✶ النهايات ✶

① نهايات بعض الدوال المرجعية

الدالة مقلوب	$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$	$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{x}=+\infty$
الدالة جذر	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$	$\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$	$\lim_{x\xrightarrow{<}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$
الدالة x^n $n\in\mathbb{N}^*$	$\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ مع n فردي	$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

حالات عدم التعيين	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$
حالات يمكن التعيين	$\frac{\ell}{0}=\infty$	$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{\ell}{\infty}=0$	$\frac{0}{\infty}=0$
طرق الإزالة	بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط وَ المقام بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب وَ نقسم في المرافق عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك			

③ مبرهنات في النهايات

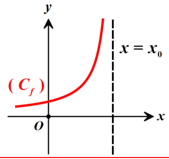
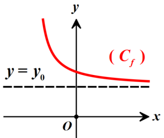
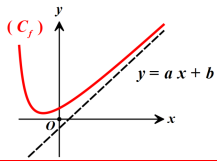
مبرهنة التركيب	نعتبر u ، v وَ f ثلاث دوال حيث $f=v\circ u$ ، وَ لتكن a ، b وَ c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x\to a}u(x)=b$ وَ $\lim_{x\to b}v(x)=c$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=c$
مبرهنة الحصر	إذا كان : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ وَ $\lim_{x\to a}h(x)=\ell$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$
مبرهنات المقارنة	إذا كان : $f(x)\ge g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ إذا كان : $f(x)\le g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ إذا كان : $\lvert f(x)-\ell\rvert\le g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=0$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$

④ نهايات الدوال المثلثية

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

★ المستقيمات المقاربة ★

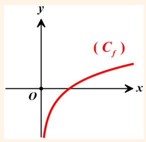
لتكن f دالة عددية وَ $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

النهاية	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=-\infty$ أو	$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=x_0$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=y_0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=y_0$	$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\left(a\,x+b\right)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f\left(x\right)-\left(a\,x+b\right)\right]=0$	$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=a\,x+b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	

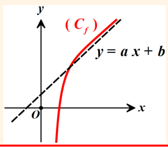
إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=\pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y=a\,x+b$ ، ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

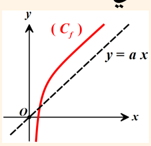
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ← $\left(C_f\right)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $\left(x'x\right)$



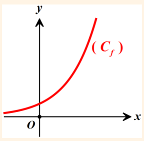
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\quad\left(a\neq0\right)$ ← ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-a\,x\right]$
  - $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-a\,x\right]=b$ ← $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=a\,x+b$ بجوار ∞



  - $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-a\,x\right]=\infty$ ← $\left(C_f\right)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y=a\,x$



- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ← $\left(C_f\right)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $\left(y'y\right)$



★ الاستمرارية وَ مبرهنة القيم المتوسطة ★

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

استمرارية الدالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=\ell$ حيث $\ell\in\mathbb{R}$	
استمرارية الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)=f(a)=\ell_1$ حيث $\ell_1\in\mathbb{R}$	إذا كان $\ell_1=\ell_2$ فإن f مستمرة عند a
استمرارية الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x)=f(a)=\ell_2$ حيث $\ell_2\in\mathbb{R}$	

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

	f دالة متزايدة تماماً على I	f دالة متناقصة تماماً على I
المجال I	$f(I)$	$f(I)$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x);\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \xrightarrow{<} b} f(x);\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)\right[$

③ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة ❶	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❷	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❸	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a وَ b بحيث $f(\alpha)=0$.
مبرهنة ❹	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$

★ الاشتقاقية ★

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

قابلية اشتقاق الدالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$	
قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$	إذا كان $f'_d(a)=f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a
قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$	

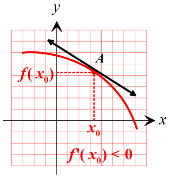
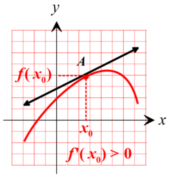
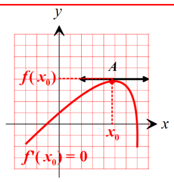
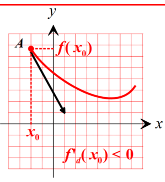
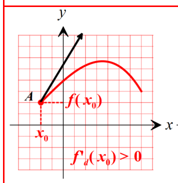
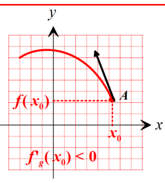
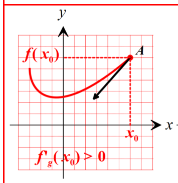
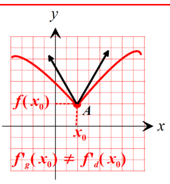
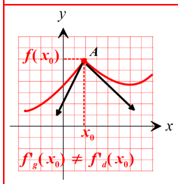
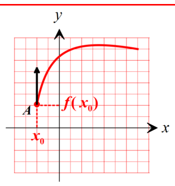
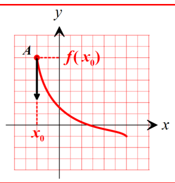
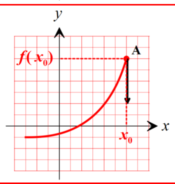
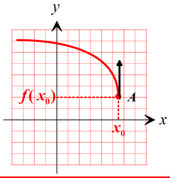
② مشتقات الدوال المألوفة

مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a حيث $a\in\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	a	$a\,x$
$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$	x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(a\,x+b)$	$\cos(a\,x+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(a\,x+b)$	$\sin(a\,x+b)$

③ المشتقات وَ العمليات على الدوال

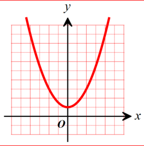
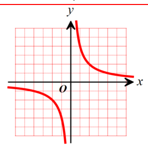
الدالة	$u\pm v$	$a\,u$	$u\times v$	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'\pm v'$	$a\,u'$	$u'v-v'u$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$v'.u'(v)$

④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

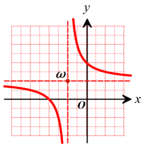
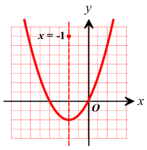
النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y=f(x_0)$ 
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0)=b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية .  
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 

★ شفعية دالة - مركز تناظر وَ محور تناظر ★

① شفعية دالة

	التعريف	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
الدالة الزوجية	f دالة زوجية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x) = f(x)$	(C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر	
الدالة الفردية	f دالة فردية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x) = -f(x)$	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	

② مركز تناظر وَ محور تناظر دالة

	التعريف	التمثيل البياني
مركز تناظر	$\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$	
محور تناظر	$x = \alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha - x) \in D_f$ فإن : $f(2\alpha - x) = f(x)$	

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f وَ (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

إشارة الفرق $f(x) - y$	الوضعية النسبية
$f(x) - y > 0$	(C_f) يقع فوق (Δ)
$f(x) - y < 0$	(C_f) يقع تحت (Δ)
$f(x) - y = 0$	(C_f) وَ (Δ) يتقاطعان

★ إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ★

ليكن $\left(C_f\right)$ وَ $\left(C_g\right)$ منحنيين للدالتين f وَ g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

الدالـة	التمثيل البيـاني
$f(x)=g(x)+b$	$\left(C_f\right)$ هو صورة $\left(C_g\right)$ بالانسحاب الذي شعاعه $b\,\vec{j}$
$f(x)=g(x+a)$	$\left(C_f\right)$ هو صورة $\left(C_g\right)$ بالانسحاب الذي شعاعه $-a\,\vec{i}$
$f(x)=g(x+a)+b$	$\left(C_f\right)$ هو صورة $\left(C_g\right)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$
$f(x)=-g(x)$	المنحنيين $\left(C_f\right)$ وَ $\left(C_g\right)$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x)=g(-x)$	المنحنيين $\left(C_f\right)$ وَ $\left(C_g\right)$ متناظران بالنسبة لمحور التراتيب
$f(x)=-g(-x)$	المنحنيين $\left(C_f\right)$ وَ $\left(C_g\right)$ متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x)=g(\lvert x\rvert)$	▪ إذا كان $x\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه $\left(C_f\right)$ ينطبق على $\left(C_g\right)$ ▪ إذا كان $x\leq 0$ فإن $f(x)=g(-x)$ منه $\left(C_f\right)$ هو نظير $\left(C_g\right)$ المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور التراتيب (f دالة زوجية)
$f(x)=\lvert g(x)\rvert$	▪ إذا كان $g(x)\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه $\left(C_f\right)$ ينطبق على $\left(C_g\right)$ ▪ إذا كان $g(x)\leq 0$ فإن $f(x)=-g(x)$ منه $\left(C_f\right)$ نظير $\left(C_g\right)$ بالنسبة لمحور الفواصل

★ المناقشة البيانية ★

ليكن $\left(C_f\right)$ منى الدالة f وَ (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y=ax+b$.

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m\in\mathbb{R}$)
$f(x)=m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل
$f(x)=ax+m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)
$f(x)=mx+b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات الدورانية حول النقطة $(0;b)$
$f(x)=m^2$ أو $f(x)=\lvert m\rvert$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى ($y=\lvert m\rvert$ أو $y=m^2$)
$f(x)=f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل معادلتها $y=f(m)$

ملاحظات :
- نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس .

http://touamimaths.webnode.fr

سلسلة الامل في الرياضيات رقم (01)

الشعب : علوم تجريبية ، تقني رياضي ، رياضيات

إعداد الاستاذ : توامي عمر — المستوى : ثالث ثانوي

الدوال العددية

التمرين (01)

احسب النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 - 2x^2 + x\right)$

/2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x^2 + 7\right)$

/3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^7 - x^4 - 2\right)$

/4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 2x}{x - 1}$

/5 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + x - 2}{x + 3}$

/6 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^5 - x}{x^6 - 3x + 11}$

التمرين (02)

احسب النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$

/2 $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 25}$

/3 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x - 3x^2}{x^2 + 4x + 3}$

/4 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{(x - 4)(1 - x)}$

/5 $\lim\limits_{x \to -2} 2x - 1 + \dfrac{2}{(x + 2)^2}$

/6 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 6x^2 + 4x - 1}{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}$

التمرين (03)

احسب النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{3x}{2 - x}$

/2 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{|x|}{x^3}$

/3 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \dfrac{|9 - x^2|}{x - 3}$

/4 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \dfrac{2 - 3x}{x^3 - 1}$

/5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{x^2 - 1}{|x^2| - |x|}$

/6 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{|-x - 2| - 1}$

التمرين (04)

احسب النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \dfrac{3 - x}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

