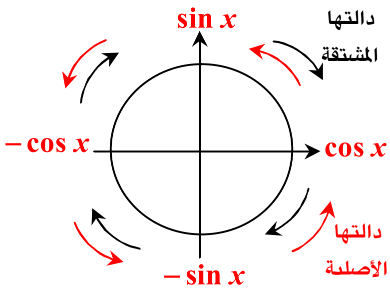
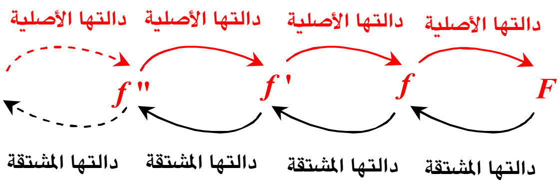
# ★ الدوال الأصلية و الحساب التكاملي ★

## ① الدوال الأصلية

| | السؤال | الجواب |
|---|---|---|
| ❶ | ما هو شرط وجود دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على المجال $I$ | الشرط أن تكون الدالة $f$ مستمرة على المجال $I$ |
| ❷ | كم عدد الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ | الدالة $f$ تقبل عدد غير منتهي من الدوال الأصلية و هي : $F(x)+k$ حيث $k \in \mathbb{R}$ |
| ❸ | أثبت أن الدالة $F$ أصلية للدالة $f$ على المجال $I$ | يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$ : $F'(x)=f(x)$ |
| ❹ | بين أن الدالتان $F$ و $G$ أصليتان لنفس الدالة على المجال $I$ | يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$ : $F'(x)=G'(x)$ |




## ② الدوال الأصلية لدوال مألوفة

| $f(x)=$ | $F(x)=$ | $I=$ |
|---|---|---|
| $a$ ( $a$ عدد حقيقي ) | $ax+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $\frac{1}{2}x^2+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ ( $n\in\mathbb{N}^*$ ) | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x}+c$ | $]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$ |
| $\frac{1}{x^n}$ ( $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ ) | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$ | $]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}+c$ | $]0;+\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^{ax+b}$ ( $b\in\mathbb{R}$ و $a\in\mathbb{R}^*$ ) | $\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x+c$ | $]0;+\infty[$ |
| $\ln x$ | $x\ln x-x+c$ | $]0;+\infty[$ |
| $\ln(x-a)$ ( $a\in\mathbb{R}$ ) | $(x-a)\ln(x-a)-x+c$ | $]a;+\infty[$ |

## ③ الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

| الدالة $f$ | الدوال الأصلية للدالة $f$ على $I$ | شروط على الدالة $u$ |
|---|---|---|
| $u'u$ | $\frac{1}{2}u^2+c$ | |
| $(n\in\mathbb{N}^*)\ u'u^n$ | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ | |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $-\frac{1}{u}+c$ | من أجل كل $x$ من $I$، $u(x)\neq 0$ |
| $(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{u'}{u^n}$ | $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$ | من أجل كل $x$ من $I$، $u(x)\neq 0$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}+c$ | من أجل كل $x$ من $I$، $u(x)>0$ |
| $u'e^u$ | $e^u+c$ | |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln\lvert u\rvert+c$ | $u(x)\neq 0$ |

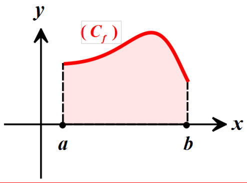
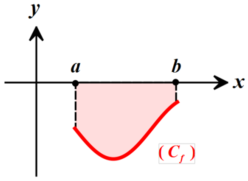
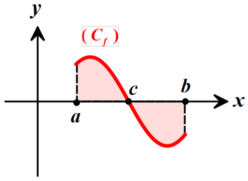
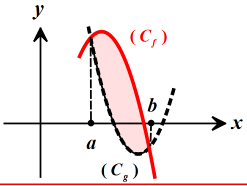
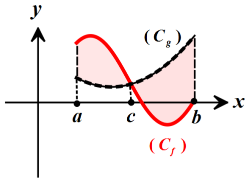
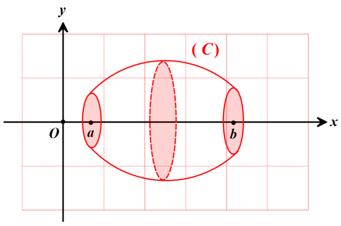
## ④ المعادلات التفاضلية

| حلول المعادلة | المعادلة التفاضلية |
|---|---|
| $y=Ce^{ax}$ | $y'=ay$ |
| $y=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ | $y'=ay+b$ |
| $y=F(x)+c$ | $y'=f(x)$ |
| $y=F(x)+c_1x+c_2$ | $y''=f'(x)$ |
| $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ | $y''=-\omega^2y$ |

## ⑤ الحساب التكاملي

| | |
|---|---|
| $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ | التكامل المحدود |
| $\int f(x)\,dx=F(x)+k$ | التكامل الغير محدود |
| $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$ | علاقة شال |
| $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$ | المكاملة بالتجزئة |
| $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ | القيمة المتوسطة على مجال |

## ⑥ حساب المساحات و الحجوم

| المساحات $S$ | التمثيل البياني لها |
|---|---|
| $S=\int_a^b f(x)\,dx$ |   |
| $S=\int_a^b -f(x)\,dx$ |   |
| $S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx$ |   |
| $S=\int_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx$ |   |
| $S=\int_a^c \left[f(x)-g(x)\right]dx+\int_c^b \left[g(x)-f(x)\right]dx$ |   |
| **الحجوم $V$** | **التمثيل البياني لها** |
| حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ للمنحنى $(C)$ <br> $V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2dx$ |   |

**ملاحظة هامة** : كل المساحات يجب أن تضرب في الوحدة $ua$ حيث : $ua=\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$

# سلسلة الامل في الرياضيات رقم (08)

الشعب : علوم تجريبية ، تقني رياضي ، رياضيات

إعداد الاستاذ : توامي عمر المستوى : ثالث ثانوي

## الدوال الأصلية

### التمرين (01)

نعتبر الدالتين $F$ وَ $G$ المعرفتين على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$F(x)=\frac{x^2-2x-1}{x+1} \quad ، \quad G(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$$

– باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن $F$ وَ $G$ دالتان أصليتان لنفس الدالة على المجال $]-1;+\infty[$ .

### التمرين (02)

– عين الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ في كل حالة :

1/ $f(x)=6x^5-25x^4+2x-4$ ، $I=\mathbb{R}$

2/ $f(x)=\dfrac{x^4+2x^2-1}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$

3/ $f(x)=2\cos(2x)-\sin(3x+5)$ ، $I=\mathbb{R}$

4/ $f(x)=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^5}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2$ ، $I=]0;+\infty[$

5/ $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$ ، $I=]0;+\infty[$

### التمرين (03)

– تعرف على الشكل $\dfrac{u'}{u^n}$ ، ثم عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ :

1/ $f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ ، $I=]-1;+\infty[$

2/ $f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2x+3)^3}$ ، $I=\mathbb{R}$

3/ $f(x)=\dfrac{-2e^x-4}{(e^x+2x)^2}$ ، $I=[0;+\infty[$

4/ $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ ، $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

5/ $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^{2013}}$ ، $I=]1;+\infty[$

### التمرين (04)

– تعرف على الشكل $u'u^n$ ، ثم أوجد الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ :

1/ $f(x)=(x+1)^5$ ، $I=\mathbb{R}$

2/ $f(x)=e^{-2x}(e^{-2x}-3)^2$ ، $I=\mathbb{R}$

3/ $f(x)=3\cos x.\sin^3 x$ ، $I=\mathbb{R}$

4/ $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ ، $I=]0;+\infty[$

5/ $f(x)=\tan^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ ، $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

## التمرين (05)

– تعرف على الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ ، ثم أوجد الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ :

1/ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ، $I=]1;+\infty[$

2/ $f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$ ، $I=]3;+\infty[$

3/ $f(x)=\frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$ ، $I=]0;+\infty[$

4/ $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$ ، $I=]0;\pi[$

5/ $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ ، $I=]1;+\infty[$

## التمرين (06)

– تعرف على الشكل $\frac{u'}{u}$ ، وَ عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ :

1/ $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ، $I=]-\infty;1[$

2/ $f(x)=\frac{6x+3}{x^2+x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

3/ $f(x)=\frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+2e^x+3}$ ، $I=\mathbb{R}$

4/ $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ ، $I=]0;\pi[$

5/ $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ ، $I=]1;+\infty[$

## التمرين (07)

– تعرف على الشكل $u'e^u$ ، وَ عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على المجال $I$ :

1/ $f(x)=e^{3x-1}$ ، $I=\mathbb{R}$

2/ $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ ، $I=]0;+\infty[$

3/ $f(x)=\sin x.e^{\cos x}$ ، $I=\mathbb{R}$

4/ $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$ ، $I=]-1;+\infty[$

5/ $f(x)=2^x-3^x$ ، $I=\mathbb{R}$

## التمرين (08)

$f$ وَ $g$ الدالتين المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-4}$ ، $g(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-4}$

– عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ وَ $c$ حتى تكون $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]2;+\infty[$ .

