★ الموافقات-الأعداد الأولية ★

① الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف	نقول أن العددين الصحيحين a ، b متوافقان بترديد n (طبيعي) إذا وفقط إذا كان $a-b$ من مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ وَ نكتب $a \equiv b[n]$ وَ يقرأ a يوافق b بترديد n .
خواص	إذا كان: $a \equiv b[n]$ وَ $b \equiv c[n]$ فإن: $a \equiv c[n]$. إذا كان: $a \equiv b[n]$ وَ $c \equiv d[n]$ فإن: $a \pm c \equiv b \pm d[n]$ وَ $a \times c \equiv b \times d[n]$. إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن: $a+k \equiv b+k[n]$ وَ $k \times a \equiv k \times b[n]$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن: $a^p \equiv b^p[n]$ حيث $p \in \mathbb{N}$. إذا كان: $a \equiv b[n]$ فإن: $a+kn \equiv b[n]$ وَ $a \equiv b+kn[n]$. إذا كان: $a \equiv 0[n \times m]$ فإن: $a \equiv 0[n]$ وَ $a \equiv 0[m]$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$ وَ أولي مع n . إذا كان: $a \times b \equiv 0[n]$ فإن: $a \equiv 0[n]$ أو $b \equiv 0[n]$ مع n عدد أولي.

② القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ وَ المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$

خواص	$PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$ حيث $a \geq b$ وَ r باقي قسمة a على b . $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(b;r)$ حيث: $k \in \mathbb{Z}^*$. $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$ إذا كان: $PGCD(a;b) = d$ فإن: ($d \backslash a$ وَ $d \backslash b$) و أيضاً: $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$ مع $PGCD(a';b') = 1$ $PGCD(ka;kb) = \|k\| PGCD(a;b)$ مع $k \in \mathbb{Z}^*$. إذا كان: $PGCD(a;b) = 1$ فإن: $PGCD(a;b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. إذا كان: $PGCD(a;b) = 1$ فإن: $PGCD(a^n;b^n) = 1$ مع $n \in \mathbb{N}^*$. إذا كان: $PGCD(a;b) = 1$ وَ $PGCD(a;c) = 1$ فإن: $PGCD(a;bc) = 1$.

③ مبرهنة بيزو

يكون العددان الطبيعيان غير المعدومين a وَ b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان x وَ y حيث: $ax+by=1$

④ مبرهنة غوص

a ، b وَ c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة ، إذا كان a يقسم الجداء bc وَ كان a أولياً مع b ، فإن a يقسم c .

⑤ المبرهنة الصغيرة لفيرما

إذا كان p عددا أولياً و a عدداً طبيعياً لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $(a^{p-1}-1)$

سلسلة الامل في الرياضيات رقم (11)

الشعب : علوم تجريبية ، تقني رياضي ، رياضيات

إعداد الاستاذ : توامي عمر المستوي : ثالث ثانوي

القسمة و الموافقات في $\mathbb{Z}$

التمرين (01)

– عين كل الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها 13 قاسما للعدد $n+4$ و $|n| \leq 22$.

التمرين (02)

– إذا كان باقي قسمة العدد الطبيعي a على b هو $(b-1)$ فما هو باقي قسمة العدد $(a+1)$ على b؟

التمرين (03)

ليكن a و b عددين صحيحين غير معدومين .

1/ أنشر العبارة $(a+b)^3$.

2/ برهن أنه إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن 3 يقسم $(a+b)^3$.

التمرين (04)

1/ حاصل قسمة عدد طبيعي n على 37 هو a و الباقي هو a^2 ، ما هي القيم الممكنة للعدد n .

2/ باقي قسمة العدد x على 35 هو 20 و باقي قسمته على 18 هو 12 ، أوجد x إذا علمت أن حاصل قسمة x على 18 هو ضعف حاصل قسمته على 35 .

التمرين (05)

ليكن n عددا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .

– برهن أن $n+5$ مضاعف لـِ $n-2$ إذا وفقط إذا كان $n=3$ أو $n=9$.

التمرين (06)

– عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ في الحالات التالية :

1/ $x^2-y^2-65=0$

2/ $x^2-9y^2-65=0$

3/ $xy-5x+3y=80$

TouamiMaths

التمرين (07)

1/ عين مجموعة الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 468 .

2/ حل في $\mathbb{N}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $2x^3 + x^2 - 468 = 0$.

التمرين (08)

1/ أوجد أصغر عدد طبيعي له 10 قواسم .

2/ ليكن x عدد طبيعي يكتب على الشكل : $x = 2^n \times 3^m \times 5^{\alpha} \times 7$

– عين القيم الممكنة للعدد x علماً أن عدد قواسمه هو 15 .

التمرين (09)

n عدد طبيعي ، نضع : $a = 3n^2 + 10n + 15$ ، $b = n + 2$ وَ $c = n + 15$

1/ عين قيم العدد الطبيعي n التي تجعل a يقبل القسمة على b .

التمرين (10)

2/ عين قيمة العدد الطبيعي n التي تجعل العددين b وَ c مربعين تامين .

التمرين (11)

1/ كيف يمكن اختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\dfrac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

2/ عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 وعدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a .

التمرين (12)

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n - 1$ و $n^2 + n + 3$.

1/ بين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$ ، ثم استنتج أن a يقسم $3n + 2$.

2/ بين أن a يقسم 5 .

3/ ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a ؟

التمرين (13)

n عدد طبيعي .

1/ بين أن العددين $n^2 + 5n + 4$ وَ $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $n + 1$.

2/ عين مجموعة قيم n التي من أجلها يكون العدد $3n^2 + 15n + 19$ قابلاً القسمة على $n + 1$.

3/ استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن العدد $3n^2+15n+19$ غير قابل للقسمة على n^2+3n+2 .

التمرين (14)

1/ – عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 145 وَ 2880 .

– استنتج مجموعة قواسم المشتركة للعددين 144 وَ 2880 .

2/ أوجد عدد طبيعي n إذا علمت أن باقي قسمة 2900 على n هو 20 وَباقي قسمة 156 على n هو 12.

التمرين (15)

– عين قيم الأعداد الطبيعية n المكون من رقمين مختلفين حيث 13 و 17 هما على الترتيب ، الباقيان للقسمة الأقليدية للعددين 4525 و 4145 على n .

