الهندسة الفضائية

نعتبر في كل ما يلي $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء ، نضع : $A(x_A;y_A;z_A)$ ، $B(x_B;y_B;z_B)$ ، $C(x_C;y_C;z_C)$

مركبات شعاع	مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
طويلة شعاع	طويلة الشعاع $\vec{u}(x;y;z)$ هي $\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
المسافة بين نقطتين	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
منتصف قطعة مستقيمة	I منتصف القطعة $[AB]$ حيث : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
الجداء السلمي بين شعاعين	$\vec{u}\bullet\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert\times\lVert\vec{v}\rVert\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
العبارة التحليلية للجداء السلمي	$\vec{u}\bullet\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$ حيث $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$
تعامد شعاعين	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان : $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$
الارتباط الخطي بين شعاعين	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان إذا كان : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k$ معناه : $\vec{u}=k\vec{v}$ مع $k\in\mathbb{R}$
المعادلة الديكارتية للمستوي (P)	$ax+by+cz+d=0$ ، حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعه الناظم
توازي مستويين (P) و (P')	$\vec{n}=k\times\vec{n'}$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}$ ناظمي لـ (P') و $k\in\mathbb{R}$
تعامد مستويين (P) و (P')	$\vec{n}\bullet\vec{n'}=0$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}$ ناظمي لـ (P')
بعد النقطة A عن المستوي (P)	$d(A;(P))=\frac{\lvert ax_A+by_A+cz_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
المعادلة الديكارتية لسطح كرة (S)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ حيث $\omega(x_0;y_0;z_0)$ مركزها و r نصف قطرها
مرجح نقطتين	G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ مع $\alpha+\beta\neq 0$ معناه : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
مرجح ثلاث نقط	G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\delta)\}$ مع $\alpha+\beta+\delta\neq 0$ معناه : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
مركز ثقل المثلث ABC	G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha),(C;\alpha)\}$
إحداثيات مرجح نقطتين	$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$
إحداثيات مرجح ثلاث نقط	$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C}{\alpha+\beta+\delta};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\delta z_C}{\alpha+\beta+\delta}\right)$
مساحة مثلث	$S=\frac{1}{2}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع
حجم رباعي الوجوه	$V=\frac{1}{3}\times S\times h$ حيث S مساحة القاعدة (مثلث) و h الإرتفاع

التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)	$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$ ، $t \in \mathbb{R}$ حيث $A(x_A;y_A;z_A)$ منه و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له
التمثيل الديكارتي للمستقيم (d)	$\dfrac{x-x_A}{a} = \dfrac{y-y_A}{b} = \dfrac{z-z_A}{c}$
التمثيل الوسيطي للمستوي (P)	$\begin{cases} x = x_A + at + a's \\ y = y_A + bt + b's \\ z = z_A + ct + +c's \end{cases}$ ، $t,s \in \mathbb{R}$ حيث $A(x_A;y_A;z_A)$ منه $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعي توجيه له
مجموعة النقط M في الفضاء	$\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0$ مجموعة النقط M هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له $AM = BM$ مجموعة النقط M هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ $AM = AB$ مجموعة النقط M هو سطح كرة مركزها A و نصف قطرها AB $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$ مجموعة النقط M هو سطح كرة التي قطرها $[AB]$ $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} > 0$ أو $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} < 0$ هو نصف فضاء مفتوح حده المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$ مع $k \in \mathbb{R}^*$ هو المستوي العمودي على (AB) و الذي يشمل لنقطة H حيث H المسقط العمودي لـ M على (AB)

سلسلة الامل في الرياضيات رقم (05)

الشعب : علوم تجريبية ، تقني رياضي ، رياضيات

إعداد الاستاذ : توامي عمر المستوى : ثالث ثانوي

الهندسة الفضائية

التمرين (01)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر للمستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $x-2y+2z+5=0$ ، و لتكن النقاط $A(1;3;0)$, $B(-1;1;-1)$, $C(3;4;0)$, $D(1;1;1)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير :

1- المستقيم (AB) محتوى في المستوي (P)

2- (P) مماسا لسطح الكرة (S) التي مركزها D و نضف قطرها $R=\frac{6}{\sqrt{3}}$

3- النقطة C تنتمي إلى المستقيم (AB)

4- النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة للمستوي (P)

5- المستوي ذو المعادلة $4x+2y-15=0$ هو مستوي محوري للقطعة $[AC]$

التمرين (02)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطة $A(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{U}(1;5;-1)$ والمستويين $(P),(Q)$ اللذين معادلتيهما على الترتيب : $x-y-z=7$ و $x-2z=11$

1- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي شعاع توجيهه $\vec{U}$ و يمر من A .