## التمرين (09)

لتكن $f$ وَ $F$ دالتين معرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+1)^2}$ وَ $F(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$

– عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ وَ $c$ حتى تكون $F$ دالة أصلية للدالة $f$ .

## التمرين (10)

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^x-1}{e^x-1}$

1/ عين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ وَ $c$ حتى يكون من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f(x)=ae^x+b+\dfrac{ce^x}{e^x-1}$ .

2/ استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ .

## التمرين (11)

لتكن الدالة $G$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $G(x)=(ax+b)\ln x+c$

1/ عين العددين الحقيقيين $a$ وَ $b$ لكي تكون الدالة $G$ أصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة $g$ المعرفة بـ :

$$g(x)=\frac{2x-3+2x\ln x}{x}$$

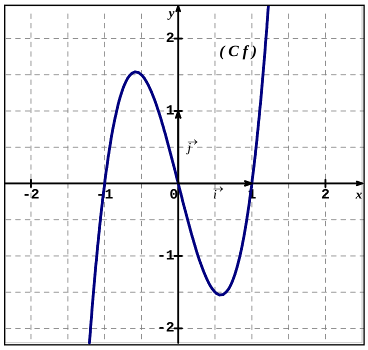
2/ استنتج دالة أصلية للدالة $g$ وَ التي تنعدم من أجل $x=e$ .

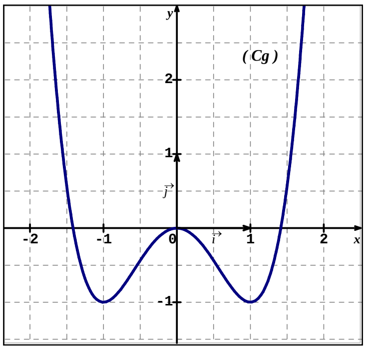
## التمرين (12)

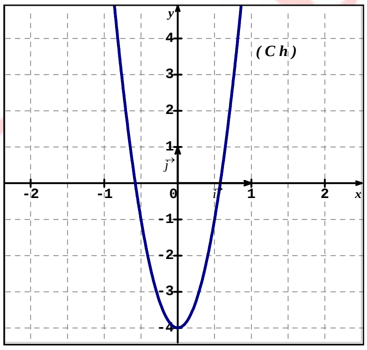
المنحنيات $(C_f)$ ، $(C_g)$ ، $(C_h)$ هي التمثيلات البيانية لثلاث دوال $f$ ، $g$ وَ $h$ على الترتيب معرفة وَ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ .

1/ علماً أن الدالة $f$ تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ من بين الدالتين $g$ وَ $h$ ما هي؟ برر .

2/ علماً أن الدالة $h$ تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$ من بين الدالتين $f$ وَ $g$ ما هي؟ برر .



## التمرين (13)

لتكن $f''$ دالة عدد ية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f''(x)=5x^3-x^2+2x-1$

1/ عين الدوال الأصلية $f'$ للدالة $f''$ .

2/ عين الدالة الأصلية للدالة $f'$ بحيث تمثيلها البياني عند النقطة $A(1;1)$ يقبل مماساً معامل توجيهه $\frac{35}{12}$ .

## التمرين (14)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1/ عين الدوال الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

2/ عين الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ التي تمثيلها البياني $(C_F)$ يقبل بجوار $+\infty$ مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته : $y=2x+1$ .

## التمرين (15)

$f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\cos^3 x$

تحقق أن : $f(x)=\cos x-\cos x.\sin^2 x$ ، ثم عين جميع الدوال الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

## التمرين (16)

لتكن $f$ وَ $g$ دالتين معرفتين على المجال $I=\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ كما يلي : $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$ وَ $g(x)=\frac{1}{\cos^4 x}$

1/ تحقق أن : $f'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$

2/ عين دالة أصلية للدالة $g$ على $I$ وَ التي تنعدم من أجل $x=0$ .

## التمرين (17)

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2x^2-7x+5).e^x$

1/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$

2/ استنتج الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ وَ التي تحقق : $F(1)=e$ .

## التمرين (18)

$f$ دالة فردية وَ مستمرة على $\mathbb{R}$ وَ $F$ دالتها الأصلية على $\mathbb{R}$ .

نعتبر الدالة $G$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $G(x)=F(x)-F(-x)$

– بين أن $G$ دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ .

## التمرين (19)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{3x}\sin x$

1/ احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ .

2/ أوجد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $f(x)=a\,f'(x)+b\,f''(x)$

3/ عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

## التمرين (20)

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $]2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

1/ أ- عين الدالة المشتقة للدالة $g$ المعرفة على $]a;+\infty[$ بـ : $g(x)=(x-a)\ln(x-a)-x$

ب- استنتج دالة أصلية للدالتين : $x\mapsto\ln(x-2)$ و $x\mapsto\ln(x+2)$

2/ عين الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]2;+\infty[$ .

## التمرين (21)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{6e^{x}}{e^{2x}-1}$

1/ عين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث يكون : $f(x)=\dfrac{ae^{x}}{e^{x}-1}+\dfrac{be^{x}}{e^{x}+1}$

2/ استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ .

## التمرين (22)

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $(E)$ في كل حالة :

1/ $y'=2x-1-\dfrac{1}{x^{2}}$ 2/ $y''=\cos(2x-1)$ 3/ $y''+e^{2}y=0$

## التمرين (23)

1/ عين جميع حلول المعادلة التفاضلية التالية : $y''=e^{2x+2012}$

2/ عين الحل الوحيد للمعادلة السابقة حيث : $y'(0)=0$ و $y(0)=\dfrac{1}{4}e^{2012}$

## التمرين (24)

1/ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $4y''+121y=0$ .

2/ عين الحل $F$ الذي يحقق الشرطين التاليين : $F(0)=1$ و $F'(0)=11$ .

## التمرين (25)

1/ حل في ℝ المعادلة التفاضلية : $9y''+4y=0$ .

2/ عين الحل الخاص $F$ لهذه المعادلة الذي يحقق ما يلي :

المنحنى الممثل للدالة $F$ يشمل النقطة $A\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right)$ و يقبل في هذه النقطة مماساً معامل توجيهه $-\frac{2}{3}$ .

3/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $F(x)=2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$ .

4/ حل المعادلة $F(x)=0$ ، ثم مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية .

## التمرين (26)

نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين : $y''-2y'+10y=0$ .......(1) و $z''+9z=0$ .......(2)

بوضع : $z=ye^{-x}$

1/ بين أن $y$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا كان $z$ حلاً للمعادلة (2) .

2/ عين حلول المعادلة (2) ، ثم استنتج حلول المعادلة (1) .

3/ عين الحل $f$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $f(0)=f'(0)=\sqrt{3}$ .

## التمرين (27)

لتكن الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كما يلي : $f(x)=\cos^2 x$

1/ حل المعادلتين التفاضليتين : $y'=f(x)$ و $y''=f(x)$ .

2/ لتكن المعادلة التفاضلية التالية : (G) ...... $y'+y=\frac{1}{2}\cos(2x)-\sin(2x)+\frac{1}{2}$ .

– برهن أن الدالة $f$ حل للمعادلة التفاضلية (G) .

3/ حل المعادلة التفاضلية : $y'-2y=0$ ثم أوجد الحل الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x=1$ .

4/ حل المعادلة التفاضلية : $y''+4y=0$ ثم أوجد الحل الذي يأخذ القيمة $-1$ من أجل $x=\pi$ و $x=\frac{\pi}{4}$ .

– اكتب الحل على الشكل $y=\alpha\cos(2x+\beta)$ حيث $\alpha$ و $\beta$ يطلب تعيينهما .

## التمرين (28)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على ℝ كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

1/ بين أن الدالة $f$ تقبل دالة أصلية $F$ على ℝ .

2/ نفرض أن : $F(0)=0$

– عين معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(C_F)$ الممثل للدالة $F$ عند النقطة $O$ التي فاصلتها 0 .