التمرين (16)

1/ عين $PGCD(182;126)$.

2/ باستعمال خوارزمية أقليدس ، جد عددين صحيحين α و β يحققان : $182\alpha+126\beta=14$

التمرين (17)

ليكن a و b عددين طبيعيين غير معدومين .

1/ برهن أن القواسم المشتركة للعددين a و (a^2+b) هي نفس القواسم المشتركة للعددين a و b .

– ما القول عن $PGCD(a;a^2+b)$ و $PGCD(a;b)$.

2/ برهن أن : $PGCD(a+b;2a+3b)=PGCD(a;b)$.

التمرين (18)

– عين في كل حالة من الحالات التالية الأزواج $(a;b)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

1/ $\begin{cases} a+b=96 \\ PGCD(a;b)=12 \end{cases}$ 2/ $\begin{cases} a\times b=360 \\ PGCD(a;b)=6 \end{cases}$ 3/ $\begin{cases} a^2-b^2=1575 \\ PGCD(a;b)=5 \end{cases}$

التمرين (19)

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع : $x=7a-5b$ و $y=4a-3b$.

1/ برهن أن $PGCD(|x|;|y|)=PGCD(a;b)$.

2/ عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha;\beta)$ حيث : $\begin{cases} (7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300 \\ PGCD(\alpha;\beta)=5 \end{cases}$

التمرين (20)

1/ n عدد صحيح يختلف عن 1 . نضع : $a = 3n + 5$ و $b = n - 1$.

أ- تحقق أن $a = 3b + 8$.

ب- جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا .

2/ نفرض أن n عدد طبيعي .

أ- برهن أن $PGCD(a;b)$ هو قاسم للعدد 8 .

ب - ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$.

التمرين (21)

– ما هو باقي قسمة كل من الأعداد الآتية على 3 :

$1954^{1962} + 33^n$, $5 \times 16^{n+2015} - 2015 \times 2^{1830}$ حيث n عدد طبيعي .

التمرين (22)

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $10^{3n} \equiv 1[37]$

2/ استنتج باقي قسمة العدد : $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ على 37 .

التمرين (23)

– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

1/ $2n^2 + 5n + 4 \equiv 1[n+1]$ 2/ $n(n^4 - 1) \equiv 0[3]$ 3/ $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$

التمرين (24)

1/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على 9 .

2/ ما هو باقي قسمة $6568^{2012} + 16^{2013} - 5 \times 8^{2014}$ على 9 .

3/ عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها: $25^{3n} + 25^n - 5 \equiv 0[9]$

التمرين (25)

1/ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 3^n على 11

2/ استنتج باقي قسمة العدد $5^n - 3^n$ على 11.

3/ عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها : $5^n - 3^n - 16 \equiv 0[11]$

TouamiMaths

التمرين (26)

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3 .

2/ لتكن a ، b وَ c ثلاث أعداد صحيحة لا تقبل القسمة على 3

– برهن أن العدد $a^2 + b^2 + c^2$ يقبل القسمة على 3 .

التمرين (27)

– عين قيم العدد الطبيعي n في كل حالة مما يلي :

1/ $2n - 3 \equiv 0 [5]$ 2/ $n^3 + n + 1 \equiv 0 [7]$ 3/ $\begin{cases} n \equiv 2 [3] \\ n \equiv 3 [4] \end{cases}$

التمرين (28)

– عين قيم العدد الطبيعي n في كل حالة

1/ $n + 5 \equiv 0 [n - 1]$ 2/ $3n - 18 \equiv 0 [n + 2]$ 3/ $n^2 - 3n + 5 \equiv 0 [n - 1]$

التمرين (29)

1/ أ– عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^4 على 5 ثم العدد 6^{10} على 11 .

ب– استنتج أن العدد $6^{40} - 1$ يقبل القسمة على 55 .

2/ ليكن a عدد طبيعي يحقق $a^{17} \equiv b [55]$ وَ $a^{40} \equiv 1 [55]$

– بين أن : $b^{33} \equiv a [55]$.

التمرين (30)

1/ ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11 .

2/ استنتج باقي قسمة العدد $2 + 8^{2013} - 1989^{2014}$ على 11 .

3/ عين العدد الطبيعي n بحيث : $\begin{cases} 25^{5n+1} + 3n - 1 \equiv 0 [11] \\ 3 \leq n < 47 \end{cases}$

التمرين (31)

1/ أ– أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 3^n على 10 .

ب – استنتج باقي القسمة الأقليدية على 10 للعدد $(63 \times 9^{2001} - 7^{1422})$.

2/ أ– برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n - 1)3^{2n+1} [10]$.

ب – عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$.

TouamiMaths

التمرين (32)

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7 .

2/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $\left[2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\right]$ قابلا للقسمة على 7 .

3/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2\times 3^n + 3\times 4^n$.

– أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث : $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

– ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها s_n قابلا للقسمة على 7 ؟

التمرين (33)

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 10 .

– استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $\left[7^{4k}+7^{4k+1}+7^{4k+2}+7^{4k+3}\right]$ يقبل القسمة على 10 .

2/ من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1+7+7^2+...+7^n$

– أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n\,[10]$.

– أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الأقليدية للعدد S_n على 10 .

التمرين (34)

عين العدد الطبيعي n الذي يكتب $n=\overline{xyz}$ في النظام ذي الأساس 7 و $n=\overline{zyx}$ في النظام ذي الأساس 11 .

التمرين (35)

a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 < a < b < c$.

– عيّن a ، b و c والجداء abc علما أنّ في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{555}$.

التمرين (36)

في النظام ذي الأساس 9 يكتب عدد طبيعي n كما يلي : $n=\overline{1271x}$.

1/ عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 8 .

2/ عين قيمة x حتى يكون n قابلا للقسمة على 11 .

التمرين (37)

عيّن عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n=\overline{27x85y}$ ، المكتوب في النظام العشري ، قابلا للقسمة على 3 وعلى 11 .