/2 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x - 2}$

/5 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x^2 + 4} - 6}$

/6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1}$

3/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+3}\right)$ 7/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sqrt{x+1}-x+1}{\sqrt{x+4}-2}$

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-2x+1\right)$ 8/ $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{-x^2-x+12}-\sqrt{x^2+x}}$

التمرين (05)

احسب النهايات التالية :

1/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 3x}$ 5/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\sin x-\sqrt{2}}{1-\tan x}$

2/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$ 6/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3/ $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ 7/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

4/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ 8/ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x.\tan 5x}{\tan(2x)\times\sin(2x)}$

التمرين (06)

1/ خمن النهاية عند 1 للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

2/ أوجد مجالاً I مركزه 1 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن : $f(x)>10^6$

التمرين (07)

1/ خمن النهاية عند 2 للدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$

2/ أوجد عدداً حقيقياً α بحيث إذا كان $x\in]1-\alpha;1+\alpha[$ فإن : $f(x)>1000$

التمرين (08)

عين نهاية الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{6x-1}{4x-1}$ عند : $+\infty$

ثم أوجد عدداً حقيقياً A بحيث إذا كان $x>A$ فإن : $f(x)\in]1,4;1,6[$

التمرين (09)

باستعمال نهاية حصر دالتين ، عين النهايتين التاليتين :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+4(-1)^x}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x-1}$

التمرين (10)

باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\frac{\pi}{4}$ لكل من الدالتين : $x \mapsto \tan x$ و $x \mapsto 2\cos x - \sqrt{2}$

-احسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$

التمرين (11)

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x(1+\sin x)}{x - \sqrt{x^2+1}}$

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}} \prec -2x$

3/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $f(x) \leq -4x^2$

ثم احسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$

التمرين (12)

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \sqrt{2x^2+x+1} - x$

1/ أثبت أن $\sqrt{2}x \geq \sqrt{2x^2+x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}_+$.

– استنتج : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2/ أحسب من جديد $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، لكن بطريقة أخرى .

التمرين (13)

f دالة عددية معرفة بالعبارة التالية : $f(x) = \frac{2x.\sin x}{x^2-1}$

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \succ 1$ أن : $f(x) \leq \left|\frac{2x}{x^2-1}\right|$

3/ هل تقبل الدالة f نهاية عند $(+\infty)$ ؟

التمرين (14)

– أوجد تبعاً لقيم العدد الطبيعي n النهايات التالية :

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^n + x^{11} - 4x + 2)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n - x^8 - x^4 + 3}{x^9 + 4x + 2}$

التمرين (15)

ليكن : n و m عددان طبيعيان أحسب : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{n.x^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1)}{x^m - 1}$

أتمنى لكم التوفيق الأستاذ توامي عمر في خدمتكم
touami.omar@gmail.com

التمرين (16)

أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^4+2}}+......+\frac{x}{\sqrt{x^4+x}}\right)$

التمرين (17)

نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5}-5}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x^2+5x+23}-9}$

1/ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2/ بين أن لكل x من D_f : $f(x)=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}}{\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2}+\frac{4x+13}{\sqrt{4x^2+5x+23}+7}}$

3/ استنتج أن : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{77}{189}$.

التمرين (18)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=-x^2+x+2;\ x\leq1 \\ f(x)=0{,}5x+1;\ x>1 \end{cases}$

– ادرس استمرارية الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$.

التمرين (19)

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=(x-2).\left|1+\frac{1}{x-2}\right|$

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجال تعريفها.

3/ نفرض أن $f(2)=-1$ ، ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=1$

التمرين (20)

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{3x^2-12+|x+2|}{(x+1).|3x^2-x-14|}$ مع : $f(-2)=-1$

ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=-2$

التمرين (21)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{1-x} & ;\ x<1 \\ \frac{x^2+x-2}{x+1} & ;\ x\geq1 \end{cases}$

– ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=1$.

التمرين (22)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2-\sqrt{4+x^2}}{x} & ; \ x\neq 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

– عين قيمة α حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين (23)

نعتبر على المجال $[0;\pi]$ الدالة f المعرفة بـ :
$$\begin{cases} f(x)=\cos x+\dfrac{|\cos x|}{\cos x} & ; \ x\neq \dfrac{\pi}{2} \\ f(x)=1 ; x=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

– ادرس استمرارية الدالة f عند $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

التمرين (24)

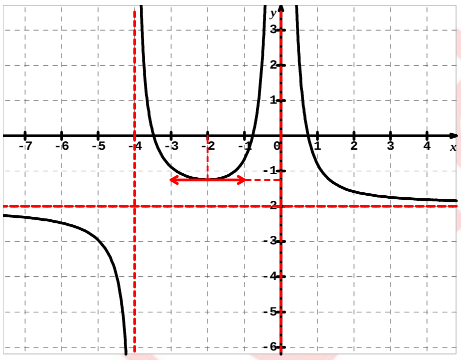
نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\sin\left(\dfrac{x^3}{x^2-4x+3}\right)$

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ أثبت أن الدالة f عبارة عن مركب دالتين يطلب تعينها .

3/ ادرس استمرارية الدالة f .