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة $F$ على ℝ .

4/ ادرس إشارة $F(x)$ على ℝ .

5/ احسب $F''$ المشتقة الثانية للدالة $F$ على ℝ .

6/ ادرس إشارة $F''(x)$ و استنتج وضعية $(C_F)$ بالنسبة للمماس $(T)$ .

## التمرين (29)

لتكن $f_n$ دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=x^n\sqrt{x}$ حيث $n$ عدد طبيعي .

1/ احسب $f_1'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $f_0$ .

2/ احسب $f_2'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة $f_1$ .

3/ خمن عبارة $f_n'(x)$ ثم برهن على صحة التخمين بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم .

4/ أ- احسب $f_{n+1}'(x)$ بدلالة $f_n(x)$ .

ب- استنتج دالة أصلية للدالة $f_n$ على المجال $]0;+\infty[$ .

## التمرين (30)

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{-2x}\ln(2e^x+1)$

1/ بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم احسب $f'(x)$ .

2/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $f'(x)+2f(x)=\dfrac{2e^{-x}}{2e^x+1}$

3/ عين العددين الحقيقيين $a$ وَ $b$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x$ يكون : $\dfrac{2e^{-x}}{2e^x+1}=ae^{-x}+b\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

4/ استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

## التمرين (31)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1/ ادرس تغيرات الدالة $f$ .

2/ استنتج حسب قيم $x$ ، إشارة $f(x)$ .

3/ ارسم المنحنى $(C_f)$ .

لتكن $F$ ، $G$ وَ $H$ الدوال الأصلية للدالة $f$ على الترتيب على المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$

4/ ما هو اتجاه تغير كل من $F$ ، $G$ وَ $H$ على مجموعة تعريف كل منها ؟

5/ تحقق أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ : $f(x)=\dfrac{1}{2(x-1)^2}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

6/ استنتج عبارة كل من $F$ ، $G$ وَ $H$ على مجموعة تعريف كل منها .

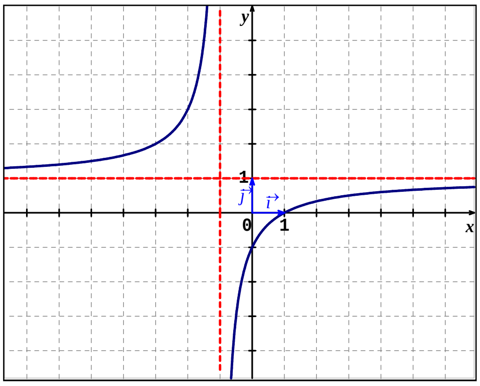
7/ شكل جدول تغيرات كل من $F$ ، $G$ وَ $H$ مع تحديد النهايات .

8/ أرسم في نفس المعلم التمثيلات البيانية للدوال $F$ ، $G$ وَ $H$ .

## التمرين (32)

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

و $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامدالمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ( الشكل المقابل ) ، بقراءة بيانية :




أ- شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .

ب- حل بيانياً المتراجحة $g(x)>0$ .

ج- عين بيانياً قيم $x$ التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$ .

II- لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسياً .

2/أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$ .

ب- احسب $f'(x)$ وَ أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

3/أ- باستعمال الجزء I) السؤال ج- عين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

ب- $\alpha$ عدد حقيقي .

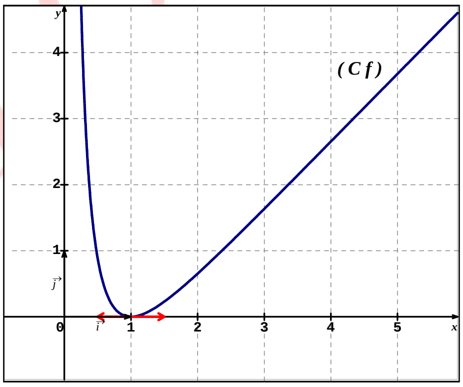
بين أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ .

ج- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة $f$

## التمرين (33)

I- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

وَ ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ( أنظر الشكل )




1/ بقراءة بيانية عين $f(1)$ وَ $f'(1)$ .

2/ أ- باستعمال المنحنى $(C_f)$ ضع تخميناً حول اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ .

ب- اثبت صحة هذا التخمين .

3/أ- باستعمال المنحنى $(C_f)$ ضع تخميناً حول نهاية $f$ عند $+\infty$ وَ عند يمين $0$ .

ب- اثبت صحة هذا التخمين .

4/ بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً $(\Delta)$ يطلب تعيين معادلة له .

II– لتكن $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $F(1)=-\frac{1}{2}$

وَ ليكن $(C_F)$ تمثيلها البياني في المستوي السابق ، بدون حساب عبارة $F(x)$ أجب على ما يلي :

1/ حدد اتجاه تغير الدالة $F$ .

2/ بين أن $(C_F)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

3/ أ– بين أن معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(C_F)$ في النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $y=-\frac{1}{2}$ .

ب– استنتج وضعية $(C_F)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$.

4/ عين الآن عبارة $F(x)$ بدلالة $x$ .

5/ ادرس نهايتي الدالة $F$ عند يمين 0 وَ عند $+\infty$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

6/ ارسم كل من $(T)$ وَ $(C_F)$ ونأخذ : $F(2,3)=0$

## التمرين (34)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1/ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ لتكن $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ بحيث $F(0)=0$ ، بدون تعيين عبارة $F(x)$ :

أ– فسر وجدود الدالة $F$ على المجال $[0;+\infty[$ .

ب– ادرس اتجاه تغير الدالة $F$ على المجال $[0;+\infty[$ .

4/ نعتبر الدالتين $H$ وَ $K$ المعرفتين على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$K(x)=F(x)-\frac{2}{3}x \quad \text{و} \quad H(x)=F(x)-x$$

أ– ادرس اتجاه تغير الدالتين $H$ وَ $K$ على المجال $[0;+\infty[$ .

ب– استنتج من أجل كل $x$ من $[0;+\infty[$ : $\frac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$ ، ثم استنتج : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ .

5/ بين أن المعادلة $F(x)=\alpha$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلاً وحيداً $\beta$ ثم بين أن : $\alpha\leq\beta\leq\frac{3}{2}\alpha$

## التمرين (35)

I– لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

1/ بين أن $f$ دالة زوجية ثم أدرس اتجاه تغيراتها .

2/ بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=1+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\alpha}{x+2}$ ، حيث $\beta$ وَ $\alpha$ عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

3/ عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة $f$ .

II- لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-[-2;2]$ كما يلي : $g(x)=x+\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

$(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد وَ متجانس .

1/ بين أن $g$ دالة فردية ثم أدرس اتجاه تغيراتها .

2/احسب نهايات الدالة $g$ عند أطراف مجموعة التعريف ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ بين أن المنحني $(C)$ يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً يطلب تعين معادلته .

4/ ارسم المنحني $(C)$ .

5/ أ- احسب مشتقة الدالة $h$ من أجل كل $x$ حيث $x\neq -a$ : $h(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$ ، $a$ عدد حقيقي .

ب- استنتج دالة أصلية للدالة $g$ على المجال $]2;+\infty[$ .

## التمرين (36)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}\sin x$

1/ احسب $f'(x)$ .

2/ بين أن حلول المعادلة $f'(x)=0$ تمثل متتالية حسابية وَ أن صورها بالدالة $f$ تشكل متتالية هندسية .

3/ أ- احسب المشتقات المتتابعة للدالة $f$ إلى غاية الرتبة الرابعة .

ب- جد علاقة بين الدالة $f$ وَ مشتقاتها ذات الرتبة الرابعة وَ التي نرمز لها بالرمز $f^{(4)}$ .

4/ استنتج دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على $\mathbb{R}$ .

5/ من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $u_n=F[(2n+1)\pi]-F(2n\pi)$

أ- احسب $u_0$ ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n=\dfrac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$

ب- بين أن المتتالية $(u_n)$ هندسية يطلب تعيين أساسها ، استنتج نهاية المتتالية $(u_n)$ .