التمرين (38)

1/ x عدد طبيعي ، برهن أن $3x \equiv 0\,[7]$ تكافئ $x \equiv 0\,[7]$

2/ ليكن N و N' عددين طبيعيين مكتوبين في النظام العشري بـ: $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$ ، $N'=\overline{a_n a_{n-1}...a_1}$

– برهن أن N يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان $N'-2a_0$ يقبل القسمة على 7 .

3/ استعمل هذه الطريقة عدّة مرات لتبرير بدون حاسبة إن كان العددان 105154 و 263572 يقبلان القسمة على 7 .

التمرين (39)

N عدد طبيعي يكتب في النظام العشري على الشكل $\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}$.

1/ بين أن العدد N يكون قابلا للقسمة على 11 إذا وفقط إذا كان $a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^n a_n$ مضاعفا لِـ 11 .

2/ هل الأعداد المقترحة أدناه تقبل القسمة على 11 ؟

أ- 72792973 ب- 43141408431 ج- 531745586910

التمرين (40)

a عدد طبيعي حيث $a \succ 1$.

1/ أنشر الجداء التالي : $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

2/ استنتج أنه في كل نظام التعداد يكون العدد 10101 يقبل القسمة على 111 ، ثم عيّن حاصل هذه القسمة (نمثل $a-1$ بالرقم)

التمرين (41)

1/ a عدد طبيعي حيث $a \succ 1$. في النظام التعداد ذي الأساس a ، بين أن العدد 1001 يقبل القسمة على 11

2/ نمثل $a-1$ بالرقم ، عين حاصل قسمة 1001 على 11 .

3/ تحقق من ذلك في النظام ذي الأساس 10 ثم في النظام ذي الأساس 12 .

التمرين (42)

n عدد طبيعي حيث $n \succ 1$. نضع $a = n^2+1$

1/ أكتب في النظام ذي الأساس a الأعداد التالية : n^2+2 ؛ n^2+2n ؛ $(n^2+2)^2$ و n^4 .

– تحقق من ذلك من أجل الأساس $a = 5$.

2/ أكتب ، في النظام ذي الأساس a الأعداد التالية : $u = n(n^2+2)$ ؛ $v = n^2(n^2+2)$ ؛ $x = u^2$ و $y = v^2$.

التمرين (43)

بكالوريا 2012 تقني رياضي

1/ ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي قسمة 9^n على 11 .

2/ ما هو باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 11 .

3/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2011^{2012} + 4\times 2011^{10n} + 4\times 9^{15n+1}$ يقبل القسمة على 11

4/ عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $(2011^{2012}+2n+2)$ مضاعفا للعدد 11 .

TouamiMaths

بكالوريا 2009 رياضيات

التمرين (44)

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي .

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل : $A=\overline{5566}$

1/ أ- أنشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن : $A=(5x^2+6)(2+2y)$

ب- احسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12 ، ثم أكتب تبعاً لذلك العدد A في نظام التعداد العشري .

2/ أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584 .

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a \succ b$ التي تحقق : $\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$

بكالوريا 2012 تقني رياضي

التمرين (45)

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح ($x \in \mathbb{Z}$) .

1/ بين أن العدد 153 حل للجملة (S).

2/ إذا كان x_0 حلا لـ (S)، بين أن : (x حل لـ (S)) يكافئ $\left(\begin{cases} x-x_0 \equiv 0[15] \\ x-x_0 \equiv 0[7] \end{cases} \right)$

3/ حل الجملة (S).

4/ يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15كتابا بقي لديه 3 كتب ، و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7كتابا بقي لديه 6 كتب .

إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصورة بين 500 و 600 كتابا ، ما عدد هذه الكتب؟

بكالوريا 2008 تقني رياضي

التمرين (46)

n عدد طبيعي أكبر من 5 .

1/ ليكن a و b عددان طبيعيان حيث : $a=n-2$ و $b=2n+3$

أ- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفاً للعدد 7 .

ج- عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$.

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p=2n^2-7n-15$ و $p=n^2-7n+10$

أ- بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب- عين تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p;q)$

TouamiMaths

بكالوريا 2011 تقني رياضي

التمرين (47)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1/ تحقق أن : $4 \equiv -3[7]$ ثم بين أن $A_3 \equiv 6[7]$.

2/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n وَ 3^n على 7 .

3/ بين أنه إذا كان n فرديا فإن $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 وَ استنتج باقي القسمة للعدد A_{2011} على 7 .

4/ ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

بكالوريا 2010 تقني رياضي

التمرين (48)

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$.

1/ عين α حتي يكون n قابلا للقسمة على 3 .

2/ عين α حتي يكون n قابلا للقسمة على 5 .

– استنتج قيمة α التي تجعل n قابلا للقسمة على 15 .

3/ نأخذ $\alpha = 4$ ، اكتب العدد n في النظام العشري .

التمرين (49)

1/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$.

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(n;\beta)$.

ب- استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$.

2/ نعتبر العددين a و b حيث : $a = 3n^3 + 5n^2 + 2n$ وَ $b = 3n^2 + 8n + 4$

أ- برهن أن العدد $(3n+2)$ هو قاسم مشترك للعددين a وَ b .

ب- استنتج حسب قيم n أن $PGCD(a;b)$ هو $(3n+2)$ أو $2(3n+2)$.

ج- عين α و β علما أن : $PGCD(a;b) = 41$.

التمرين (50)

1/ أ- أنشر العبارة $(n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3 - 11n + 48$ قابلا للقسمة على $n+3$.

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

2/ بيّن أنه ، من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c ، تكون المساواة التالية صحيحة :
$PGCD(a;b) = PGCD(bc - a;b)$.

3/ بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، تكون المساواة التالية صحيحة :
$PGCD(3n^3 - 11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$

4/ أ- عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48 .

ب- استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ عدداً طبيعياً .

بكالوريا 2008 رياضيات

التمرين (51)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x وَ y حيث : $3x - 21y = 78$

1/أ- بين أن (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$

استنتج حلول المعادلة (E) .

2/أ- أدرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ التي حلول المعادلة (E) و تحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

بكالوريا 2013 رياضيات

التمرين (52)

1/ n عدد طبيعي ، نعتبر العددين الصحيحين α وَ β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ وَ $\beta = n + 3$

أ- بين أن : $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10)$.

ب- ما هي القيم الممكنة للعدد : $PGCD(\alpha;\beta)$.