التمرين (25)



إليك في الشكل المقابل التمثيل البياني (C_f) للدالة f

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ عين نهاية $f(x)$ عند كل من : $-\infty$, -4 , 0 , $+\infty$

3/ شكل جدول تغيرات الدالة f

4/ جد معادلات كل المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

5/ من بين المجالات التالية حدد المجالات التي تكون فيها الدالة f مستمرة :

$I_1=]-1;3[$ ، $I_2=]2;+\infty[$ ، $I_3=]-4;0[$ ، $I_4=]-\infty;-4]$

التمرين (26)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$

1/ تحقق أنه من أجل كل h غير معدوم يكون : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{h^2+3h+3}{(h+1)\sqrt{h+1}+1}-2$

2/ بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 محددا $f'(1)$.

3/ استنتج أن الدالة f مستمرة عند 1.

التمرين (27)

(C_f) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 + |x-1|$

1/ تحقق من أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2/ برهن أنه من أجل $h \neq 0$ فإن : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = h + 2 + \dfrac{|h|}{h}$

3/ هل العبارة $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ تقبل نهاية عندما يؤول h إلى 0 .

4/ أعط تفسيراً هندسياً للجواب عن السؤال الثاني ثم اكتب معادلتي نصفي المماسين للمنحنى (C_f) في هذه الحالة

التمرين (28)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(x+1)}{1-x}}$

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند 0 و -1 ، ثم فسر النتيجة هندسياً

3/ أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$.

التمرين (29)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

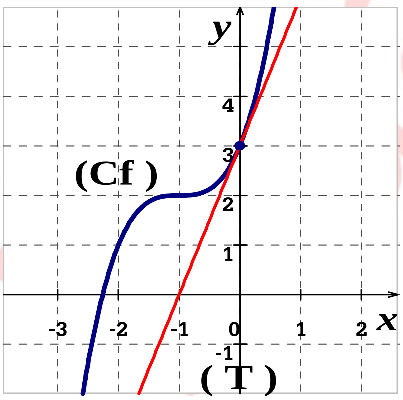
1/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\sqrt{x^2+1} \times f'(x) = f(x)$

2/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(x^2+1)f''(x) + x.f'(x) - f(x) = 0$

التمرين (30)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث (C_f) تمثيلها البياني و المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها 0

كما هو موضح في الشكل المقابل .



1/ – عين بيانيا القيم $f'(0)$ ، $f'(-1)$

– اكتب معادلة المماس (T)

2/ خمن بيانياً وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

3/ حل بيانيا المتراجحات التالية :

$f'(x) \leq 0$ ، $f'(x) > 0$ ، $f(x) \leq 3$ ، $f(x) > 3$

التمرين (30)

– أوجد نقط الانعطاف لمنحنى الدالة f التي فواصلها $x \in [-\pi;+\pi]$ حيث :

$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$

التمرين (31)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{3x^2+a.x+b}{x^2+1}$ مع a و b عددان حقيقيان.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم .

هل يوجد عددان a و b حيث تكون لمماس المنحنى (C_f)، معادلته $y=4x+3$ عند نقطته ذات الفاصلة 0 ؟

التمرين (32)

a عدد حقيقي ، نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=a.x^3+3x^2+3x$

– هل يوجد عدد a حيث تكون للدالة f قيمة حدية محلية من أجل $x=1$ ؟

التمرين (33)

نرمز إلى f', f'', f''' .... $f^{(n)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f مع $n\in\mathbb{N}^*$

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x}$

1/ احسب : $f'(x)$ ، $f''(x)$ ، $f'''(x)$

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times n!}{x^{n+1}}$.

التمرين (34)

– بين أن المعادلة : $x^5+x^3+3x-4=0$ تقبل على الأقل حل في المجال $]0;1[$

التمرين (35)

– بين أن المعادلة : $x^3+2x-1=0$ تقبل حلاً وحيدا في المجال $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

التمرين (36)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;2]$ بـ : $f(x)=x^4-x^2+1$

1/ ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2/ بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1;2[$

3/ باستعمال حاسبة بيانية أوجد قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـ α .

التمرين (37)

– بين أن المعادلة : $\frac{1}{x+2}=2\cos x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

التمرين (38)

نعتبر الدالتين : $f : x \mapsto \sqrt{x}+1$ و $g : x \mapsto -x^3$

بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حيث : $-\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{8}$

التمرين (39)

1/ بين أن المعادلة : $x.\sqrt{x}+\sqrt{x}-1=0$ تقبل حلاً وحيداً في α حيث : $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$

2/ حدد بدلالة α مجموعة حلول المتراجحة : $x.\sqrt{x}+\sqrt{x}-1<0$

التمرين (40)

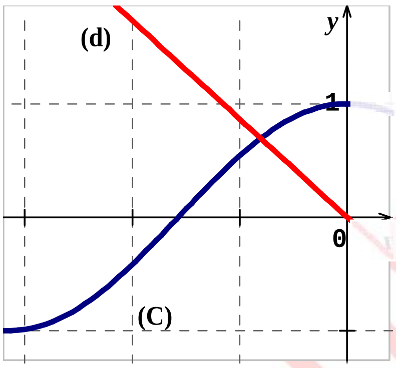
1/ بين أن المعادلة $-x^3-x+4=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ ، ثم عين حصرا لهذا الحل بالتقريب 10^{-3}

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي α المعادلة $-x^3-x+4=\alpha$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$.

التمرين (41)

في الشكل المقابل المنحنى البياني (C) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \cos x$

و (d) هو التمثيل البياني للدالة $x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ على المجال $I=[-\pi;0]$



1/ خمن عدد حلول المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ في المجال I

2/ نعتبر الدالة المعرفة على I كما يلي: $f(x)=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}x$

– تحقق أن الدالة f تقبل الاشتقاق على I و أحسب $f'(x)$

– شكل جدول تغيرات الدالة f .