ملاحظة هامة : تجدون حلول جميع التمارين في الكتاب" الأمل في الرياضيات"
و في الجزء الأول

# سلسلة الامل في الرياضيات رقم (09)

الشعب : علوم تجريبية ، تقني رياضي ، رياضيات

إعداد الاستاذ : توامي عمر — المستوى : ثالث ثانوي

## الحساب التكاملي

### التمرين (01)

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ 2/ $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$ 3/ $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x}\,dx$ 4/ $\int_{0}^{\pi}\sin(2t)\,dx$

### التمرين (02)

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{0}^{1}(3x^2+2x-2)\,dx$ 2/ $\int_{1}^{2}(x+1)^4\,dx$ 3/ $\int_{-1}^{0}4x(2x^2+1)^2\,dx$ 4/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x.\sin x\,dx$

### التمرين (03)

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx$ 2/ $\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,dx$ 3/ $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ 4/ $\int_{e^{-1}}^{e}\frac{1}{x.(\ln x)^3}\,dx$

### التمرين (04)

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ 2/ $\int_{0}^{2\sqrt{3}}\frac{x}{2\sqrt{x^2+4}}\,dx$ 3/ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ 4/ $\int_{1}^{e}\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}\,dx$

### التمرين (05)

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{0}^{2}\frac{1}{x+1}\,dx$ 2/ $\int_{0}^{-4}\frac{x+2}{x^2+4x-5}\,dx$ 3/ $\int_{2\frac{\pi}{3}}^{\pi}\tan x\,dx$ 4/ $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x.\ln x}\,dx$

أتمنى لكم التوفيق الأستاذ توامي عمر في خدمتكم

touami.omar@gmail.com

## التمرين (06)

في كل حالة من الحالات التالية أوجد الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ .

1/ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ : $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+2}$ ثم استنتج : $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x^2-4}\,dx$ .

2/ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1\}$ : $\dfrac{-x^3-2x^2-x-4}{(x+1)^2}=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$

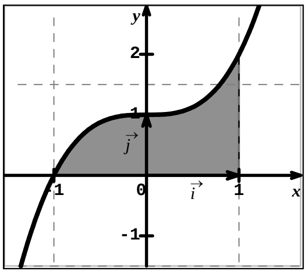
ثم استنتج : $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{-x^3-2x^2-x-4}{(x+1)^2}\,dx$

## التمرين (07)

$f$ هي الدالة المعرفة بتمثيلها البياني في الشكل المقابل .

– احسب بطريقتين مختلفتين : $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ ، $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ ، $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

## التمرين (08)




نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^3+1$ .

و $(C)$ هو تمثيلها البياني في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما موضح في الشكل

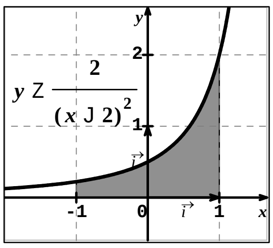
1/ عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$ .

2/ احسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين $-1$ و $1$ .

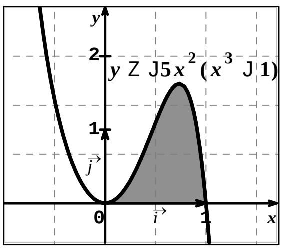
3/ احسب بـ $cm^2$ هذه المساحة إذا علمت أن $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=0{,}5cm$ .

## التمرين (09)

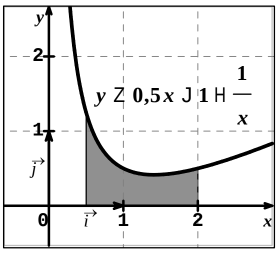
في الحالات الأربعة التالية ، احسب مساحة الحيز الملون مقدرة بوحدة المساحة .



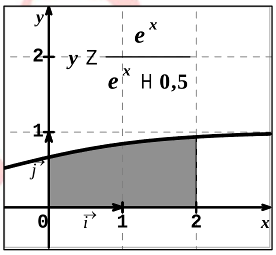

الحالة الأولى




الحالة الثانية



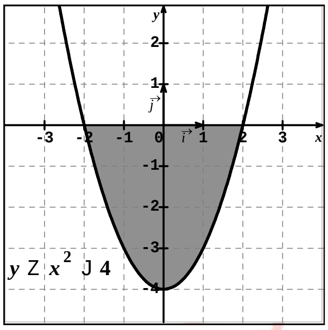

الحالة الثالثة



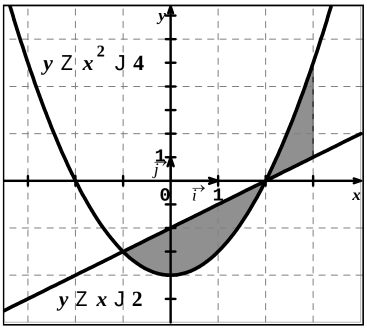

الحالة الرابعة

## التمرين (10)

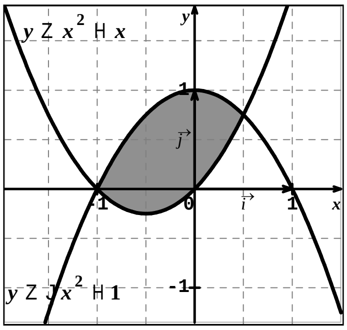
في الحالات التالية ، احسب مساحة الحيز الملون مقدرة بوحدة المساحة .




الحالة الأولى



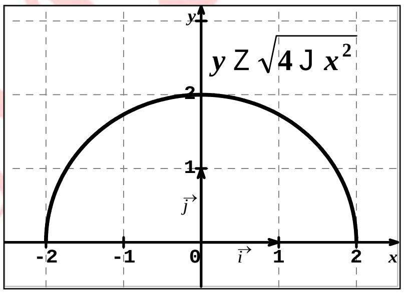

الحالة الثانية



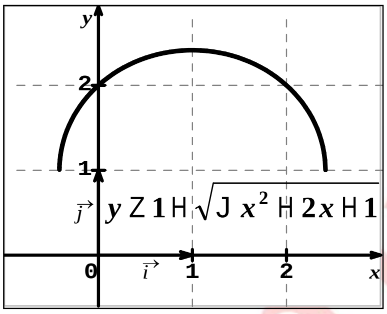

الحالة الثالثة

## التمرين (11)

في كل حالة الدالة $f$ ممثلة بالمنحني $(C)$ المعرف بمعادلته كما هو في الشكل .




الحالة الأولى




الحالة الثانية

1/ بين أن $(C)$ هو نصف دائرة يطلب تعين مركزها و نصف قطرها .

2/ استنتج تكامل الدالة $f$ على مجموعة تعريفها .

## التمرين (12)

لتكن $f_n$ و $g_n$ الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ ب : $f_n(x) = x^n$ و $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$

التمثيلين البيانيان للدالتين $f_n$ و $g_n$ يقسمان مربع الوحدة إلى ثلاثة أجزاء .

– عين قيمة $n$ حيث يكون للأجزاء الثلاثة نفس المساحة .

## التمرين (13)

– احسب في كل حالة من الحالات التالية باستعمال خواص التكامل ، التكاملات التالية :

1/ $I = \int_1^e \ln x \, dx + \int_1^e \left( x + \ln \frac{1}{x} \right) dx$

2/ $J = \int_1^2 \ln(x^2 + 1) dx + \int_2^1 \ln(1 + x^2) dx$

3/ $K=\int_{1}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x\,dx-\int_{1}^{\frac{7\pi}{6}}\cos 2x\,dx$

## التمرين (14)

لتكن $f$ و $g$ دالتان معرفتان على $[5;10]$ حيث : $\int_{5}^{10}f(x)dx=4$ و $\int_{5}^{10}g(x)dx=-5$

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{5}^{10}(f+g)(x)dx$ 2/ $\int_{5}^{10}(f-g)(x)dx$ 3/ $\int_{5}^{10}\left(\frac{5}{2}f\right)(x)dx$ 4/ $\int_{5}^{10}(2f-3g)dx$

## التمرين (15)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[0;2]$ كما يلي : $f(x)=\begin{cases}x^2 & ; x\in[0;1]\\ -x+2 & ; x\in[1;2]\end{cases}$

1/ مثل الدالة $f$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

2/ هل الدالة $f$ مستمرة على المجال $[0;2]$ ؟

3/ احسب $\int_{0}^{1}f(x)dx$ ، $\int_{1}^{2}f(x)dx$ ثم استنتج $\int_{0}^{2}f(x)dx$ .