ج- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون : $PGCD(\alpha;\beta) = 5$.

2/ أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، التي تحقق الجملة التالية : $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$

التمرين (53)

1/ x عدد طبيعي ، برهن أنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$ ، $(x-1)(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}) = x^k - 1$

2/ ليكن d و n عددان طبيعيان غير معدومين حيث d يقسم n .

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، العدد $a^d - 1$ يقسم العدد $a^n - 1$.

ب- استنتج أن العدد $2^{2010} - 1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 .

3/ أ- عين $PGCD(63;60)$.

ب- بين أن: $(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)a^3 = a^3 - 1$.

ج- برهن أن: $PGCD(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = a^3 - 1$.

د- استنتج القيمة لِ : $PGCD(2^{63} - 1; 2^{60} - 1)$.

التمرين (54)

بكالوريا 2013 رياضيات

1/ أ- عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n+27 \equiv 0[n+1]$

ب- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b-a)(a+b)=24$

ج- استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2/ α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذات الأساس خمسة على الشكل $\alpha=\overline{10141}$ و $\beta=\overline{3403}$

أ- اكتب العددين α و β في النظام العشري .

ب- عين الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$.

3/ أ- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478 .

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2013x-1434y=27$.

التمرين (55)

بكالوريا 2010 رياضيات

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13 .

2/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13 .

3/ عين، حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 ، و استنتج باقي قسمة 2005^{2010} على 13.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي p ، $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$.

أ- من أجل $p=3n$ ، عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 .

ب- برهن أنه إذا كان $p=3n+1$ ، فإن A_p يقبل القسمة على 13 .

ج- عين باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p=3n+2$.

5/ يكتب العددان الطبيعيان a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي:

$a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ- تحقق أن العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري .

ب- استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13 .

التمرين (56)

نعتبر المتتاليتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بـ: $x_0=1$ ؛ $y_0=8$ ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$x_{n+1}=\frac{7}{3}x_n+\frac{1}{3}y_n+1$ و $y_{n+1}=\frac{20}{3}x_n+\frac{8}{3}y_n+5$.

وفي المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر المستقيم (Δ) ذي المعادلة $5x-y+3=0$.

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، النقطة $M_n(x_n;y_n)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $x_{n+1}=4x_n+2$.

2/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $x_n\in\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أن $y_n\in\mathbb{N}$.

3/ نضع $PGCD(x_n ; y_n) = d$ ، ما هي القيم الممكنة للعدد الطبيعي d .

4/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $x_n = \frac{5}{3}\times 4^n - \frac{2}{3}$.

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $5\times 4^n - 2$ يقبل القسمة على 6 .

التمرين (57)

ليكن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$ ، نريد دراسة وجود ثلاثة أعداد طبيعية x ، y و z حيث :
$x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$.

جزء I : دراسة حالتين خاصة .

1/ في هذا السؤال نفترض أن $n = 2$ ، برهن أن 1 ، 3 و 5 تحقق الشرط المعطى .

2/ في هذا السؤال نفترض أن $n = 3$.

أ- ليكن m عدد طبيعي . أنقل وأتمم الجدول أدناه بالباقي r للقسمة الأقليدية للعدد m على 8 والباقي R للقسمة الأقليدية للعدد m^2 على 8 .

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

ب- هل يمكن إيجاد ثلاثة أعداد طبيعية x ، y و z حيث : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$ ؟

الجزء II : دراسة الحالة العامة مع $n \geq 3$.

نفترض أنه توجد ثلاثة أعداد طبيعية x ، y و z حيث : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv (2^n - 1)[2^n]$.

1/ برّر أن الأعداد x ، y و z كلها فردية أو من بينها عددين زوجيين فقط .

2/ نفترض أن x و y زوجيان و z فردي .

أ- برهن أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1[4]$

ب- استنتج أن هناك تناقض .

3/ نفترض أن x ، y و z كلها فردية .

أ- برّر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k يكون $k^2 + k \equiv 0[2]$.

ب- استنتج أن $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3[8]$ ، استخلص .

التمرين (58)

1/ ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للأعداد 2^n ، 3^n ، 4^n على 7 .

2/ عين باقي قسمة العدد : $2^{2013} - 3^{2014} + 4^{2015}$ على 7 .

3/ استنتج أنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}$ يكون : $5\times 2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 0[7]$

4/ حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $10^{3n} + 4^{2n} - 22^n \equiv 0[7]$

5/ عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2^n + 3^n + 4^n \equiv 2[7]$ و $0 < n \le 25$.

6/ برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $(4n+3)\times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 2(2n+1)\times 3^{2n}[7]$

7/ عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث : $(4n+3)\times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 0[7]$ و n من مضاعفات 8 .

نعتبر في هذه الحالة : $S_n = 1+3+3^2+....+3^n$ و $P_n = 1\times 3\times 3^2\times ....\times 3^n$

8/ حدد قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $2S_n$ قابلا القسمة على 7 .

9/ حدد قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون باقي قسمة العدد P_n على 7 هو 3 .

10/ ليكن : $L(n) = C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + ... + C_n^n$ ، أثبت أن : $L(n) = 2^n - n - 1$

– نضع العدد الطبيعي $M(n)$ بحيث : $M(n) = 1\times 2^0 + 2\times 2^1 + 3\times 2^2 + ... + n\times 2^{n-1}$

11/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $M(n) = 1 + (n-1)2^n$

12/ أوجد الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $(n-1)$ مضاعف للعدد 3 و $M(n) - 1$ قابلا القسمة على 7 .

13/ عين قيم n الطبيعية حتى يكون : $M(n) + L(n) + 3n$ مضاعف لـ 7 .

– يحتوي كيس على 10 قريصات منرقمة من 0 إلى 9 ، نسحب في ان واحد قريصتين و نعتبر أن كل السحابات الممكنة متساوية الاحتمال .

14/ ما هو عدد طرق السحب بالكيفية المذكورة .

15/ ما هو الاحتمال لكي يكون مجموع الرقمين المسحوبين من بواقي قسمة 3^n على 7 .