3/ استنتج أن المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا وحيدا α

في المجال I .

التمرين (42)

يريد سائق سيارة الذهاب من الموقع A إلى الموقع B في أقصر مدة زمنية ممكن

فيضطر عند موقع H من الطريق إلى الانحراف و المرور

عبر حقل مجاور للطريق بدلا من الوصول إلى الموقع O

و من ثمة إلى الموقع B ، كما هو موضح في الشكل المقابل .

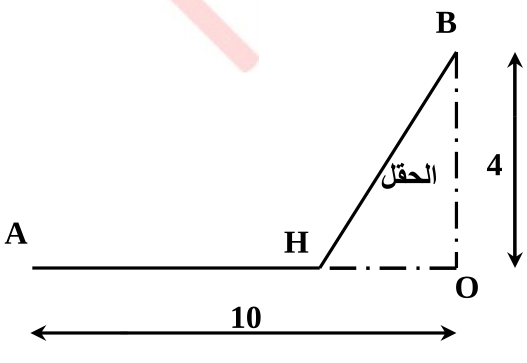
إذا علمت أن سرعة السائق على الطريق $40\ km/h$

و سرعته خلال المرور بالحقل هي $40\ km/h$

نضع : $AO=10$ و $BO=4$

– حدد موقع النقطة H التي من أجلها يكون الوقت

المستغرق للوصول من A إلى B أقصر ما يمكن .



التمرين (43)

f دالة عددية معرفة و قابلة للاشتقاق على المجموعة D

برهن في كل حالة على كل ما يلي :

1/ إذا كانت الدالة f زوجية ، فإن دالتها المشتقة f' فردية .

2/ إذا كانت الدالة f فردية ، فإن دالتها المشتقة f' زوجية .

3/ إذا كانت الدالة f دورية و دورها T ، فإن دالتها المشتقة f' دورية و دورها T .

التمرين (44)

f دالة عددية معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث : $\alpha\in]1;2[$

3/ أعط قيمة مقربة لـ α بتقريب 10^{-2} بالزيادة

4/ تحقق من صحة : $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha-1=0$.

التمرين (45)

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{-2x^2+7x-5}{2x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية لـ (C_f).

2/ بين أن ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر لـ (C_f) .

3/ هل توجد نقطة أو نقط من المنحنى (C_f) يكون فيها ميل المماس يساوي 3 ؟

4/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ω .

5/ أحسب الصور : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

6/ ارسم (Δ) و (C_f) .

7/ لتكن g الدالة العددية المعرفة بـ : $g(x)=\frac{-2x^2+7|x|-5}{2|x|-1}$

أ- بين أن g دالة زوجية .

ب- فسر كيف يمكن رسم منحنى الدالة g ثم أرسمه في نفس المعلم السابق .

التمرين (46)

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ عين العددين الحقيقيان α و β بحيث : $f(x)=1+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$

2/ أ- ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية لـ (C_f).

ب- أكتب معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 5$

3/ أثبت أن المستقيم : $(\Delta): x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

4/ باستعمال تغيرات الدالة f عين مجموعة تعريف الدالة : $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3}}$

5/ ارسم (Δ) وَ (C_f)

6/ ليكن m وسيط حقيقي ، f_m دالة عددين للمتغير الحقيقي x معرفة بـ : $f(x) = \dfrac{x^2 - m.x - 15}{x^2 - m.x - 3}$

أ- عين قيم m التي من أجلها منحنى الدالة f_m يمر بالنقطة $(1;4)$.

ب- بين أن جميع المنحنيات للدالة f_m تمر بنقطة ثابتة يطلب تعينها .

التمرين (47)

I- نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = a.x + b + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ ، (C_f) تمثلها البياني

- عين العددين الحقيقيان a وَ b حتى يقبل (C_f) مماساً يوازي محور الفواصل عند النقطة $(3;7)$

II- نعتبر الآن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 3 + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f .

2/ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيداً x_0 حيث : $-4 \prec x_0 \prec -3$

3/ أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعينه

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

4/ أرسم المنحنى (C_f).

5/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة : $x^3 - (2m-1)x^2 + (4m-5)x - 2m + 7 = 0$

التمرين (48)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 3x - 1$

1/ ادرس تغيرات الدالة g .

2/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $\alpha \in]1,6;1,7[$

3/ استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{1-x}{x^3+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $4cm$)

1/ بين أن : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، أعط تفسيراً بيانياً للنتيجتين .

2/ أثبت أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

3/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4/ بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ بالتقريب 10^{-1} .

5/ عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

6/ أ- تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا: $f(x)-(x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$

ب- استنتج وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (Δ) ، ماذا تلاحظ؟

7/ ارسم (Δ) و (C_f).

التمرين (49)

لتكن f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي : $f(x)=|x+2|+\dfrac{4x}{x^2-4}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ أ- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- ادرس نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

2/ أ- اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

ب- احسب الدالة المشتقة $f'(x)$ و ادرس إشارتها .

3/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4/ أ- بين أن المستقيمين: $(\Delta): y=x+2$ و $(\Delta'): y=-x-2$ مقاربين للمنحنى (C_f).

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ') .

5/ لتكن A نقطة من (C_f) ذات الفاصلة المعدومة .