## التمرين (16)

– قارن في كل حالة ، دون حساب التكاملين $I$ و $J$ :

1/ $I=\int_{0}^{1}xe^{x}\,dx$ ، $J=\int_{0}^{1}x^2e^{x}\,dx$ 2/ $I=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ، $J=\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx$

3/ $I=\int_{\frac{2}{3}}^{1}x^2\,dx$ ، $J=\int_{\frac{2}{3}}^{1}x\ln x\,dx$ 4/ $I=\int_{1}^{2}t\sin t\,dt$ ، $J=\int_{1}^{2}t^2\sin t\,dt$

## التمرين (17)

– احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_{-1}^{1}(|x|+|x+1|)dx$ 2/ $\int_{-3}^{3}(|x^2-x-2|)dx$ 3/ $\int_{0}^{2}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{x}-|x-1|\right)dx$

## التمرين (18)

$f$ ، $g$ و $h$ ثلاث دوال معرفة على $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ، $g(x)=1-\frac{x}{2}$ ، $h(x)=1-\frac{x^2}{2}$

1/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;1]$ : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ .

2/ بين أن : $\frac{5}{6} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{3}{4}$ .

## التمرين (19)

1/ بين أن من أجل كل $x \in \left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ : $\sqrt{2} \leq \frac{1}{\cos x} \leq 1$ .

2/ استنتج أن : $\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\cos x}\,dx \leq \frac{\pi}{4}$

## التمرين (20)

نعتبر التكامل $I$ المعرف كما يلي : $I = \int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx$

1/ بين أن من أجل كل $x$ من المجال $[0;2]$ يكون لدينا : $x+2 \leq \sqrt{x^2+4} \leq x$ .

2/ استنتج أنه من أجل كل $x$ من المجال $[0;2]$ : $6 \leq I \leq 2$ .

## التمرين (21)

ليكن $a$ و $b$ عددان حقيقيان من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $a \prec b$ .

1/ برهن أن من أجل كل $x$ من $[a;b]$ : $\frac{1}{\cos^2 b} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 a}$ .

2/ استنتج أن : $\frac{b-a}{\cos^2 b} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 a}$ .

## التمرين (22)

احسب القيمة المتوسطة للدالة $f$ على المجال $I$ في كل حالة :

1/ $f(x) = 2x+3$ ، $I = [-1;1]$ 2/ $f(x) = |x|$ ، $I = [-2;2]$

3/ $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $I = [0;1]$

## التمرين (23)

في كل حالة من الحالات التالية $\mu$ هي القيمة المتوسطة لدالة $f$ مستمرة على المجال $I$، احسب التكامل المطلوب

1/ $\mu = 2$ ، $I = [1;4]$ ، $\int_1^4 f(x)\,dx$ 2/ $\mu = \ln 2$ ، $I = [1;3]$ ، $\int_1^3 f(x)\,dx$

3/ $\mu = \frac{2}{\pi}$ ، $I = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ ، $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ و $f$ دالة زوجية .

## التمرين (24)

بين الحصر المعطى في كل حالة :

1/ $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx \le 1$ 2/ $\frac{9}{4} \le \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \le 9$ 3/ $\sqrt{2} \le \int_1^2 \sqrt{x^3+1}\,dx \le 3$

4/ $\frac{2}{e^4} \le \int_0^2 e^{-x^2}\,dx \le 2$ 5/ $2\ln 3 \le \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \le 2\ln 3 + 2\ln 5$

## التمرين (25)

من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx$

1/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;1]$ وَ من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

2/ استنتج حصراً للعدد $u_n$ ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ .

## التمرين (26)

باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب التكاملات التالية :

1/ $\int_6^7 \ln(x-5)\,dx$ 2/ $\int_1^e x\ln x\,dx$ 3/ $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sin(3x)\,dx$ 4/ $\int_0^1 x\,e^{1-x}\,dx$

5/ $\int_0^1 (x^2+x)e^x\,dx$ 6/ $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ 7/ $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x}\,dx$ 8/ $\int_0^{\ln 2} e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx$

## التمرين (27)

باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية $F$ للدالة $f$ على المجال $I$ بحيث $F(a)=0$ .

1/ $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$ ، $a=1$ ، 2/ $f(x)=(\ln x)^2$ ، $I=]0;+\infty[$ ، $a=1$

3/ $f(x)=e^x\cos x$ ، $I=\mathbb{R}$ ، $a=0$

## التمرين (28)

$x$ عدد حقيقي موجب تماماً ، $(u_n)$ متتالية عددية حيث : $u_0=\int_1^e x\,dx$

وَ من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم نضع : $u_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1/ أحسب $u_0$ ثم $u_1$ .

2/ باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $2u_n + n\,u_{n-1} = e^2$

3/ استنتج قيمة $u_2$ .

## التمرين (29)

الهدف من التمرين هو حساب التكاملات التالية :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \quad ، \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \quad ، \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1/ لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

– احسب الدالة المشتقة $f'$ للدالة $f$ ثم استنتج قيمة $I$ .

2/ أ– بدون حساب $J$ و $K$ تحقق أن $J+2I=K$ .

ب– باستعمال المكاملة بالتجزئة على $K$ ، بين أن $K=\sqrt{3}-J$ .

3/ استنتج قيمتي $J$ و $K$ .

## التمرين (30)

من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، نعتبر العددين الحقيقيين : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ و $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$

1/ احسب $I_0$ و $J_0$ .

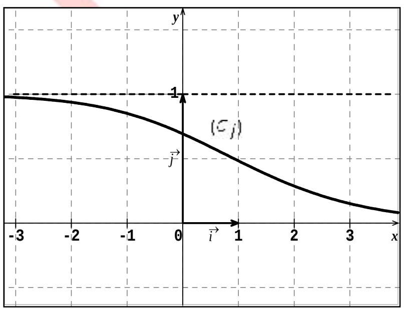
2/ أ– نضع $n\geq 1$ ، باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\begin{cases} I_n+nJ_n=1 \\ -nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

ب– استنتج عبارتي $I_n$ و $J_n$ بدلالة $n$ .

## التمرين (31)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{-x}\ln\left(e^x+1\right)$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما هو في الشكل.




1/ باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة $f$

و التي تنعدم عند $0$ .

2/ مثل ثم احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة للحيز المستوي المحدد بـ $(C_f)$ و المستقيمات التي معادلتها : $y=0$ ، $x=0$ و $x=\alpha$ حيث $(\alpha>0)$.

3/ احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)$ .

## التمرين (32)

ليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[0;1]$ حيث : $f(x)=x^2-3x+2$

1/ احسب $a$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C)$ وَ محور الفواصل $(x'x)$ .

2/ احسب $v$ الحجم المولد بدوران المنحنى $(C)$ حول محور الفواصل $(x'x)$ .

## التمرين (33)

ليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[0;1]$ حيث : $f(x)=(x-1)e^x$

1/ احسب $a$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C)$ وَ محور الفواصل $(x'x)$ .

2/ احسب $v$ الحجم المولد بدوران المنحنى $(C)$ حول محور الفواصل $(x'x)$ .

## التمرين (34)

ليكن $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ على المجال $[1;2]$ حيث : $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$

1/ احسب $a$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C)$ وَ محور الفواصل $(x'x)$ .

2/ احسب $v$ الحجم المولد بدوران المنحنى $(C)$ حول محور الفواصل $(x'x)$ .

## التمرين (35)

$n$ عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $I_n=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

1/ باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $I_1$ .

2/ برهن أن : $I_{n+1}=-\frac{2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$ ثم استنتج قيمة كل من $I_2$ وَ $I_3$ .

3/ لتكن $f$ دالة معرفة على المجال $[1;e^2]$ بـ : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

وَ $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث وحدة الطول $1cm$ .

– احسب بـ $cm^3$ ، حجم المجسم المولد بالدوران للمنحنى $(C_f)$ حول محور الفواصل .

## التمرين (36)

في معلم للفضاء نعتبر المخروط الدوراني الذي رأسه النقطة $D(0;0;4)$ وَ قاعدته دائرة مركزها النقطة $O$ وَ نصف قطرها 2 من المستوي $(xOy)$ ، نقطع هذا المخروط بمستوي معادلته $z=a$ حيث $0\leq a\leq 4$

1/ عين نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع المخروط وَ المستوي ذي المعادلة $z=a$ بدلالة $a$ .

– استنتج $S$ مساحة قرص التقاطع .

2/ احسب $V$ حجم المخروط الدوراني باستعمال الدستور : الارتفاع × مساحة القاعدة × $\frac{1}{3}$ .

3/ احسب $V$ حجم المخروط الدوراني باستعمال التكامل .

## التمرين (37)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ : $f(x)=1-\frac{\ln(x^2)}{x}$ و $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد .

1/ ادرس تغيرات الدالة $f$ .

2/ ادرس وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=1$ .

3/ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ حيث : $-1<\alpha<-0,5$ ثم أنشئ $(C)$ .

4/ احسب $\mathcal{A}(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بـ $(C)$ و المستقيمات التي معادلاتها $x=-1$ ، $x=\alpha$ و $y=1$ .