ملاحظة هامة : تجدون حلول جميع التمارين في الكتاب ً الأمل في الرياضيات
و في الجزء الثاني

سلسلة الامل في الرياضيات رقم (12)

الشعب : علوم تجريبية ، تقني رياضي ، رياضيات

إعداد الاستاذ : توامي عمر المستوى : ثالث ثانوي

الأعداد الأولية

التمرين (01)

n عدد طبيعي و $a = n^2 + 3n + 2$.

– هل توجد قيم للعدد n التي يكون من أجلها العدد a أوليا ؟

التمرين (02)

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n^2 + 8n + 15$ ليس أولياً .

التمرين (03)

1/ تحقق من أن العدد 173 أولي .

2/ عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = 173$.

3/ p عدد طبيعي أوّلي فردي . عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية حيث $x^2 - y^2 = p$.

التمرين (04)

1/ أنشر الجداء $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

2/ ليكن a عدد صحيح . هل يمكن للعدد $a^4 + a^2 + 1$ أن يكون أوّليا ؟

التمرين (05)

نعتبر العددين : $a = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7^2 \times 11$ ؛ $b = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$

– برر أن العدد a يقبل القسمة على b ، ما هو حاصل قسمة العدد a على b ؟

التمرين (06)

a عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

– برهن أنه إذا كان العدد الأولي p يقسم a^2 فإن p يقسم a .

TouamiMaths

التمرين (07)

أعداد مرسان هي الأعداد الأوّلية التي تكتب على الشكل : $N = 2^p - 1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

1/ a و n عددان طبيعيان غير معدومين ويختلفان عن 1 ، بسط المجموع $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$.

2/ برهن أنه إذا كان $a^n - 1$ أوليا فإن $a = 2$.

3/ برهن أنه إذا كان n غير أوّلي فإن $2^n - 1$ يكون غير أوّلي .

4/ برهن أنه إذا كان p أوليا فإن $2^p - 1$ يكون أوليا من أجل بعض القيم للعدد p ويكون غير أوّلي من أجل القيم الأخرى .

التمرين (08)

a و b عددان طبيعيان . نضع $N = a^4 + 4b^4$

1/ برهن أن : $N = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$.

2/ برهن أنه من أجل $b \geq 2$ ، N لا يمكن أن يكون أوّليا .

3/ من أجل $b = 1$ ، هل يمكن أن يكون N أوّليا ؟

4/ برهن أن العدد $(1207^4 + 4^{1205})$ ليس أوليا .

التمرين (09)

a و b عددان طبيعيان . نضع $n = 2^a 3^b$.

1/ عين عدد القواسم الموجبة للعدد n .

2/ عين n علما أن عدد قواسم العدد $2n$ هو ضعف عدد قواسم العدد n .

التمرين (10)

نريد تعيين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $2^8 + 2^{11} + 2^n$ مربعا تاما ، أي يوجد عدد طبيعي k حيث $2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$.

1/ تحقق من أن : $2^n = (k + 48)(k - 48)$.

2/ استنتج أنه يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان : $a + b = n$ ، $2^a = k + 48$ ، $2^b = k - 48$ و $2^b(2^{a-b} - 1) = 96$.

3/ باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد 96 ، عين قيمة العدد n .

التمرين (11)

n عدد طبيعي غير معدوم .

- أحسب في كل حالة : $PPCM(n; 2n + 1)$ ، $PPCM(2n + 2; 4n + 2)$.

TouamiMaths

أتمنى لكم التوفيق الأستاذ توامي عمر في خدمتكم
touami.omar@gmail.com

التمرين (12)

n عدد طبيعي غير معدوم .

– عين $PPCM(a;b)$ حيث : $a=(3^{2n}-1)(7^{2n}-1)$ و $b=(3^n+1)(7^n+1)$.

التمرين (13)

n عدد طبيعي أكبر من 3 . نضع : $a=(6n^2-24)(n^2-9)$ ، $b=(3n^2+3n-18)(n^2-n-6)$.

1/ برهن أن : $PPCM(a,b)=(n^2-4)(n^2-9)PPCM(6,3)$.

2/ عين $PPCM(a,b)$.

التمرين (14)

– أوجد جميع الأعداد الطبيعية n المؤلفة من ثلاث أرقام و تقبل القسمة على 14 وَ 34 .

التمرين (15)

1/ أحسب $PPCM(52,36,28)$.

2/ أوجد أصغر عدد طبيعي n الذي إذا قسم على 28 ثم على 36 ثم على 52 تكون بواقي هذه القسمة هي : 25 ، 33 ، 49 على الترتيب .

التمرين (16)

– عين في كل حالة الأزواج $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية و التي تحقق :

1/ $\begin{cases} a+b=32 \\ PPCM(a;b)=110 \end{cases}$

2/ $\begin{cases} a-b<0 \\ PPCM(a;b)-PGCD(a;b)=77 \end{cases}$

3/ $\begin{cases} a+b=105 \\ PPCM(a;b)=12PGCD(a;b) \end{cases}$

4/ $\begin{cases} 2<PGCD(a;b)\leq 25 \\ PPCM(a;b)-20PGCD(a;b)=50 \end{cases}$

التمرين (17)

1/ أوجد أعداد طبيعية مربع كل منها يقسم العدد 1980 .

2/ عين الأعداد الطبيعية a ، b التي تحقق : $[PPCM(a;b)]^2-5[PGCD(a;b)]^2=1980$

التمرين (18)

n و m عددان طبيعيان غير معدومين . نضع : $a=2n+3m$ ، $b=3n+5m$.

1/ تحقق أن : $n=5a-3b$ ، $m=2b-3a$.

2/ برهن أن $PGCD(a,b)=PGCD(n,m)$.

3/ استنتج أن العددين $2n+3$ ، $3n+5$ أوّليان فيما بينهما . ما هو مضاعفهما المشترك الأصغر؟

التمرين (19)

- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث يكون مضاعفهما المشترك الأصغر وقاسمهما المشترك الأكبر حلين للمعادلة $x^2-91x+588=0$.

التمرين (20)

نعتبر كثيري الحدود المعرفين على $\mathbb{R}$ بـ :

$p(x)=10x^3+60x^2+110x+60$ ؛ $q(x)=6x^2+18x+12$.

1/أ- أحسب $p(-1)$ و $p(-2)$.