2- بين ان المستويين $(P),(Q)$ متقاطعين يطلب اعطاء تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (Δ') ثم بين أن الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ') .

3- بين ان المستقيمين (Δ)و(Δ') ليسا من نفس المستوي.

4- نعتبر النقطتين $H(-3;3;5)$ و$H'(3;0;-4)$: بين أن $H\in(\Delta)$ و $H'\in(\Delta')$ و أن $(HH')\perp(\Delta)$.

5- عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}=126$.

التمرين (03)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقاط $A(2;0;1)$ ، $B(-2;1;0)$ ، $C(1;-1;4)$

1- حدد طبيعة المثلث ABC

2- بين أن الشعاع $\vec{n}(2;13;5)$ هو ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3- أ) عين احداثيات G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$

ب) استنتج المجموعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

touami.omar@gmail.com

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$$

عين احداثي النقطة H المسقط العمودي لمبدأ المعلم O على المستوي (ABC)

التمرين (04)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقاط $A(1;1;1)$ ، $B(3;1;0)$ ، $C(-1;0;1)$ ، $D(2;0;1)$ و (d) مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=t-2 \\ y=2t-5 \\ z=-t+4 \end{cases}$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير

1- النقطة A تنتمي الى المستقيم (d)

2- المستقيمان (d) و (BC) متعامدان

3- المستوي (ABC) معادلته $x-2y+2z-1=0$

4- نظيرة النقطة D بالنسبة للمستوي (ABC) هي النقطة $E(-1;6;-5)$

5- احداثيات مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$ هو النقطة $G\left(-1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

6- مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$ هي سطح كرة مركزها G و نصف قطرها 6

جد معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل النقطة $B(3,-6,2)$ والعمودي على كل من المستويين $(P1)$ و $(P2)$

التمرين (05)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$x-y+z-11=0$ معادلته ديكارتية للمستوي (P) الذي يمس سطح الكرة (s) ذات المركز $w\ (1;-1;3)$.

1/ جد نصف قطر سطح الكرة (s) ، ثم أستنتج معادلة ديكارتية لـ : (s) .

2/ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة w والعمودي على (P) .

3/لتكن النقطة H نقطه تماس (s) والمستوي (P) ، عين إحداثيات النقطة H .

4/ عين إحداثيات النقط المشتركة بين (s) و حامل محور الفواصل .

5/ المستويان $(P1)$ و $(P2)$ معادلتيهما على الترتيب: $x-y-2z-3=0$ و $2x+y-z-2=0$.

التمرين (06)

$A(3;-2;2)$ $B(6;1;5)$، $C(6;-2;-1)$، $D(0;4;-1)$ أربع نقط من الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1. بين أن المثلث ABC قائم .
2. جد معادلة ديكارتية للمستوي (DBC).
3. أثبت أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).
4. استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
5. أثبت أن قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{®}{4}$ راديان.
6. أحسب بعد النقطة A عن (BDC).
7. نعتبر المستويين $(P_1),(P_2)$ حيث : $(P_1):x+y+z-3=0$ و $(P_2):x-z-1=0$

- أثبت أن $(P_1),(P_2)$ يتقاطعان في مستقيم (Δ) .
- أثبت أن النقطة A تنتمي إلى (Δ).
- أثبت أن الشعاع $\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).
- استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ).

التمرين (07)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1- نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ، والمستوي (R) المعرف بالمعادلة الديكارتية: $x+2y-7=0$.

2 - بين أن المستويين (P) و (R) متعامدان .

3- برهن أن تقاطع المستويين (P) و (R) هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه له $\vec{u}(2;-1;1)$

4 - لتكن النقط $A(5;-2;-1)$ ، احسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A عن المستوي (R)

- عين بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) .

5- من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(1+2t;3-t;t)$ ، عين بدلالة t الطول AM_t ، ونرمز لهذا الطول بـ : (t) ، ونعرف الدالة من ؟ نحو ؟. – ادرس اتجاه تغير الدالة واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

– فسر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى .

التمرين (08)

اجب صح أو خطأ مع التبرير

الفضاء منسوب إلى معلم متجانس و متعامد ، لتكن $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ $C(6;-2;-1)$ ، $D(0;4;-1)$

1. المثلث ABC قائم
2. المستوي (P) الذي معادلته $x+y+z-3=0$ عمودي على المستقيم (AB) و يشمل A
3. $\vec{«}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) تقاطع المستوي (P) و المستوي (P') الذي معادلته $x+z-5=0$ ،
4. مجموعة النقط $M(x;y;z)$ و التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6=0$ هي معادلة كرة مركزها A ونق=6

التمرين (09)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوى (P) ذو المعادلة $2x+y-2z+4=0$

A النقطة ذات الإحداثيات $(3,2,6)$ و B نقطة إحداثياها $(1,2,4)$ و C إحداثياها $(4,-2,5)$

1. – بين أن النقط C,B,A تعرف المستوى (P)
2. – بين أن المثلث ABC قائم
   - أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O و العمودي على المستوي (P)
   - لتكن النقطة K المسقط العمودي للنقطة O على (P). أحسب المسافة OK
3. – أوجد إحداثيي النقطة G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$
   - نرمز بـ I إلى مركز ثقل المثلث ABC. بين أن G تنتمي إلى المستقيم (OI)
   - احسب المسافة بين G و المستوى (P)
   - لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\left\|3\vec{MO}+\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=5$.

عين (Γ) وما هي مجموعة النقط المشتركة بين (Γ) و(P)

التمرين (10)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Δ) المستقيم المار من النقطة A(-1,2,0) وشعاع توجيهه $\vec{v}(1,-1,-1)$ ، (p) ، (q) مستويين معرفين بما يلي:

$(p): 3x+2y+z-1=0 \qquad (q): 2x-y+3z+4=0$

1- أ- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) ب- تحقق أن $(\Delta)\subset(p)$ و $(\Delta)\subset(q)$ ، ماذا تستنتج ؟

2- لتكن (S) سطح كرة ذات المركز: Ω (1,-2,2) والمماسة للمستوي (q)

أ- أكتب معادلة ديكارتية لـ (S) ب- تحقق أن $\Omega\in(p)$ ثم حدد تقاطع (p) و (s) معينا عناصرها.

التمرين (11)

نعتبر الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط $A(0,2,1), B(-1,1,-3), C(1,0,-1)$

1. أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها C و تشمل A.

2. ليكن المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-1-h \\ y=1+2h \\ z=-3+2h \end{cases}$

أ. أكتب معادلة للمستوي (p) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (Δ).

ب. أحسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ).

ت. ماذا تستنتج فيما يتعلق الوضع النسبي لكل من (Δ) و سطح الكرة (S)

التمرين (12)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ المستقيم Δ المعرف بـ: $\begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=\lambda+1 \\ z=2 \end{cases}$ ، λ [illegible] .

1) لتكن النقطة : $A\ 0;1;3$ ، بين أن A لا تنتمي إلى Δ .

2) Q المستوي الذي يشمل A و يعامد Δ .عين إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع Q و Δ .

ثم أحسب عندئذ المسافة بين A و Δ .

3) ليكن π المستوى الذي يشمل A ويحوي Δ .عين تمثيلا ديكارتيا لـ π .

التمرين (13)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(4 ; 0 ; -3) ، B(2 ; 2 ; 2) ، C(3 ;-3 ;-1) و D(0 ; 0 ; -3) .

1) عين معادلة ديكارتية لمستوي محور [AB] (ليكن (P) هذا المستوي) .

2) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين[BC] و [DC] معرفان بالمعادلتين :

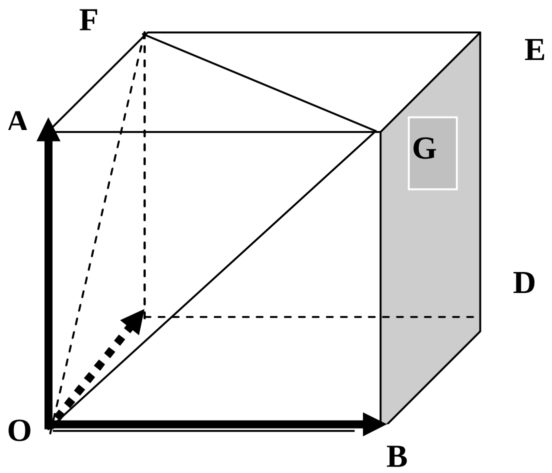
2x-10y-6z-7=0 و 3x-3y+2z-5=0 على الترتيب .

أ) – بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها.

ب)– بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها .

التمرين (14)

نعتبر المكعب $OBDCAGEF$ في الفضاء



1- بين أن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OG} = 0$ ثم استنتج ان المستقيم (AD) عمودي على المستوي (OFG)

2- نعتبر المعلم $(O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})$ للفضاء.