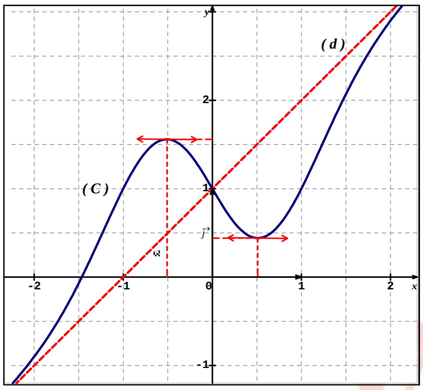
5/ بين أن $\mathcal{A}(\alpha)=\frac{\alpha^2}{4}$ ثم استنتج حصراً لـ $\mathcal{A}(\alpha)$ .

## التمرين (38)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1+x-x.e^{-x^2+1}$

و ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ طول الوحدة $\sqrt{2}cm$ .

كما هو موضح في الشكل المقابل و $(d)$ مستقيم مقارب مائل لـ $(C)$.




1/ تحقق أن $(C)$ يقبل النقطة $\omega(0;1)$ كمركز تناظر له .

2/ عين بيانياً المعادلة الديكارتية للمستقيم $(d)$ .

3/ من أجل كل عدد حقيقي $\lambda$ ، $\lambda>0$ هي المساحة بـ $cm^2$ للحيز المستوي المحدد بـ $(C)$ و $(d)$ و المستقيمات التي معادلاتها $x=0$ و $x=\lambda$ .

أ- عبر عن $\mathcal{A}(\lambda)$ بدلالة $\lambda$ ، ثم احسب $S=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$ .

ب- عين أصغر عدد طبيعي $\lambda_0$ للعدد $\lambda$ حتى يكون : $|S-\mathcal{A}(\lambda)|\le 10^{-2}$

## التمرين (39)

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1/ اثبت أن $f$ دالة فردية ، ثم ماذا تستنتج؟

2/ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم لدينا : $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

3/ أ- احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ ، ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ .

ب- استنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعين معادلتيها .

4/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

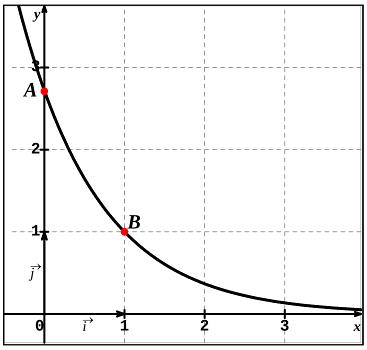
5/ انشئ المنحنى $(C_f)$ .

6/ اثبت أن : $\mathcal{A} = \int_1^4 f(x)dx = \pi \, ua$ ، فسر النتيجة هندسياً .

7/ أ– اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم لدينا : $f'(x) = 1 - f^2(x)$

ب– استنتج حجم المجسم الناتج بالدوران للحيز $\mathcal{A}$ حول حامل محور الفواصل.

## التمرين (40)



مثلنا في الشكل التالي في معلم متعامد وَ متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

المنحنى البياني لدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حل للمعادلة

التفاضلية $y' + y = 0$ حيث $f(0) = e$ .

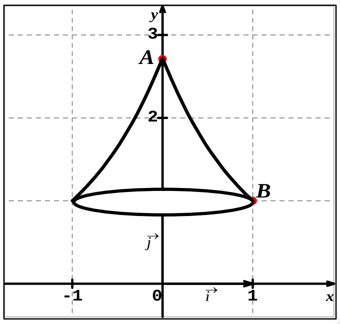
1/ عين $f(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ .

2/ ليكن $t$ عدد حقيقي من المجال $]1; e[$

– حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول $x$ : $e^{1-x} = t$

3/ لتكن $A$ النقطة التي فاصلتها $0$ وَ $B$ النقطة التي فاصلتها $1$ من المنحنى

نعتبر المجسم المحصل بدوران قوس المنحنى $AB$ حول محور



التراتيب كما هو مبين في الشكل نرمز بـ $V$ إلى حجم هذا المجسم

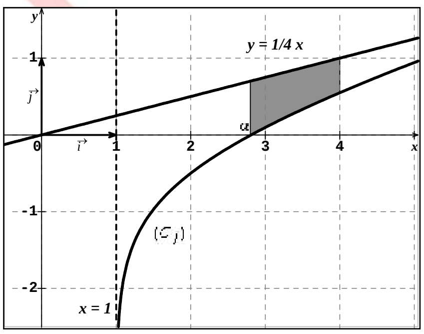
حيث : $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 dt$

– احسب $V$ باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين .

## التمرين (41)

لتكن $f$ دالة معرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{4}x - 1 + \ln\sqrt{x-1}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2\,cm$ كما هو موضح في الشكل .




1/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $2,5 < \alpha < 3$

2/ استنتج وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{4}x$

3/ احسب المساحة $\mathcal{A}(\alpha)$ للحيز المستوي المعرف بمجموعة

النقط $m(x; y)$ كما يلي : $\alpha \le x \le 4$ وَ $f(x) \le y \le \frac{1}{4}x$

4/ اثبت أن : $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - \alpha - 6\ln 3 + 20)\,cm^2$

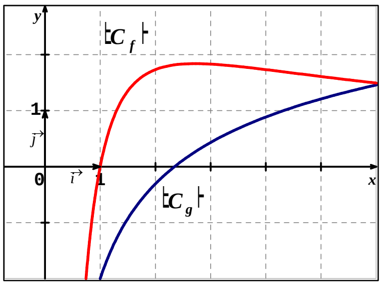
## التمرين (42)

1/ نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$

يعطى جدول تغيراتها كما يلي :

| $x$ | $0$ | $2,3$ | $x_0$ | $2,4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |

بين جميع خواص الدالة $g$ المبينة في جدول التغيرات .




2/ لتكن $f$ الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{5\ln x}{x}$

أ- بين أن: $f(x_0)=\dfrac{10}{x_0^2}$ حيث $x_0$ هو العدد المبين في جدول التغيرات.

ب- ليكن $\lambda$ عدد حقيقي ، من أجل $\lambda>0$ ، عبر عن $\int_1^{\lambda} f(t)dt$ بدلالة $\lambda$ .

3/ في الشكل المقابل رسمنا في معلم متعامد وَ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنيين $(C_f)$ وَ $(C_g)$ الممثلين للدالتين $f$ وَ $g$ على الترتيب .نسمي $I$ النقطة التي إحداثياتها $(1;0)$ ، $p_0$ نقطة تقاطع $(C_g)$ وَ محور الفواصل ، $M_0$ النقطة من $(C_f)$ التي لها نفس فاصلة $p_0$ ، $H_0$ وَ $p_0$ المسقط العمودي لـ $M_0$ على محور التراتيب .

$D_1$ حيز المستوى المحدد بالمنحنى $(C_f)$ وَ القطعتين $[IP_0]$ وَ $[P_0M_0]$ .

$D_2$ حيز المستوى المحدد بالمستطيل الذي بعداه $OI$ وَ $OH_0$ .

– بين أن الحيزين $D_1$ وَ $D_2$ لهما نفس المساحة ثم أعط حصراً لهذه المساحة سعته $0,2$ .

## التمرين (43)

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة كما يلي : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & ; \quad x<0\\ \ln(x+1) & ; \quad x\geq 0\end{cases}$

1/ اثبت أن $f$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، هل $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ؟ احسب $f'(x)$ .

2/ برهن أن من أجل كل $x\in]-\infty;0[$ : $0\leq f(x)\leq\left(\dfrac{2}{e}\right)^2$ .

3/ احسب دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .

4/ $\lambda$ عدد حقيقي حيث $0<\lambda<1$ ، نضع $\mathcal{A}(\lambda)$ العدد الحقيقي المعرف كما يلي : $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\frac{1}{\ln\lambda}}^{-1} f(x)dx$

– عين قيم $\lambda$ حتى يكون $\mathcal{A}(\lambda)$ موجباً ، ثم أحسب $\mathcal{A}(\lambda)$ .

– احسب $\lim\limits_{\lambda\to 1^{-}}\mathcal{A}(\lambda)$ .