ب- عيّن العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ يكون $p(x)=(x+1)(x+2)(ax+b)$.

ج- حلل كثير الحدود $q(x)$.

2/ نفرض n عدد طبيعي .

أ- اشرح لماذا $PGCD(5n+15;3)$ هو 1 أو 3 ؟

ب- برهن أن $PGCD(5n+15;3)=3$ إذا وفقط إذا كان n مضاعفا للعدد 3 .

ج- عيّن حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين $p(n)$ و $q(n)$.

التمرين (21)

1/ حلل العدد 319 إلى جداء عوامل أولية .

2/ a و b عددان طبيعيان .

أ- تحقق من أن : $\begin{cases} a=2(3a+5b)-5(a+2b) \\ b=3(a+2b)-(3a+5b) \end{cases}$.

ب- برهن أنه إذا كان a و b أوّليين فيما بينهما فإن $3a+5b$ و $a+2b$ أوليان فيما بينهما .

3/ عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=1276 \\ ab=2PPCM(a,b) \end{cases}$.

TouamiMaths

التمرين (22)

n عدد طبيعي غير معدوم ، $a = 6n^2 + 18n + 12$ و $b = 4n^3 + 12n^2 + 8n$.

1/ حلل a و b .

2/ أ- برهن أن : $PGCD(a,b) = 2(n+1)(n+2) \times PGCD(3,2n)$.

ب- عين ، حسب قيم العدد n ، $PGCD(a,b)$.

ج- استنتج حسب قيم n ، $PPCM(a,b)$.

التمرين (23)

ليكن x و y عددان طبيعيان حيث : $x = 3n - 1$ و $y = 7n - 6$.

1/ أوجد عددين طبيعيين a و b أوليين فيما بينهما بحيث يكون : $ax - by$ مستقلاً عن n .

2/ أثبت أنه إذا لم يكن x و y أوليان فيما بينهما فإن : $PGCD(x;y) = 11$.

3/ أوجد مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $PGCD(x;y) = 11$.

التمرين (24)

ليكن a و b عددان طبيعيان حيث : $a = 2n^2 + 5n + 8$ و $b = n + 1$.

1/ برهن أن العددين $n + 1$ و $2n + 3$ هما أوليان فيما بينهما .

2/ ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n قيم القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b .

3/ عين قيم العدد الطبيعي n لكي b يقسم a .

4/ عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $PGCD(3n+8;n+1) = 5$ و $PPCM(3n+8;n+1) = 70$

التمرين (25)

لتكن a ، b ، α و أعداد طبيعية حيث : $a = 9\alpha + 4$ و $b = 2\alpha +$.

1/ برهن أن : $PGCD(a;b) = PGCD(\alpha;\ )$.

2/ برهن أن العددين $9\alpha + 4$ و $2\alpha + 1$ أوليان فيما بينهما .

- استنتج أن : $PGCD(9\alpha + 4;18\alpha^2 + 19\alpha + 5) = 1$ ،

3/ ناقش حسب قيم α القاسم المشترك الأكبر للعددين $9\alpha + 4$ و $2\alpha - 1$.

التمرين (26)

1/ برهن أنه إذا كان a و b عددان أوليان فيما بينهما فإن $a^2 + b^2$ و ab أوليان فيما بينهما .

2/ عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث : $x^2 + y^2 = 325$ و $PPCM(x;y) = 30$.

التمرين (27)

1/ أثبت أنه إذا كان x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما فإن $x+y$ و xy أوليان فيما بينهما .

2/ إذا كان β و عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $15\beta^2-229\beta=30$ ، فما هي قيمة β و .

3/ x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

– عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق : $15(x^2+y^2)=229(x+y)$.

التمرين (28)

n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع : $A=n^4+n^2+1$

1/ بين أن A يكتب على جداء عاملين من الدرجة الثانية و بمعاملات صحيحة .

2/ أثبت أن هذين المعاملين أوليان فيما بينهما .

3/ ما هي قيم n بحيث يكون A أولياً .

التمرين (29)

1/ أثبت أن العددين 1681 و 108 أوليان فيما بينهما .

2/ أوجد عددين صحيحين x و y بحيث يكون : $1681x+108y=1$.

3/ حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $1681x+108y=5$.

التمرين (30)

1/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $18(x+1)=27(1-y)$

2/ استنتج مجموعة الأزواج $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة السابقة و تحقق : $x \times y \leq -15$.

التمرين (31)

نفرض أن $a \in \mathbb{N}^* -\{1\}$.

1/ أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين a^2 و $a-1$.

2/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $a^2x+(a-1)y=1$.

التمرين (32)

1/ β و عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما ، جد β و حيث : $(\alpha^3-1)=28\beta^2$.

2/ a ، b ، c ، d و e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها r ، حيث a و r أوليان فيما بينهما و $28a^3=e-b$.

أحسب الأساس r ثم الأعداد a ، b ، c ، d و e .

التمرين (33)

1/ عيّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994 .

2/ x و y عددان صحيحان ولتكن المعادلة $1996x - 1497y = 2994$ .... (1)

أ- أثبت أن x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ثم عين حلول المعادلة (1) .

ب- عين الحلول (x,y) بحيث يكون : $xy = 1950$.

التمرين (34)

1/ جد القاسم المشترك الأكبر للعددين 225 و 180 .

2/ حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $225x - 180y = 90$ ... (1)

3/ عين مجموعة حلول المعادلة (1) التي تحقق : $|x - y + 1| \leq 2$.

4/ a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ ، $\overline{252}$ في النظام ذي الأساس α ، و يكتبان $\overline{44}$ ، $\overline{206}$ في النظام ذي الأساس . عين α و ثم a و b .

التمرين (35)

$\mathbb{Z}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

لتكن في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ، المعادلة ذات المجهول (x,y): $43x - 13y = k$ ....(E) مع $k \in \mathbb{Z}$.

1/ تحقق من أن $(-3k, -10k)$ حل للمعادلة (E) .

- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) .

2/ N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\ \alpha\ \alpha}$ في نظام تعداد أساسه 6 ويكتب $\overline{0\beta\beta\beta}$ في نظام تعداد أساسه 5 .

أ- بيّن أنّ α ، و β تحقق $43\alpha - 13\ \ = \beta$.