- بين أن المماس (T) لـ (C_f) في النقطة A يوازي $(x'x)$.

- أدرس وضعية (C_f) مع المماس (T) ، ماذا تستنتج؟

6/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين n_0 ، n_1 حيث α فاصلة n_0 و n_1 فاصلة مع: $\alpha \succ$

7/ بين أن α هو جذر للمعادلة : $x^3+2x^2-8=0$ و $1,5 \prec \alpha \prec 1,6$

8/ أنشئ كل من (Δ)، (Δ') ، (T) و (C_f) .

التمرين (50)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3-3x-6}{2(x+2)}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ برهن أنه يوجد عددان حقيقيان a و b حيث من أجل كل $x \neq 2$ ، تكون: $f(x)=a(x-1)^2+\dfrac{b}{x+2}$

2/ أ- ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجال تعريفها

ب- أنشئ جدول تغيرات الدالة f .

3/ نسمي (Γ) القطع المكافئ ذي المعادلة : $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ حيث $x \neq 2$.

P و M نقطتان من (Γ) و (C_f) على الترتيب ، لهما الفاصلة x مشتركة .

أ- احسب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{PM}$، ثم استنتج أن لما x يؤول إلى $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ فإن المسافة PM تؤول إلى 0

فسر هذه النتيجة هندسياً .

ب- أرسم في نفس الشكل المنحنيين (Γ) و (C_f)

التمرين (51)

I- ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x-1}{1-2x}\,;\,x\le 0\\[2mm] 2x-\dfrac{1}{(x+1)^2}\,;\,x>0\end{cases}$$

1/ أ- عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب- ادرس استمرارية وَ قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$ ، فسر النتيجة هندسياً

2/ ادرس تغيرات الدالة f .

3/ بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين

4/ بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما $x_1=-1$ وَ x_2 حيث : $0<x_2<1$

5/ ارسم المنحنى (C_f) .

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي : $g(x)=\dfrac{3\cos^2 x-2\cos x-1}{2\cos x+1}$

1/ بين أن g دالة زوجية .

2/ أثبت أن g عبارة عن مركب دالتين يطلب تعينها .

3/ استنتج عبارة $g'(x)$ ، ماذا يمكن القول حول اتجاه تغير الدالة g .

التمرين (52)

f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f_m(x)=\dfrac{x^2-m.x}{x-1}$ حيث: $m\in\mathbb{R}$

(C_m) المنحنى الممثل للدالة f_m في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشترك في مستقيم مقارب ثابت يطلب تعين معادلته مع $m\neq 1$

2/ بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعينها .

3/ عين الأعداد الحقيقية a,b وَ c بحيث : $f_m(x)=a.x+b+\dfrac{c}{x-1}$ مع $m\neq 1$

4/ - برهن أن النقطة $\omega_m(1;m+2)$ مركز تناظر لـ (C_m) .

- ما هي مجموعة النقط ω_m عندما يتغير m في $\mathbb{R}-\{1\}$.

5/ أحسب $f'_m(x)$ مشتقة الدالة f_m و استنتج :

- قيم m التي من أجلها تحافظ الدالة f_m على اتجاه تغيراتها .
- قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m نهايتين حديتين عظمى و صغرى .

التمرين (53)

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{3x^2-3}$

وَ (C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f وَ مجموعة اشتقاقها .

2/ هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند العدد الحقيقي 1 من اليمين ؟ علل إجابتك .

3/ أحسب الدالة المشتقة للدالة f ثم أدرس تغيراتها .

4/ - أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى و المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

– أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل مستقيم مقارب .

5/ برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 2 ثم أعط معادلة لكل منهما .

6/ أرسم بعناية المماسين و المنحنى (C_f) .

التمرين (54)

f الدالة العددية المعرفة بالعبارة : $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ عين D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2/ – أحسب النهايتين $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

– احسب : $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x - 3)$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

– ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيمين (d) الذي معادلته : $y = 2x - 3$.

3/ هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟

4/ عين مجال تعريف الدالة f' ثم أحسب : $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5/ ارسم المستقيمات المقاربة ثم المنحنى (C_f) .

التمرين (55)

نعتبر f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 2 - \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ ادرس تغيرات الدالة f وَ الفروع اللانهائية لـ (C_f) .

2/ أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذراً x_0 حيث : $1,01 \prec x_0 \prec 1,5$.

3/ ارسم المنحنى (C_f) .

4/ لتكن g دالة عددية حيث: $g(x) = -x + 2 - \dfrac{1}{\sqrt{-1 - x}}$ وَ (C_g) تمثيلها البياني

– عين مجموعة تعريف الدالة g .

– بين أن (C_g) هو صورة (C_f) بواسطة تحويل نقطي بسيط يطلب تعينه .

– استنتج رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (C_f) .

5/ أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيات : $y = x + 2$ ، $x = 2$ وَ $x = 3$

التمرين (56)

نعتبر الدالتين f وَ g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3x + \dfrac{5}{2}\sqrt{x^2 + 1}$ وَ $g(x) = 3x - \dfrac{5}{2}\sqrt{x^2 + 1}$

نضع (C_f) وَ (C_g) تمثيلهما البيانيين في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ قارن بين $f(x)$ وَ $g(x)$.

2/ أدرس تغيرات الدالتين f وَ g .

3/ أرسم المنحنيين (C_f) وَ (C_g) في نفس المعلم .

