pi$ تكافئ : $\frac{(n-1)\pi}{4}=k\pi$ تكافئ : $\frac{n-1}{4}=k$ تكافئ : $n-1=4k$ تكافئ : $n=4k+1$.

حل التمرين الثالث

1/ حساب u_1 ، u_2 ، u_3 :

بما أن u_1 ، u_2 ، u_3 بهذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية فإن : $u_1+u_3=2u_2$

⇦ لدينا : $u_1+u_2+u_3=1$ منه : $2u_2+u_2=1$ و منه : $3u_2=1$ أي : $u_2=\frac{1}{3}$.

⇦ و لدينا : $u_2=u_1+\frac{1}{4}$ منه : $u_1=u_2-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ أي : $u_1=\frac{1}{12}$.

⇦ و لدينا : $u_3=u_2+\frac{1}{4}$ منه : $u_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ أي : $u_3=\frac{7}{12}$.

2/ حساب v_1 ، v_2 :

بما أن النرد D_2 ليس مغشوش فإن : $v_1=v_2=\frac{1}{2}$.

3/ تحديد قانون المتغير العشوائي X :

مجموعة قيم المتغير العشوائي هي : $X=\{2,3,4,5\}$.

⇦ الحادثة $(X=2)$ تعني الحصول على وجهين يحملان الرقم 1 ، إذن : $P(X=2)=u_1\times v_1=\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}$ منه : $P(X=2)=\frac{1}{24}$.

⇦ الحادثة $(X=3)$ تعني الحصول على وجهين أحدهما يحمل الرقم 1 والآخر الرقم 2 ، إذن :

$P(X=3)=u_1\times v_2+u_2\times v_1+=\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$ منه : $P(X=3)=\frac{5}{24}$.

⇦ الحادثة $(X=4)$ تعني الحصول على وجهين أحدهما يحمل الرقم 1 والآخر الرقم 3 أو أحدهما يحمل الرقم 2 والآخر الرقم 2 ،

إذن : $P(X=3)=u_3\times v_1+u_2\times v_2=\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{24}+\frac{1}{6}$ منه : $P(X=4)=\frac{11}{24}$.

الحادثة $(X=5)$ تعني الحصول على وجهين أحدهما يحمل الرقم 3 والآخر الرقم 2، إذن : $P(X=4)=u_3\times v_2=\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}$

منه : $P(X=5)=\frac{7}{24}$.

قانون الاحتمال موضح في الجدول التالي :

x_i	2	3	4	5	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{7}{24}$	1

حل التمرين الرابع

I– 1/ دراسة تغيرات الدالة g :

① مجموعة التعريف : $D_g=]0;+\infty[$

② حساب النهايـات : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\underbrace{e^x}_{1}+\underbrace{\ln x}_{-\infty}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{-\infty}\right]=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\underbrace{e^x}_{+\infty}+\underbrace{\ln x}_{+\infty}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right]=+\infty$

③ اتجاه التغير : الدالة g معرفة وَ قابلة للاشتقاق على D_g حيث : $g'(x)=e^x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

لدينا من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x>0$ وَ $\frac{1}{x^2}>0$ وَ $\frac{1}{x}>0$ إذن : $g'(x)>0$ وَ بالتالي g دالة متزايدة تماماً .

④ جدول التغيرات :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2/ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α :

⇦ لدينا : $g(1)\approx 1{,}72$ وَ $g(0{,}5)=-1{,}04$ منه : $g(0{,}4)\times g(0{,}5)<0$

⇦ g دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0{,}5;1]$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}5<\alpha<1$.

3/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أنه :

⇦ إذا كان : $x\in]0;\alpha[$ فإن : $g(x)<0$ ⇦ إذا كان : $x\in]\alpha;+\infty[$ فإن : $g(x)>0$.

II– 1/ حساب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x-\frac{\overbrace{\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{e^x}_{1}}\right]=+\infty$ منه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

2/ حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{e^x}=0\times0=0$ منه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}=0$.

الاستنتاج : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\underbrace{\frac{\ln x}{e^x}}_{0}\right]=+\infty$ ، نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$

3/ لنبين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

الدالة f معرفة وَ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}e^x-e^x\ln x}{e^{2x}}=1-\frac{e^x\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)}{e^{2x}}=1-\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^x}=\frac{e^x+\ln x-\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{g(x)}{e^x}$ منه : $f'(x)=\frac{g(x)}{e^x}$

– جدول تغيرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$ لأن : $e^x>0$ إذن :

⇦ إذا كان : $x\in]0;\alpha[$ فإن : $f'(x)<0$ وَ بالتالي f دالة متناقصة تماماً .

⇦ إذا كان : $x\in[\alpha;+\infty[$ فإن : $f'(x)\geq 0$ وَ بالتالي f دالة متزايدة تماماً .

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4/ لنبين أنه إذا كان $x\in[1;4]$ فإن $f(x)\in[1;4]$:

لدينا $x\in[1;4]$ معناه : $1\leq x\leq 4$ وَ f دالة متزايدة تماماً على المجال $[1;4]$

منه : $f(1)\leq f(x)\leq f(4)$ تكافئ: $1\leq f(x)\leq 3{,}98$ تكافئ: $1\leq f(x)\leq 4$ إذن: $f(x)\in[1;4]$.

5/ أ– تعيين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-1} :

لدينا : $\alpha\approx 0{,}7$ منه $f(\alpha)\approx 0{,}7-\frac{\ln 0{,}7}{e^{0{,}7}}\approx 0{,}877$ إذن : $f(\alpha)=0{,}9$

ب– رسم المنحنى :

III– 1/ إنشاء النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 : (أنظر الشكل)

2/ لنثبت بالتراجع من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $p(n):1\leq u_n\leq 4$

⇦ لنتحقق من صحة $p(1)$: من أجل $n=1$ لدينا : $u_1=2$ أي : $1\leq u_1\leq 4$ منه $p(1)$ محققة .

⇦ نفرض صحة $p(n)$ أي : $1\leq u_n\leq 4$ و نبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $1\leq u_{n+1}\leq 4$

لدينا حسب فرضية التراجع أن $1\leq u_n\leq 4$ وَ f دالة متزايدة تماماً

منه : $f(1)\leq f(u_n)\leq f(4)$ وحسب ما سبق نجد : $1\leq u_{n+1}\leq 4$ منه الخصية $p(n+1)$ صحيحة .

إذن من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $1\leq u_n\leq 4$.

3/ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n<0$

لأن من أجل كل $x\in[1;4]$ لدينا : $f(x)-x<0$

منه (u_n) متتالية متناقصة تماماً .

4/ استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

بما أن $1\leq u_n$ أي (u_n) محدودة من الأسفل وَ متناقصة تماماً فهي متقاربة

إذن (u_n) متقاربة تعني : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=\ell$

لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$ منه : $\ell=f(\ell)$ و منه : $\ell=\ell-\frac{\ln\ell}{e^\ell}$

و منه : $\frac{\ln\ell}{e^\ell}=0$ أي : $\ell=1$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=1$.