ب- عيّن α ، و β ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين (36)

1/ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد : 765 ، 459 ، 1683 .

2/ أ- حل المعادلة : $765x + 459y = 1683$ حيث x ، y عددان صحيحان .

ب- عين مجموعة الحلول $(x;y)$ التي تحقق : $|x| + |y| \prec 10$.

التمرين (37)

بكالوريا 2008 تقني رياضي

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : $4x - 9y = 319$ .....(I) .

1/ تأكد أن الثنائية $(82,1)$ حل للمعادلة (I) .

- حل المعادلة (I) .

2/ عين الثنائيات (a,b) الصحيحة ، حلول المعادلة : $4a^2 - 9b^2 = 319$ .....(II) .

3/ استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين .

التمرين (38)

1/– حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $9x$ H $62y$ Z 62 ......(1)

– عين الثنائية Êx,yF حلول المعادلة (1) التي تحقق : $x.y$ Z 0

2/ ليكن n عدد طبيعي يكتب $\overline{3 \;\sim 2¢}$ في النظام ذي الأساس 5 وَ يكتب $\overline{56\sim}$ في النظام ذي الأساس 7 .

– من أجل «0,1^{1}Č ¢ عين العددين الطبيعيين ~ وَ .

– أكتب عندئذ العدد n في النظام العشري .

التمرين (39)

1/ جد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 2490 ، 32785 ، 2905 .

2/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $7x$ H $6y$ Z 79 (لاحظ $79 = 72 + 7$) .

3/ اشترى نادي كرة يد ملابس رياضية للاعبيه . إذا علمنا أنّ ثمن بذلة اللاعب هو 2905 دج وثمن بذلة اللاعبة هو 2490 دج وعلمنا أنّ النادي دفع في المجموع 32785 دج .

– ما هو عدد اللاعبين وعدد اللاعبات؟

التمرين (40)

بكالوريا 2013 تقني رياضي

x وَ y عددان صحيحان وَ ÊEF المعادلة ذات المجهول Ê$x;y$F التالية : $11x$ H $7y$ Z 1 .

1/أ– عين Ê$x_0;y_0$F ، حل المعادلة ÊEF الذي يحقق : x_0 H y_0 Z J1 .

ب– استنتج حلول المعادلة ÊEF .

2/ a وَ b عددان طبيعيان وَ S العدد الذي يحقق : S Z $11a$ H 1 ، S Z $7b$ H 2

أ– بين أن Ê$a;$JbF حل للمعادلة ÊEF .

ب– ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77 ؟

3/ n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2 .

– عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون n Y 2013 .

التمرين (41)

بكالوريا 2011 رياضيات

1/ نعتبر المعادلة : ÊEF... $13x$ J $7y$ Z J1 حيث : x وَ y عددان صحيحان .

– حل المعادلة ÊEF .

2/ عين الأعداد الصحيحة النسبية a بحيث : a ø J1X7Ž ، a ø 0X13Ž .

3/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13 .

4/ ليكن العدد الطبيعي b المكتوب ، في نظام التعداد ذي الأساس 9 ، كما يلي : $\overline{\sim 00 \quad 086}$

حيث : ~ وَ عددان طبيعيان ، 0 ÷ ~ .

– عين ~ وَ حتى يكون b قابلا للقسمة على 91 .

التمرين (42)

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد α_n حيث : $\alpha_n = 2^{n+1}+1$

1/ تحقق أن : $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n - 1$ و استنتج أن العددين α_n ، α_{n+1} أوليان فيما بينهما .

2/ نعتبر العدد β_n حيث : $\beta_n - 2\alpha_n = 3$

- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n ، β_n ؟
- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 3 .

3/ عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $\beta_n \equiv 0[3]$.

- استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل α_n وَ β_n أولين فيما بينهما .

التمرين (43)

a و b عددان طبيعيان وَ p عدد طبيعي أولي حيث : $PGCD(a+b\,;ab) = p^2$

1/ بين أن p^2 يقسم a^2 ، ثم استنتج أن p يقسم a .

2/ بين أن p يقسم b .

3/ أثبت أن $PGCD(a;b) = p^2$ أو $PGCD(a;b) = p$.

4/ نعتبر في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $(E):\begin{cases} PGCD(a+b\,;ab) = 49 \\ PPCM(a;b) = 231 \end{cases}$

أ- بين أن : $PGCD(a;b) = 7$

ب- عين كل الثنائيات $(a;b)$ في $\mathbb{N}^2$ و التي تحقق الجملة (E) .

التمرين (44)

ليكن العدد ين الصحيحين : $a = n-1$ وَ $b = n^2+2n-2$

1/ عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $(n-1)$ يقسم $(n+3)$.

2/ أ- برهن أن العددين a وَ b أوليان فيما بينهما .

ب- استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين : n^3-n^2+n-1 وَ $n^4+2n^3-n^2+2n-2$.

3/ عين قيم العدد الصحيح n من أجلها يكون : $(n-1)(n^2+1)$ قاسم للعدد $(n+3)(n^2+2n-2)$.

التمرين (45)

1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

2/ ما هو باقي قسمة العدد 2012^{2014} على 7 .

3/ لتكن (u_n) متتالية عددية معلرفة بـ : $u_0 = 2$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 10u_n + 9$.

أ- احسب الحدود u_1 ، u_2 وَ u_3 .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون : $u_n = 3\times 10^n - 1$.

4/ عين كتابة u_n في النظام العشري ، ثم أعط قيمة u_9 .

5/ بين أنه إذا كان n غير معدوم فإن u_n أولي مع كل من 2 ، 3 وَ 5 .

6/ عين قيم n ، التي من أجلها يكون u_n قابلاً للقسمة على 7 .

التمرين (46)

بكالوريا 2012 رياضيات

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية : $2011x - 1432y = 31 \;....(1)$

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي .

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1) .

2/ أ- عين حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7 .

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0\,[7]$.

3/ ليكن N عدد طبيعي يكتب $\overline{2¥~}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : ~ ، ، ¥ بهذا الترتيب تشكل حدوداً متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما وَ $(\;;¥)$ حل للمعادلة (1) .

- عين ~ ، و ¥ ، ثم اكتب N في النظام العشري .