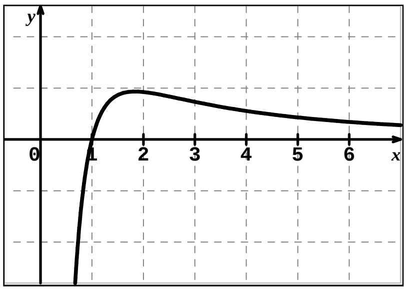
## التمرين (44)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

1/ برهن أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن : $\dfrac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x}$

2/ أ- احسب التكاملين : $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}dx$ ، $J=\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}dx$ ( يمكن استعمال المكاملة بالتجزئة لحساب $J$ )

ب- استنتج حصراً لـ : $K=\displaystyle\int_2^4 f(x)dx$




3/ الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد حيث الوحدة هي $1cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب

نعتبر مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث : $2 \leq x \leq 4$ و $0 \leq y \leq f(x)$

و نرمز إلى $\mathcal{A}$ مساحتها .

– باستعمال الحصر الموجود في السؤال 2/ ب) أعط حصراً لـ $\mathcal{A}$ بـ $cm^2$ .

4/ لتكن $(v_n)$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

أ- فسر هندسياً العدد $v_n$ .

ب- عين أصغر عدد طبيعي $n$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية متناقصة تماماً .

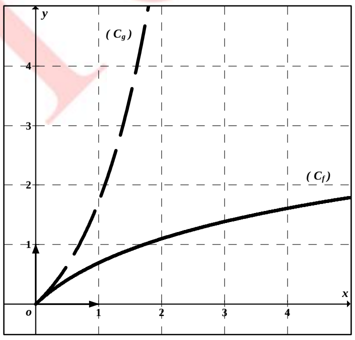
ج- احسب بدلالة $n$ المجموع التالي : $S_n=v_1+v_2+v_3+.....+v_n$ ، ثم استنتج حصراً له .

## التمرين (45)

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $]0;+\infty[$ كا يلي : $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=e^x-1$

نرمز بـ $(C_f)$ و $(C_g)$ التمثيلين البيانيين للدالتين $f$ و $g$ على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/ تحقق أن المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ لهما مماس مشترك عند النقطة $O$ ثم حدد وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى هذا المماس .




2/ بين أن المنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته : $y=x$ .

3/ ليكن $a$ عدد حقيقي موجب تماماً . نريد حساب بطريقتين مختلفتين العدد : $I(a)=\displaystyle\int_0^a \ln(x+1)dx$

أ- بين أن : $I(a)=a\ln(a+1)-\displaystyle\int_0^{\ln(a+1)}(e^x-1)dx$ ثم استنتج قيمة $I(a)$

ب- أوجد من جديد قيمة $I(a)$ باستعمال المكاملة بالتجزئة .

## التمرين (46)

$n$ عدد طبيعي غير معدوم ، نعتبر الدالة $f_n$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(x+1)^n}$

$(C_n)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f_n(x)$

2/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f_n$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3/ احسب $f'_n(x)$ بدلالة $f_n(x)$ وَ $f_{n+1}(x)$ .

4/ ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_n)$ وَ $(C_{n+1})$ .

5/ انشئ المنحنيين $(C_1)$ وَ $(C_2)$ ، ثم احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين $(C_1)$ وَ $(C_2)$ وَ المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ وَ $x=1$ .

6/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ حيث من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

أ- اثبت أن $(u_n)$ متتالية متناقصة ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $u_n=nu_{n+1}-1+\dfrac{e}{2^n}$ .

ج- استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

## التمرين (47)

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(x^2+1)$

1/ ادرس تغيرات الدالة $g$ .

2/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً $\alpha$ في المجال $]1;+\infty[$ ، تحقق أن : $1,980<\alpha<1,981$

3/ حدد حسب قيم $x$ ، إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ .

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & ; \ x\neq 0\\ 0 & ; \ x=0\end{cases}$

وَ ليكن $(C)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد وَ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث أن الوحدة $2cm$ .

1/ بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $0$ .

2/ تحقق أن الدالة $f$ فردية ثم أدرس نهايتها عند $+\infty$ .

3/ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

4/ عين معادلة لـ $(\Delta)$ مماس المنحنى $(C)$ عند النقطة ذات الفاصلة $0$ .

5/ بين أنه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ ، $\ln(x+1)\leq x$ .

6/ استنتج وضعية $(C)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ ثم أرسم كل من $(\Delta)$ وَ $(C)$ .

III- نرمز بـ $F$ على الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1/ بين أن الدالة $F$ زوجية و ادرس اتجاه تغيراتها ثم بين أن : $0 \le F(1) \le \frac{1}{2}$ .

2/ بين أنه من أجل كل $t$ من $[1;+\infty[$ ، $\frac{\ln(t^2)}{t} \le \frac{\ln(t^2+1)}{t} \le \frac{\ln(2t^2)}{t}$

3/ من أجل $x$ من $[1;+\infty[$ ، احسب $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$ ، ثم استنتج نهاية كل من $F(x)$ و $\frac{F(x)}{x}$ عند $+\infty$ .

## التمرين (48)

I- نعتبر الدوال $f_n$ ، ($n \in \mathbb{N}$) المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ :

$$\begin{cases} f_0(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2} & ; \quad n=0 \\ f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x+x^2} & ; \quad n \ge 1 \end{cases}$$

1/ ادرس تغيرات الدالة $f_0$ .

2/ نسمي $(C_0)$ المنحنى الممثل للدالة $f_0$ في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ . الوحدة $4cm$

لتكن $A$ ، $B$ نقطتان من $(C_0)$ فاصلتاهما $0$ و $1$ على الترتيب . أرسم نصفي المماسين للمنحنى $(C_0)$ عند $A$ ، $B$ و أرسم $(C_0)$ .

3/ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[0;1]$ ، نضع $f(x)=-f_0'(x)$

- احسب الدالة المشتقة للدالة $f$ و بين أن $f$ متناقصة على المجال $[0;1]$ .

4/ استنتج أنه من أجل $x$ من المجال $[0;1]$ : $\frac{1}{3} \le f(x) \le 1$

II- من أجل كل عدد طبيعي $n$ نعتبر العدد الحقيقي $I_n$ بحيث : $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$ .

1/ تحقق من وجود $I_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ .

2/ احسب : $I_0+I_1+I_2$ و $I_0+2I_1$ .

3/ ادرس من أجل كل عدد طبيعي $n$ إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[0;1]$ .

- استنتج أن المتتالية $(I_n)$ متناقصة .

4/ برهن أنه من أجل كل طبيعي $n$ و من أجل عدد حقيقي $x \in [0;1]$ ، $0 \le f_n(x) \le x^n$

- استنتج أن : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ .

5/ باستعمال المكاملة بالتجزئة برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $I_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)x^{n+1}dx$

6/ أ- باستعمال الحصر المعطى في الجزء الأول بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$$\frac{1}{3(n+2)} \le \int_0^1 f(x)x^{n+1}dx \le \frac{1}{n+2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{3(n+1)(n+2)} \le I_n \le \frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ب- ابتداءً من أي عدد $n_0$ يكون هذا الحصر يقترب بالزيادة إلى 0,01 من $I_n$ ؟

ج- عين إذن القيمة المقربة إلى 0,01 بالزيادة لـ $I_n$ من أجل $n \geq n_0$ .

## التمرين (49)

1/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم و من اجل كل عدد حقيقي $x$ من $[0;1]$: $\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$

2/أ- احسب $\int_0^1 \frac{1}{x+n}dx$

ب- استنتج انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ : $\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n}$

3/ نسمي $U$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $U(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}-\ln n$

- بين أن المتتالية $U$ متناقصة (يمكن استعمال السؤال 2.ب))

4/ نعتبر المتتالية $V$ المعرفة بـ: $V(n)=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\ln(n+1) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}-\ln(n+1)$ بين أن $V$ متزايدة.

5/ بين أن $U$ و $V$ تتقاربان نحو نفس النهاية $\ell$. عين قيمة مقربة إلى $10^{-2}$ للعدد $\ell$ .

$u$ متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ بـ $u_n = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\int_1^n \frac{1}{x}dx$

6/ أنشئ في معلم متعامد و متجانس المنحني الممثل للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على $]0;+\infty[$

7/أ- على المجالات $[1;2]$، $[2;3]$ و $[3;4]$ أنشئ على الترتيب المستطيلات $R_1$، $R_2$ و $R_3$ التي ارتفاعاتها $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$

و المستطيلات $R'_1$، $R'_2$ و $R'_3$ التي ارتفاعاتها 1، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$.

- استنتج أن $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \leq \int_1^4 \frac{dx}{x} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

ب- $n$ عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ نعتبر بنفس الطريقة السابقة المجالات $[1;2]$، $[2;3]$،.....، $[n-1;n]$ و المستطيلات $R_1$، $R_2$،...، $R_{n-1}$ التي ارتفاعاتها $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، .....، $\frac{1}{n}$ و المستطيلات $R'_1$، $R'_2$،....، $R'_{n-1}$ التي ارتفاعاتها 1، $\frac{1}{2}$،....، $\frac{1}{n-1}$

- تحقق أن : $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \leq \int_1^4 \frac{dx}{x} \leq 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}$

- حدّد ماذا يمثل كمساحة كل حد من المتباينة.

8/استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$، $0 \leq u_n \leq 1$

9/أ- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$، $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n}$

ب- استنتج أن المتتالية $u$ متناقصة.

جـ- بين أن المتتالية $u$ متقاربة.نرمز بـ $C$ إلى نهايتها .

10/ v هي المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ بـ: $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

أ- بين باستعمال السؤال 4.أ- أن المتتاليتين $u$ و $v$ متجاورتان.

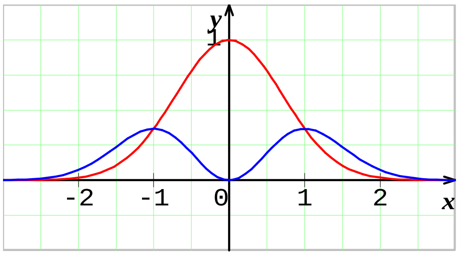
ب- استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، $0 \leq u_n - C \leq \frac{1}{n}$

معلومة : العدد الحقيقي $C$ يسمى ثابت أولر $(EULER)$ .

## التمرين (50)

**الجزء A** : نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = x^2 e^{-x^2}$

$\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين $f$ و $g$ في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$




1/ ميز في الشكل المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ (مع التبرير)

2/ ادرس شفعية الدالتين $f$ و $g$ .

3/ ادرس اتجاه تغير الدالتين $f$ و $g$ .احسب النهايتين عند $+\infty$ .

4/ ادرس الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ .

**الجزءB** : نعتبر الدالة $G$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt$

1/ ماذا يمثل $G$ بالنسبة إلى الدالة $g$ ؟

2/ من اجل $x > 0$ ، أعط تفسيرا لـ $G(x)$ .

3/ ادرس تغيرات الدالة $G$ على $\mathbb{R}$ .

نعرف الدالة $F$ على $\mathbb{R}$ بـ $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

4/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $G(x) = \frac{1}{2}\left[F(x) - xe^{-x^2}\right]$

يمكن البدء بالمقارنة بين مشتقتي الدالتين $G$ و الدالة $x \mapsto F(x) - xe^{-x^2}$

نقبل أن الدالة $F$ تقبل نهاية منتهية $\ell$ عند $+\infty$ و أن هذه النهاية هي مساحة الحيز $A$ المحدد بالمنحني $\mathcal{C}_f$ و المحورين $(O;\vec{i})$ و $(O;\vec{j})$ مقدرة بوحدة المساحات.

5/ أ- بين أن الدالة $G$ تقبل نهاية عند $+\infty$ يطلب تعيينها.

ب- فسر باستعمال المساحة العدد $N = \int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2}\, dt$

جـ- نقبل أن نهاية الدالة $G$ عند $+\infty$ تمثل المساحة $P$ (مقدرة بوحدة المساحات) للحيز $D$ المحدد بالمنحني $\mathcal{C}_g$ و المحور $(O;\vec{i})$ .

برّر بيانيا أن $\int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2}\, dt \geq \frac{\ell}{2}$ .

## التمرين (51)

**الجزءA:** نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E) \dots \ y'+y=e^{-x}$

1/ بين أن الدالة $u$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=xe^{-x}$ حل للمعادلة $(E)$

2/ حل المعادلة التفاضلية $(E_0) \ \dots \ y'+y=0$

3/ بين أن الدالة $v$ المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تكون حلا للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا كانت $v-u$ حلا للمعادلة $(E_0)$.

4/ استنتج جميع حلول المعادلة $(E)$

5/ عين الدالة $f_2$ حل المعادلة $(E)$ التي تأخذ القيمة 2 من أجل 0.

**الجزء B:** $k$ عدد حقيقي معطى، نرمز بـ $f_k$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_k(x)=(x+k)e^{-x}$

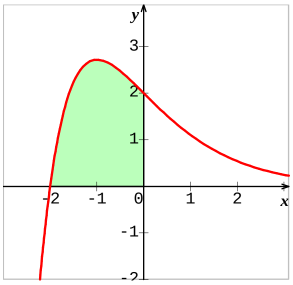
نرمز بـ $\mathscr{C}_k$ إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عين نهايات $f_k$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2/ احسب $f'_k$ من أجل كل عدد حقيقي $x$.

3/ شكل جدول تغيرات الدالة $f_k$

**الجزء C:** نعتبر متتالية التكاملات $(I_n)$ المعرفة بـ $I_0=\int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، $I_n=\int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\,dx$




1/ أ- احسب القيمة المضبوطة لـ $I_0$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$

جـ- استنتج القيم المضبوطة لـ $I_1$ و $I_2$.

2/ التمثيل البياني الموالي $\mathscr{C}_k$ هو لدالة $f_k$ المعرفة في الجزء $B$.

أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل، عين قيمة $k$ المرفقة بالمنحنى $\mathscr{C}_k$.

ب- لتكن $S$ مساحة الجزء المضلل(مقدرة بوحدة المساحات).عبر عن S بدلالة $I_0$ و $I_1$ ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة $S$.

## التمرين (52)

نهتم في هذه المسألة بدراسة متتالية تتقارب نحو $e^2$

نعرف من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ التكامل $I_n=\int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$

1/ احسب $I_1$.

2/ بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 1$: $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}(e^2-1)$.

3/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $I_{+1}=I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

4/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\dots+\frac{2^n}{n!}+I_n$

5/ نضع ، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n=\frac{2^n}{n!}$

أ- احسب $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ : $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

6/ استنتج نهاية المتتالية u ثم نهاية المتتالية $(I_n)$ .

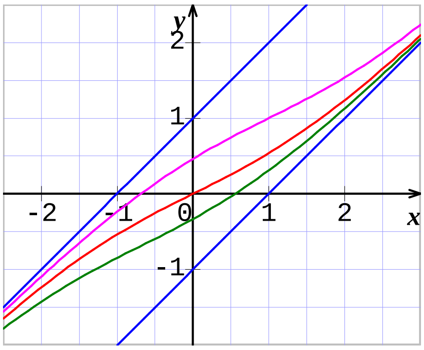
7/ بين أن : $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$

## التمرين (53)

1/ من أجل كل عدد حقيقي $k$ ( $k \geq 0$ )، نعتبر الدالة $f_k$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x) = x + \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$

أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي $k$ ( $k \geq 0$ )، الدالة $f_k$ هي حل للمعادلة التفاضلية $(E) : 2y' = (y - x)^2 + 1$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة $f_k$




2/ نرمز بـ $\mathscr{C}_k$ إلى التمثيل البياني للدالة $f_k$ في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

في الشكل الموالي رسمنا المستقيمين $d$ و $d'$ اللذين معادلتاهما على الترتيب $y = x - 1$ و $y = x + 1$ و كذلك عدة منحنيات $\mathscr{C}_k$ مرفقة لقيم خاصة لـ $k$ .

عين العدد $k$ المرفق للمنحنى $\mathscr{C}$ الذي يشمل $O$، ثم العدد $k$ المرفق للمنحنى $\mathscr{C}'$ الذي يشمل النقطة $A(1;1)$ .

3/ أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x$ :

$$(1)..... \quad f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^x} \qquad \text{و} \qquad (2).... \quad f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1 + ke^x}$$

ب- من أجل كل $k > 0$ ، استنتج :

- وضعية المنحنى $\mathscr{C}_k$ بالنسبة إلى المستقيمين $d$ و $d'$ .
- المستقيمات المقاربة للمنحنى $\mathscr{C}_k$ .

4/ حالة خاصة: $k = 1$

أ- بين أن $f_1$ دالة فردية.

ب- لتكن الدالة $F$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$

- فسر هندسيا العدد $F(x)$ في الحالتين $x > 0$ و $x < 0$ . - عين إذن شفعية الدالة مستعملا التفسير البياني.

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة $F$ على $\mathbb{R}$ .

د- احسب $F(x)$ مستعملا الشكل الأنسب لـ $f(x)$ .

ملاحظة هامة : تجدون حلول جميع التمارين في كتاب" الأمل في الرياضيات"

و في الجزء الأول