أ- عين احداثيات النقط O,B,D,C,A,G,E,F

ب- عين احداثيات الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (OFG)

ج- عين تمثيل وسيطي للمستقيم (AD) ثم عين احداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (AD) و المستوي (OFG).

3- أحسب بطريقتين مختلفتين بعد النقطة A عن المستوي (OFG)

4- هل النقطة H هي مركز ثقل المثلث OFG ؟ علل إجابت

التمرين (15)

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 - نعتبر المستوي P الذي يشمل النقطة $B(1,-2,1)$ و الشعاع $\vec{n}(-2,1,5)$ ناظمي له و ليكن R المستوي الذي معادلته $x+2y-7=0$

أ-برهن أن P و R متعامدان

ب- برهن أن تقاطع P و R هو مستقيم (Δ) يشمل النقطة $C(-1,4,-1)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(2,-1,1)$

ت-لتكن النقطة $A(5,-2,-1)$. أحسب بعد A عن المستوي P ثم بعد A عن المستوي R

ث-أحسب بعد A عن المستقيم (Δ) .

2- أ- ليكن t عدد حقيقي كيفي . نعتبر النقطة $M_t(1+2t,3-t,t)$. أحسب بدلالة t الطول AM_t

أ-نضع ¨ $(t) = AM_t$. أدرس تغيرات الدالة ¨ على $\mathbb{R}$. حدد قيمتها الحدية الصغرى.

ب- كيف تفسر هندسيا القيمة الحدية الصغرى للدالة ¨ ؟

التمرين (16)

ABCD رباعي وجوه نسمي على الترتيب I ، J وK مراكز ثقل المثلثات ABC ، ABD ، ACD .

1. عين النقط I ، J وK على الشكل .
2. أ). M نقطة من الفضاء، عبر بدلالة $\overrightarrow{MI}$ المجموع الشعاعي $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

ب). استنتج أن مرتبطان خطيا .

3. بين أن المستويين (BCD) و (IJK) متوازيان.
4. G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD، بين أن المستقيمات (DI) ، (CJ) و(BK) تتلاقى في النقطة G ، هل G تنتمي إلى المستوي (IJK) ؟

التمرين (17)

نعتبر رباعي الوجوه OABC حيث OAC ،OAB و OBC مثلثات قائمة في O و OC=OB=OA=1 ، [CI] إرتفاع في المثلث ABC، [OH] إرتفاع في المثلث OIC .

1. ما طبيعة المثلث ABC؟ أحسب الطول AB.
2. أثبت أن المستقيمان (OH)و(AB) متعامدان و أن H ملتقى الارتفعات في المثلث ABC .
3. أرسم المثلث OCI بعد حساب الأطوال OIو CI (الوحدة هي طول OC) ، عين .H
4. أ). عين الطول OH في المثلث OCI.

ب). أحسب V حجم رباعي الوجوه OABC ثم S مساحة ABC .

ج). أوجد علاقة بين S،VوOH ثم تحقق من النتيجة 4– أ).

5. نعتبر النقطة D المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{HO}$ ثم ننسب الفضاء إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

أ). بين أن إحداثيات النقطة H هي $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

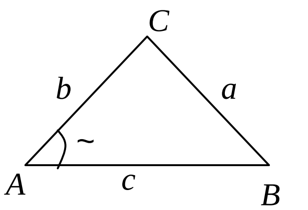
ب). بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم.

ج). لتكن Ω مركز سطح الكرة الداخلية للرباعي ABCD

– بين أن Ω نقطة من المستقيم (OH) وأحسب إحداثياتها.

التمرين (18)

نعتبر المكعب OADBCFGE ، I مركز المربع DBEG الذي طول ضلعه 4 ، L و K النقطتان المعرفتان كما يلي $\overrightarrow{CL}=\frac{5}{8}\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{AK}=\frac{5}{8}\overrightarrow{AF}$



نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ من الفضاء $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$, $\vec{k}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

1) أوجد إحداثيات النقط A ، C ، E ، I ، K و L

2) بين أن المثلث KIL قائم و أعط قيمة مقربة إلى 0,1 لقيس الزاوية $K\hat{L}I$

3) باستعمال علاقة الكاشي (في مثلث ما $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\sim$)، عين قيمة مقربة إلى 0,1 لقيس الزاوية $K\hat{C}I$

4) أ) أكتب معادلة لسطح الكرة S ذات المركز w(2 ; 2 ; 2) و التي تشمل O

ب) تحقق أن S تمس أوجه المكعب من الداخل .

ج) عيّن تقاطع S مع المستوي الذي معادلته z = 0

التمرين (19)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط التالية A(3 ; 0 ; 10)، B(0 ; 0 ; 15) و C(0 ; 20 ; 0)

1) a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

b) بين أن (AB) يقطع حال مل محور الفواصل في نقطة (9 ; 0 ; 0)

c) علّل لماذا A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OBC مع المستقيم (BC)

a) بين أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) .

– استنتج أن (EH) هو الارتفاع المرسوم من E في المثلث EBC .

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (OEH)

c) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

d) بين أن الجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$

تقبل حلا وحيدا . ماذا يمثل هذا الحل ؟

e) أحسب البعد OH . استنتج أن EH = 15 و مساحة المثلث EBC .

3) بحساب حجم رباعي الوجوه OEBC بطريقتين ، استنتج بعد النقطة O عن المستوي (ABC)

– هل يمكن توقع هذه النتيجة من (2 , c)

التمرين (20)

نعتبر المكعب ABCDEFGH و الذي حرفه 1 .

a عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر النقطة M من نصف المستقيم [AE] المعرف كما يلي $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$

1) عين حجم رباعي الوجوه ABDM بدلالة a

2) لتكن K مرجح الجملة $\{(M;a^2);(B;1);(D;1)\}$

a) عبر عن $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BD}$

b) أحسب $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{MB} = 0$

c) بين أن : $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{MB} = 0$

d) بين أن : K هو ملتقى ارتفاعات المثلث BDM

3) أثبت المساوتين : $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MB} = 0$ و $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{MD} = 0$ ، ماذا تستنتج ؟

4) a) بين أن المثلث BDM متساوي الساقين وأن مساحته $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ وحدة مساحة

b) عين العدد a حتى تكون مساحة BDM تساوي 1 وحدة مساحة . أحسب الطول AK في هذه الحالة

التمرين (21)

الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط A(3 ; -2 ; 2) ، B(6 ; 1 ; 5) ، C(6 ; -2 ; - 1)

I) 1) بين أن المثلث ABC قائم

2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته x + y + z – 3 = 0

بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية لـ (P')

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

II) 1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات (0 و 4 و – 1) ، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستقيم (ABC)

2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC

3) بين أن قيس الزاوية $B\widehat{D}A$ هو $\frac{®}{4}$ راديان

4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC

ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)

التمرين (22)

الفضاء منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نريد تعيين المستويات التي تشمل المستقيم d المعرف بالجملة التالية :

$\begin{cases}2x+y+1=0\\ x+2z-3=0\end{cases}$ بحيث تكون هذه المستويات تمس سطح الكرة S التي مركزها A(0 ; 4 ;0) و نصف قطرها $\sqrt{5}$

1) بين أن المستوي (P) الذي معادلته x + 2 z – 3 = 0 لا يمس S .

2) نعتبر المستويات (P_a) : 2x+y+1+a(x+2z-3) = 0

لاحظ أن d محتواة في (P_a) من أجل كل قيم a الحقيقية

[باستعمال برمجية مناسبة عرّف A ، عرّف المتغير لعددي a في مجال ، المستقيم d و المستويات (P_a)] ثم عرّف مستقيم تقاطع (P_a) مع (XOY) ثم اختر النمط TRACE و عاين أن (P_a) يشمل كل المستويات التي تحو d عدا واحدا . ملهو ؟

انشئ دائرة تقاطع (P_a) مع S ثم خمّن قيم a التي تعطي المستويات (P_a) التي تمس S

3) أحسب بعد A عن (P_a) ثم عين قيم a حتى يكون (P_a) مماسا لـ S

التمرين (23)

نعتبر في الفضاء معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن $A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ ، $C(0,0,c)$ مع a ، b وَ c أعداد حقيقية موجبة تماماً

الهدف من التمرين هو حساب S مساحة المثلث ABC بدلالة a ، b وَ c .

1/ أثبت أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$

2/ أ- أثبت أن بعد النقطة $M(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي (ABC) هو العدد الحقيقي الموجب $d(M_0,(ABC))$

المعطى بالعلاقة : $d(M_0,(ABC))=\frac{\left|\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}+\frac{z_0}{c}-1\right|\times abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$

ب- استنتج بدلالة a ، b وَ c بعد النقطة O عن المستوي (ABC) .

3/ أحسب حجم الرباعي $OABC$.

4/ أثبت أن مساحة المثلث ABC هي : $S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.