التمرين (47)

1/أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب- عين باقي قسمة العدد $2012^{12n+1} + 2012^{6n+4}$ على 7 .

ج- استنتج قيم العدد n بحيث : $2012^{6n+4} + 2012^{12n+1} + 2011n - 1 \equiv 0\,[7]$

2/ نعتبر المتتالية الهندسية (u_n) التي حدها الأول العدد الطبيعي u_0 و أساسها العدد الطبيعي q حيث :

$9u_0^2 = 12u_1 - u_3$ وَ $PGCD(u_0;q) = 1$.

أ- احسب : u_0 وَ q .

ب- احسب بدلالة n المجموع التالي : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ج- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $2S_n$ يقبل القسمة على 7 .

التمرين (48)

1/ أ- حلل العدد 357 إلى جداء عوامل أولية ثم بين أن جداء قواسم 357 هو $(357)^4$.

ب- عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $n(n^2+2) = 357$.

ج- عين الأعداد الطبيعية a ، b وَ c المأخوذة بهذا الترتيب حدوداً لمتتالية حسابية أساسها 1 و تحقق :

$a^3 + b^3 + c^3 = 1071$.

2/ أ- بين أن المجموع : $6 + 7 + 8 + ... + 2004 = 1999 \times 1005$.

ب- أوجد الأعداد الصحيحة x التي تحقق : $(6+7+8+....+2004)x \equiv 1999\,[17]$.

3/ أ- حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $2x - 17y = 1$

ب- عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة السابقة و تحقق : $|x + y - 10| \le 38$.

التمرين (49)

1/ نعتبر المعادلة : $7x+65y=2009 \quad ...(1)$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7 .

ب- حل المعادلة (1) .

2/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 9 .

3/ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9 .

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$.

أ- تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9 .

ب- حل المعادلة $(7u_1)x+(u_2)y=126567 \quad ...(2)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان

ج- عين الثنائية $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عددان طبيعيان مع $y_0 \le 25$.

التمرين (50)

1/ نعتبر المعادلة (E) : $109x-226y=1$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ- عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟

ب- برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الثنائيات من الشكل $(141+226k;68+109k)$ ، حيث k عدد صحيح .

ج- استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226 ؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d=1+226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e) .

2/ برهن أن 227 عدد أوّلي .

3/ نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a \le 226$. نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها .

f ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{141} على 227 .

أ- تحقق من أنّ: $g\circ f(0)=0$.

ب- برهن أنه من أجل كل $a \in A-\{0\}$ ، $a^{226}\equiv 1[227]$.

ج- استنتج من 1/ ب أنه من أجل كل $a \in A-\{0\}$ ، $g\circ f(a)=a$. ما القول عن $g\circ f(a)=a$ ؟

التمرين (51)

n عدد طبيعي، نعتبر الأعداد: $a_n=4\times10^n-1$ ، $b_n=2\times10^n-1$ ، $c_n=2\times10^n+10$.

1/ أ- احسب كل من: b_3 ، c_3 .

ب- بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 و أن b_3 عدد أولي .

ج- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $a_{2n}=b_n\times(c_n-9)$.

- استنتج تحليلاً إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 .

د- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $PGCD(b_n;c_n)=PGCD(b_n;11)$.

- استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما .

2/ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $b_3x+c_3y=1 \quad ....(E)$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب- تحقق أن $(-731;727)$ حلا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

التمرين (52)

لتكن المعادلة (1) ذات المجهول العدد الناطق x : $78x^3+ux^2+vx-14=0$ مع u ، v عددين صحيحين

1/ نفترض أن $\frac{14}{39}$ هو حل للمعادلة (1).

أ – بين أن العددين u وَ v يحققان العلاقة : $14u+39v=1129$.

ب– استعمل خوارزمية أقليدس لإيجاد ثنائية (x,y) من الأعداد الصحيحة تحقق : $14u+39v=1$

– تحقق من أن $(-25,9)$ هي حل لهذه المعادلة .

ج– استنتج ثنائية (u_0,v_0) حل خاص للمعادلة $14u+39v=1129$. أعط الحل العام لهذه المعادلة .

د – من بين الحلول (u,v) للمعادلة السابقة ، عين الحل الذي يكون فيه u أصغر عدد طبيعي ممكن .

2/ أ– حلل إلى جداء عوامل أوّلية كل من العددين 78 و 14 . استنتج مجموعة القواسم الموجبة للعدد 78 ثم للعدد 14 .

ب – ليكن $\frac{P}{Q}$ حل ناطق للمعادلة (1) .

– برهن أنه إذا كان P و Q أوليين فيما بينهما فإن P يقسم 14 و Q يقسم 78 .

ج – استنتج عدد الأعداد الناطقة غير الصحيحة التي تكون حلولا للمعادلة (1) وأكتب من بين هذه الحلول ، مجموعة الحلول التي تكون موجبة .

التمرين (53)

ليكن A عدد طبيعي معرف كما يلي : $A=\underbrace{111.......11}_{2010\text{ مـــــرة }1}$

1/ بين أن العدد A يقبل القسمة على 11 .

2/ أ– تحقق أن العدد 2011 أولي وَ أن $9A=10^{2010}-1$.

ب– بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9A$ ثم استنتج أن $A\equiv 0[2011]$.

3/ بين أن العدد 22121 يقسم العدد A .

التمرين (54)

نعتر المتتاليتين (x_n) و (y_n) حدودهما أعداد طبيعية ، معرفتان بـ : $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ وَ $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$.

1/ برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2/ أ- أحسب $PGCD(x_8, x_9)$ ، ما القول عن العددين x_8 و x_9 ؟

ب- هل العددين x_n و x_{n+1} أوّليين فيما بينهما من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ؟

3/ أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2x_n - y_n = 5$.

ب - عبر عن y_n بدلالة n .

ج- أدرس حسب قيم p ، باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^p على 5 .

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $d_n = PGCD(x_n, y_n)$.

- برهن أن $d_n = 1$ أو $d_n = 5$ ؛ استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(x_n, y_n) = 1$.

ملاحظة هامة : تجدون حلول جميع التمارين في الكتابً الأمل في الرياضيات

و في الجزء الثاني

TouamiMaths

touami.omar@gmail.com