4/ نعتبر المنحنى $(d) = (C_f) \cup (C_g)$

– بين أن معادلة (Γ) هي : $4y^2+11x^2-24x.y+25=0$

5/ ليكن الشعاع $\vec{u}$ من المستوي حيث : $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}$

نرمز بـ $(x;y)$ لإحداثيتي النقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ وَ بـ $(x';y')$ إحداثياتها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{u})$

أ– عبر عن x وَ y بدلالة x' و y'

ب– عين معادلة (Γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{u})$.

التمرين (57)

لتكن f دالة عددية معرفة بـ : $f(x)=\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-1} \ ; \ x\in]-\infty;1] \\ |x-2|+\dfrac{x-1}{x-2} \ ; \ x\in]1;+\infty[\end{cases}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f .

2/ أدرس اشتقاق الدالة f على يمين $x=1$ ، فسر النتيجة هندسياً .

3/ أدرس تغيرات الدالة f وَ الفروع اللانهائية لـ (C_f).

4/ أنشئ المنحنى (C_f).

5/ أحسب مساحة الحيز المستوي ، مجموعة النقط $n(x;y)$ حيث : $3\le x\le 4$ وَ $x-1\le y\le f(x)$

6/ عين معادلة المنحنى (Γ) صورة المنحنى (C_f) الذي يمثل الدالة f على المجال $]-\infty;-1]$ بالتناظر المركزي الذي مركزه $\omega(2;1)$.

التمرين (58)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x^2-1|}-1}{x} ; x\neq 0 \\ 0 ; x=0 \end{cases}$

و ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ بين أن f دالة فردية ، فسر النتيجة هندسيا .

2/ ادرس استمرارية وَ اشتقاقية الدالة f على يمين $x_0=0$

3/ أ– احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، أعط التأويل الهندسي للنتيجة .

ب– ادرس اشتقاق الدالة f على يمين وَ على يسار $x_1=1$ ثم أول النتيجتين المحصل عليهما

ج– بين أن : $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \ ; \ 0<x<1 \\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \ ; \ x>1 \end{cases}$

د– شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

4/ أنشئ المنحنى (C_f).

التمرين (59)

نعتبر الدالة f_m المعرفة كما يلي : $f_m(x)=m.x+2\sqrt{m^2x^2-1}$ مع m عدد حقيقي غير معدوم .

ليكن (C_m) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ ناقش حسب قيم m مجموعة تعريف الدالة f_m .

2/ هل المنحنى (C_m) له مستقيمات مقاربة مائلة ؟

3/ ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_m عند : $\frac{1}{m}$ و $-\frac{1}{m}$ ، ماذا تستنتج ؟

4/ نضع : $m=\frac{1}{3}$ ، أرسم $(C_{\frac{1}{3}})$.

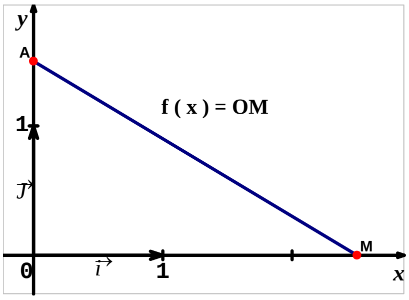
5/ لتكن g دالة معرفة بـ : $g(x)=-\frac{1}{3}.x-2\sqrt{\frac{1}{9}x^2-1}$ ، (C_g)

– أثبت أن (C_g) و $(C_{\frac{1}{3}})$ متناظران بالنسبة إلى $(x'x)$ ، ثم أرسم في نفس المعلم السابق (C_g).

التمرين (60)

ليكن $(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي ، M نقطة متغيرة إحداثييها $(x;0)$ مع $x\geq 0$

نضع : $f(x)=OM$ و (أنظر الشكل)



1/– تحقق هندسياً أن f دالة متزايدة و $f(x)>x$

– استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2/ نضع $\alpha=O\hat{M}A$ مع α بدلالة x

– أعط تخمين حول نهاية α لما x يؤول إلى $+\infty$

– استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

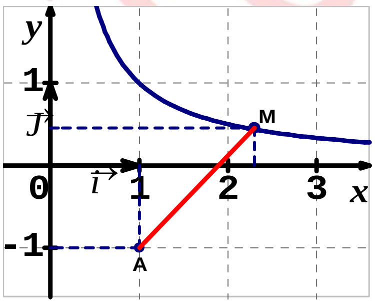
3/ لتكن (c) الدائرة ذات المركز النقطة M و نصف القطر OM

– بين أن : $\alpha=A\hat{O}H$ ثم : $0<f(x)-x<\sin x$

– استنتج : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$

4/ أثبت أن المستقيم الذي معادلته: $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) منحنى الدالة f ثم عين الوضع النسبي بينهما

التمرين (61)



في الشكل المقابل لدينا منحن ذي المعادلة $y=\frac{1}{x}$ مع $x>0$

A و M نقطتان حيث : $A(1;-1)$ و $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$

الهدف من التمرين هو تعيين إن أمكن نقطة M بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

1/ أ– برر أنه إذا أخذت AM أصغر قيمة فإن AM^2 تأخذ أصغر قيمة

ب– أحسب بدلالة x ، $d(x)$ حيث : $d(x)=AM^2$

2/ برهن انه من أجل كل $x>0$: $d'(x)=\frac{2f(x)}{x^3}$ حيث f هي دالة كثير الحدود من الدرجة الرابعة .

3/ أ– أدرس تغيرات الدالة f على $I=]0;+\infty[$

ب- برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ في المجال I ثم عين حصراً للعدد ~ بالتقريب 10^{-2}

ج- استنتج إشارة $f(x)$ على المجال I .

4/ استنتج مما سبق تغيرات الدالة d و أعط خلاصة .

5/ برر أنه إذا كانت M أقرب من A فإن المستقيم (AM) يكون عموديا على مماس المنحنى المعطى سابقاً في M

التمرين (62)

1/ أدرس تغيرات الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{1}{x-A_1}+\frac{1}{x-A_2}+......+\frac{1}{x-A_n}$

حيث : $A_1, A_2, ..., A_n$ أعداد حقيقية متمايزة فيما بينهما .

و : $A_1 \succ A_2 \succ ...... \succ A_n$

2/ استنتج عدد حلول المعادلة : $\frac{1}{x-A_1}+\frac{1}{x-A_2}+......+\frac{1}{x-A_n}=0$

3/ أ- باستعمال النتائج السابقة استنتج عدد حلول المعادلة : $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=0$ ....(❖)

ب- أعط حصرا لكل حل للمعادلة (❖) بين عددين صحيحين متتاليين .

التمرين (63)

1/ g هي الدالة المعرّفة على $[0;®]$ بـ : $g(x)=x\cos x-\sin x$.

أ- أدرس تغيّرات الدالة g وأنشئ جدول تغيّراتها .

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $[0;®]$.

2/ لتكن الدالة f المعرّفة على $[0;®]$ بـ : $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ من أجل $x\neq 0$ و $f(0)=1$.

- أدرس تغيّرات الدالة f على $[0;®]$.

3/ الهدف من السؤال هو دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 للدالة f .

أ- بيّن أنّه من أجل كل عدد موجب x ، $0\leq x-\sin x\leq\frac{x^3}{6}$.

من أجل ذلك نعتبر الدالة ¨ المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $¨(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$.

أحسب المشتقات المتتابعة $¨'(x)$ ، $¨''(x)$ و $¨'''(x)$ واستنتج إشارة ¨ .

ب- برهن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 وأحسب $f'(0)$.

4/ أنشئ المنحني $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس حيث تأخذ وحدة الرسم $3cm$.

التمرين (64)

1/ g هي الدالة المعرّفة بـ : $g(0)=0$ و $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ من أجل $x\neq 0$

أ- برهن أنّ g تقبل الاشتقاق عند 0 .

ب - $\mathcal{C}$ هو منحني الدالة g الممثل في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. تحقق من أنّ محور الفواصل هو مماس للمنحني $\mathcal{C}$ عند المبدأ O .

2/ أ- برهن أنّ $g\left(\frac{1}{k\pi}\right)=0$ من أجل كل $k\in\mathbb{Z}$.

ب - α عدد حقيقي موجب تماما وصغير بقدر ما نريده. لماذا يوجد عدد غير منته من الأعداد $\frac{1}{k\pi}$ تنتمي إلى المجال $[0;\alpha]$ ، مع $k\in\mathbb{Z}$.

3/ هل صحيح أنّ مماس في نقطة A للمنحنى $\mathcal{C}$ ، لا يقطع $\mathcal{C}$ إلاّ في النقطة A وهذا بجوار A .

التمرين (65)

I- لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي : $f(x)=2x-\sin x-4$

(C_f) المنحني البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ أدرس تغيرات الدالة f .

2/ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α حيث : $2,3\prec\alpha\prec2,4$ ، فسر النتيجة هندسياً .

3/ أرسم المنحنى (C_f) مع الوحدة $2cm$.

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة كما يلي : $g(x)=\frac{1}{2}(4+\sin x)$

1/ أثبت أن : $g(\alpha)=\alpha$

2/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $|g'(x)|\leq\frac{1}{2}$

3/ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=A$ $(A\in\mathbb{R})$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=g(u_n)$

أ- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب- استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

ج- أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

التمرين (66)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ أ- برهن أن الدالة f دورية ذات الدور 2π

ب- برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_f) .

2/ أ- عين $f'(x)$ مشتقة الدالة f .

ب- برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=(\sin x).(1-2\cos x)$

ج- أدرس إشارة $f'(x)$ من أجل $x\in[0;\pi]$

3/ أ- شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;\pi]$

ب- أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$

ج- كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

التمرين (67)

F دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $F'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ و $F(0)=0$

نقبل أن الدالة F موجودة و لا نريد إتخاد عبارتها $F(x)$ ، نسمي (C) تمثيلها البياني في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ لتكن G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x)=F(x)+F(-x)$.

أ- برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب $G'(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

ب- أحسب $G(0)$ و استنتج أن الدالة F فردية .

2/ لتكن H الدالة المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بـ : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

أ- برر أن H تقبل الاشتقاق على I و أحسب $H'(x)$ من أجل كل $x\in I$.

ب- برهن أنه من أجل كل $x\in I$: $H(x)=2F(1)$

ج- استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=2F(1)$

د- ماذا ينتج عن المنحنى (C) .

3/ لتكن T الدالة المعرفة على المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـ : $T(x)=F(\tan x)-x$

أ- احسب $T'(x)$ ، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

ب- احسب $F(1)$

4/ أنجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

5/ أرسم المنحنى (C) ، مستقيماته المقاربة و مماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .