✌التحضير ☹ الجيد ☺ للباك ☹ 2017 ☺ الموضوع الرابع

التمرين الأول : ☹☺☹ (04 نقاط) مشاهدة الحل

لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n-1$

1) أحسب u_3,u_2,u_1.

2) نضع : $v_n=u_n-4n+10$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n ثمَ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) نضع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

بين أنَ : $S_n=22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)(2n-10)$

التمرين الثاني ☹☺☺: (04 نقاط) مشاهدة الحل

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $F(1;-2;0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $x+y-3z+4=0$.

إختيار من متعدد :

1) تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من النقطة F والعمودي على المستوي (P).

أ) $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-3\end{cases};(t\in\mathbb{R})$	ب) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=1-3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$
ج) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$	د) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$

2) إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) هي :

أ) $(-4;0;0)$	ب) $\left(\frac{6}{5};-\frac{9}{5};-\frac{3}{5}\right)$	ج) $\left(\frac{7}{9};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$	د) $\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3) المسافة من النقطة F إلى المستوي (P) هي :

أ) $\frac{\sqrt{11}}{3}$	ب) $\frac{3}{\sqrt{11}}$	ج) $\frac{9}{\sqrt{11}}$	د) $\frac{9}{11}$

4) المستوي (P) يقطع سطح الكرة ذات المركز F ونصف القطر 3 في :

أ) النقطة $E(1;-5;0)$	ب)الدائرة ذات المركز H ونصف القطر $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$
ج) الدائرة ذات المركز H ونصف القطر $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$	د) الدائرة ذات المركز F ونصف القطر $r=2$

التمرين الثالث ☺☹☹ : (05 نقاط) مشاهدة الحل

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب $z_A=2-3i$، $z_B=i$ و $z_C=6-i$

I. 1) أحسب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

2) استنتج طبيعة المثلث ABC.

II. نعتبر التطبيق f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z تختلف عن i النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

1) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=1-i$، عين لاحقة النقطة D' صورة النقطة D بالتطبيق f.

2) أ)بين أنه توجد نقطة وحيدة E سابقة النقطة E' ذات اللاحقة $z_{E'}=2i$ بالتطبيق f.

ب) بين أنَ النقطة E تنتمي إلى المستقيم (AB).

3) برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطة B فإنَ : $OM'=\frac{AM}{BM}$.

4) برهن أنه من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطتين A و B فإنَ :

$(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2}(2\pi)$

5) برهن أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

6) برهن أنه إذا كانت النقطة M' تنتمي إلى محور الأعداد التخيلية الصرفة ماعدا النقطة B فإن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

التمرين الرابع ☺☹☺): 07 نقاط) مشاهدة الحل

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=(ln x)^2-ln x+1$.

1) أحسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بين أنَ $g'(x)=\frac{-1+2ln x}{x}$ من أجل كل عدد حقيقي $x>0$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

4) استنتج إشارة $g(x)$ عندما يمسح x المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-\frac{(\ln x)^2+\ln x}{x}$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بين أنَ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ثمّ فسر النتيجة هندسيا .

2) أ) برهن أنَ $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $\sqrt{x}=t$) .

ب)استنتج $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

ج) بين أنَ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

د) أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) أ) بين أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\frac{x^2+g(x)}{x^2}$.

ب)استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

ب)بين أنَ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0.3<\alpha<0.35$.

ج)أرسم (T) ، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$.

5) أ) عين دالة أصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير .

ب)أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=e^{-1}$ و $x=e$.

✌ بالتوفيق ☺والنجاح ☺☹☺في الباك 2017 ❀ ❀

👍تصحيح ☺ الموضوع ☺ الرابع ☹ التجريبي

👍تصحيح التمرين الأول ☺☺☺: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا : $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n-1$

1) حساب الحدود u_3,u_2,u_1 :

لدينا :

$$u_1=\frac{1}{2}u_0+2(0)-1=\frac{1}{2}\times 1-1=-\frac{1}{2}$$
$$u_2=\frac{1}{2}u_1+2(1)-1=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2-1=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$
$$u_3=\frac{1}{2}u_2+2\times 2-1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+4-1=\frac{3}{8}+3=\frac{27}{8}$$

2) لدينا : $v_n=u_n-4n+10$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-4(n+1)+10=\frac{1}{2}u_n+2n-1-4n-4+10$

أي $v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2n+5=\frac{1}{2}(u_n-4n+10)=\frac{1}{2}v_n$

$v_0=u_0-4\times 0+10=1+10=11$

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ أي المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=11$

ب) التعبير عن v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_0\times q^n=11\left(\frac{1}{2}\right)^n$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) تعطى بالعبارة $v_n=11\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا $v_n=u_n-4n+10$ ومنه $u_n=v_n+4n-10=11\left(\frac{1}{2}\right)^n+4n-10$

عبارة الحد العام u_n تعطى بالعبارة $u_n=11\left(\frac{1}{2}\right)^n+4n-10$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[11\left(\frac{1}{2}\right)^n+4n-10\right]=+\infty$ لأنّ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}(4n-10)=+\infty\end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

د) لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

تبيان أن : $S_n = 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)(2n-10)$

لدينا : $u_n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$

نضع : $w_n = 4n-10$ حيث (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=4$ وحدها الأول $w_0 = -10$

أي أنّ المتتالية (u_n) هي مجموع متتاليتين: المتتالية الهندسية (v_n) والمتتالية الحسابية (w_n).

إذن $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 + w_0) + (v_1 + w_1) + ... + (v_n + w_n)$

أي $S_n = (v_0 + v_1 + ... + v_n) + (w_0 + w_1 + ... + w_n)$

ومنه $S_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{n+1}{2}(w_0 + w_n) = 11 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{n+1}{2}(-10+4n-10)$

$$S_n = 11 \times \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{2}(4n-20)$$

أي المجموع $S_n = 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)(2n-10)$

تصحيح التمرين الثاني ☺☺☺☺: الرجوع الى نص التمرين

لدينا : النقطة $F(1;-2;0)$ والمستوي (P) ذي المعادلة $x+y-3z+4=0$.

1) تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من النقطة F والعمودي على المستوي (P):

الإجابة الصحيحة هي (د)

(Δ) المستقيم العمودي على المستوي (P) يعني $\vec{u}$ شعاع التوجيه للمستقيم (Δ) وشعاع ناظمي للمستوي (P) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ مرتبطان خطيا و F تنتمي إلى (Δ).

لدينا : $\vec{u} = \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$

ولدينا : $\begin{cases}1 = 2+t\\ -2 = -1+t\\ 0 = -3-3t\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=-1\\ t=-1\\ t=-1\end{cases}$ أي t وحيد ومنه F تنتمي إلى (Δ).

وبالتالي الجملة $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \quad ;(t\in\mathbb{R}) \\ z=-3-3t \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

2) إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) هي : $\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

الإجابة الصحيحة هي (د)

إحداثيات H هي حل للجملة $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t \\ z=-3-3t \\ x+y-3z+4=0 \end{cases}$ أي $2+t+-1+t-3(-3-3t)+4=0$

ومنه $2+t+-1+t+9t+9+4=0$ ومنه $11t+14=0$

أي $t=-\frac{14}{11}$ بالتعويض في جملة التمثيل الوسيطي نجد : $\begin{cases} x=2-\frac{14}{11}=\frac{8}{11} \\ y=-1-\frac{14}{11}=-\frac{25}{11} \\ z=-3-3\left(-\frac{14}{11}\right)=\frac{9}{11} \end{cases}$

إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P) هي : $\left(\frac{8}{11};-\frac{25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3) المسافة من النقطة F إلى المستوي (P) هي : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **الإجابة الصحيحة هي (ب)**

لدينا : $d(F;(P))=\frac{|1-2-3(0)+4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$

المسافة من النقطة F إلى المستوي (P) هي : $\frac{3}{\sqrt{11}}$

4) المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) ذات المركز F ونصف القطر $R=3$ في :

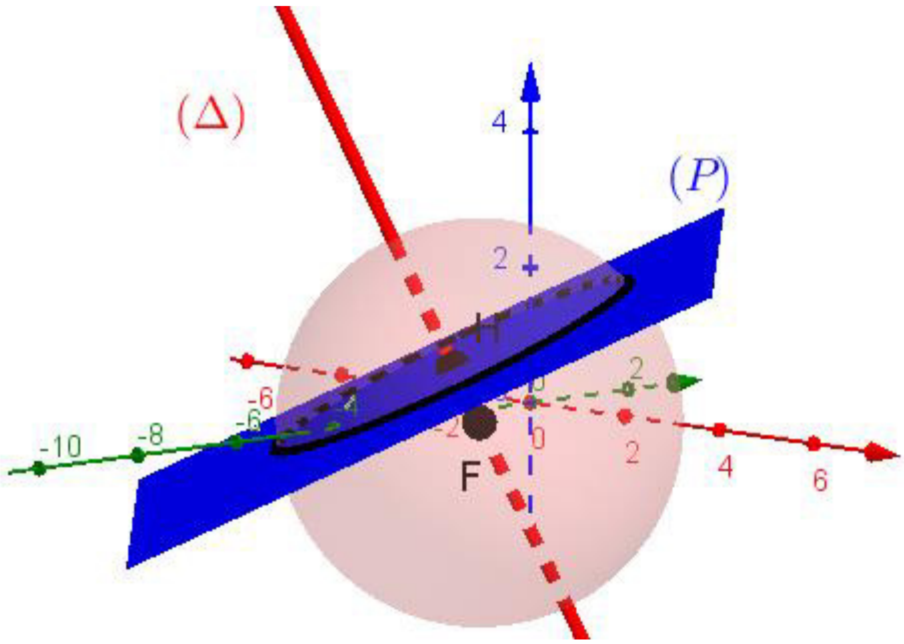
الإجابة الصحيحة (ب)

لدينا : $d(F;(P))=\frac{3}{\sqrt{11}}$ و $R=3$ أي $d(F;(P))<R$ ومنه (P) يقطع (S) في دائرة مركزها النقطة

H المسقط العمودي للنقطة F **على المستوي** (P) ونصف قطرها

$r=\sqrt{R^2-d^2(F;(P))}=\sqrt{9-\frac{9}{11}}=\sqrt{9\times\frac{10}{11}}$ ومنه $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) ذات المركز F ونصف القطر $R=3$ في : الدائرة ذات المركز H ونصف القطر $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$



تصحيح التمرين الثالث ☺☺☺☹: الرجوع إلى نص التمرين

لدينا النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب $z_A=2-3i$ ، $z_B=i$ و $z_C=6-i$

I. 1) حساب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$:

لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{i-(2-3i)}{6-i-(2-3i)}=\frac{-2+4i}{4+2i}\times\frac{4-2i}{4-2i}$ أي $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-8+4i+16i+8}{16+4}=\frac{20i}{20}=i$

إذن $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$

3) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=|i|=1$ وبالتالي $\frac{AB}{AC}=1$ أي $AB=AC$

و $arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

طبيعةالمثلث ABC : قائم في النقطة A ومتساوي الساقين

II. لدينا : $z'=\dfrac{i(z-2+3i)}{z-i}$

1) تعيين لاحقة النقطة D' صورة النقطة D بالتطبيق f:

لدينا : $f(D)=D'$ يعني $z_{D'}=\dfrac{i(z_D-2+3i)}{z_D-i}=\dfrac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i}=\dfrac{i(-1+2i)}{1-2i}=\dfrac{-i-2}{1-2i}\times\dfrac{1+2i}{1+2i}$

ومنه : $z_{D'}=\dfrac{-i-2}{1-2i}\times\dfrac{1+2i}{1+2i}=\dfrac{-i+2-2-4i}{5}=\dfrac{-5i}{5}=-i$

لاحقةالنقطة D' صورة النقطة D بالتطبيق f هي : $z_{D'}=-i$

2) أ) تبيان أنه توجد نقطة وحيدة E سابقة النقطة E' ذات اللاحقة $z_{E'}=2i$ بالتطبيق f:

لدينا : $f(E)=E'$ يعني $z_{E'}=\dfrac{i(z_E-2+3i)}{z_E-i}$ ومنه $2i=\dfrac{i(z_E-2+3i)}{z_E-i}$

وبالتالي $2=\dfrac{z_E-2+3i}{z_E-i}$ أي $2(z_E-i)=z_E-2+3i$ مع $z_E-i\neq 0$

إذن : $2z_E-2i=z_E-2+3i$ مع $z_E-i\neq 0$

ومنه $z_E=-2+5i$

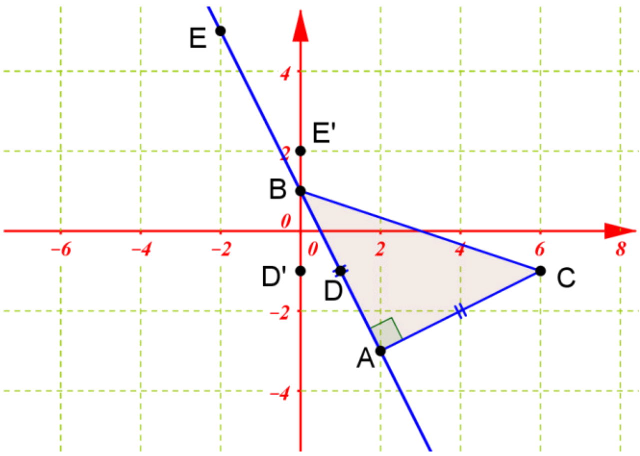
توجد نقطة وحيدة E سابقة النقطة E' ذات اللاحقة $z_{E'}=2i$ بالتطبيق f ذات اللاحقة $z_E=-2+5i$

ب) **تبيان أنّ النقطة E تنتمي إلى المستقيم (AB):**

لدينا : $\dfrac{z_E-z_A}{z_B-z_A}=\dfrac{-2+5i-(2-3i)}{i-(2-3i)}=\dfrac{-4+8i}{-2+4i}=\dfrac{2(-2+4i)}{-2+4i}=2$ ومنه $\dfrac{z_E-z_A}{z_B-z_A}=2$

أي العدد $\dfrac{z_E-z_A}{z_B-z_A}$ حقيقي وبالتالي النقط B,A و E في إستقامية .

النقط B,A و E في إستقامية يعني النقطة E تنتمي إلى المستقيم (AB)



3) البرهان أنه من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطة B فإنّ $OM'=\dfrac{AM}{BM}$:

لدينا : $z'=\dfrac{i(z-2+3i)}{z-i}$ ومنه $|z'|=\left|\dfrac{i(z-2+3i)}{z-i}\right|$ أي

$$|z'|=\frac{|i(z-2+3i)|}{|z-i|}=\frac{|i|\times|z-2+3i|}{|z-i|}=\frac{|i|\times|z-(2-3i)|}{|z-i|}$$

وبالتالي $OM'=\dfrac{AM}{BM}$

لأنّ
$$|z'|=OM'$$
$$|z-(2-3i)|=|z-z_A|=AM$$
$$|z-i|=|z-z_B|=BM$$
$$|i|=1$$

من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطة B فإنّ $OM'=\dfrac{AM}{BM}$

4) البرهان أنه من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطتين A و B فإنّ :

$$(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

لدينا : $z'=\dfrac{i(z-2+3i)}{z-i}$ ومنه $arg(z')=arg\left(\dfrac{i(z-2+3i)}{z-i}\right)$

أي $arg(z')=arg\left(i\left(\dfrac{z-2+3i}{z-i}\right)\right)=arg(i)+arg\left(\dfrac{z-2+3i}{z-i}\right)$

ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OM'})=\dfrac{\pi}{2}+(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})(2\pi)$

لأنّ
$$arg(z')=(\vec{u},\overrightarrow{OM'})$$
$$arg(i)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$$
$$arg\left(\frac{z-2+3i}{z-i}\right)=(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})$$

إذن من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن النقطتين A و B فإنّ :

$$(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})+\frac{\pi}{2}(2\pi)$$

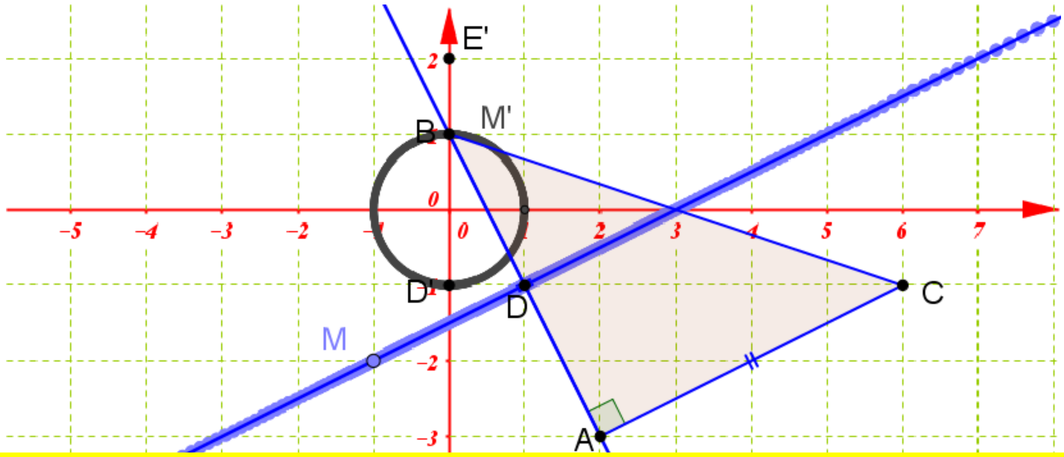
5) البرهان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة:

إذا كانت النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ يعني $AM=BM$

ومنه $\dfrac{AM}{BM}=1$

إذن $OM'=\dfrac{AM}{BM}=1$ وبالتالي $OM'=1$

ومنه النقطة M' تنتمي إلى دائرة مركزها المبدأ O ونصف قطرها $r=1$



6) البرهان أنه إذا كانت النقطة M' تنتمي إلى محور الأعداد التخيلية الصرفة ماعدا النقطة B فإن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB):

لدينا : $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)+\frac{\pi}{2}(2\pi)$

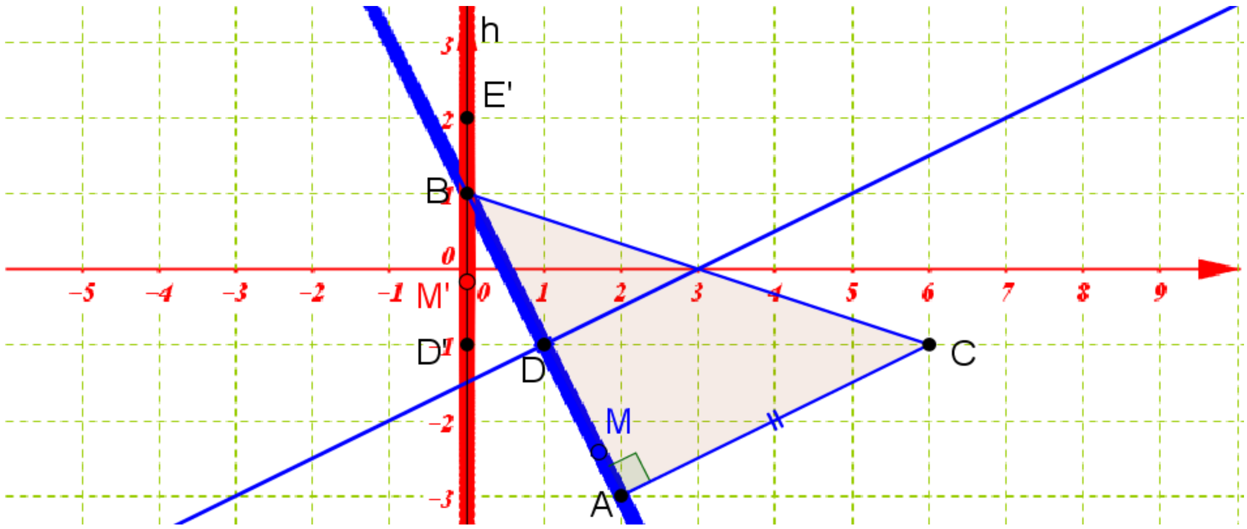
إذا كانت النقطة M' تنتمي إلى محور الأعداد التخيلية مع $M'\neq B$ يعني z' تخيلي صرف

ومنه $arg(z')=\frac{\pi}{2}(2\pi)$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$

وبالتالي $\frac{\pi}{2}=\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)+\frac{\pi}{2}(2\pi)$

أي أنَ : $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ ومنه النقط B,A و M في إستقامية .

إذا كانت النقطة M' تنتمي إلى محور الأعداد التخيلية الصرفة ماعدا النقطة B فإن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB)



👍 تصحيح التمرين الرابع ☺☹☺ : الرجوع إلى نص التمرين

الجزء الأول :

لدينا: g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=(\ln x)^2-\ln x+1$.

1) حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(\ln x)^2-\ln x+1\right]=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2\left[1-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}\right]=+\infty$$

لأن :

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{(\ln x)^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}\left[(\ln x)^2-\ln x+1\right]=\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^2\left[1-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{(\ln x)^2}\right]=+\infty$$

لأن :

$$\lim_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(\ln x)^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$$

2) تبيان أنّ $g'(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{x}$ من أجل كل عدد حقيقي $x>0$:

لدينا : $g'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x-1}{x}$ أي $g'(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ لدينا : $g'(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{x}$

3) استنتاج إتجاه تغير الدالة g :

دراسة إشارة المشتقة :

$g'(x)=0$ يعني $\dfrac{-1+2\ln x}{x}=0$ ومنه $-1+2\ln x=0$ و $x>0$

أي $\ln x=\dfrac{1}{2}$ ومنه $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

جدول إشارة المشتقة :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{e};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]0;\sqrt{e}\right]$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

4) إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]0;+\infty\right[$:

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	

من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>0$ لدينا : $g(x)>0$

الجزء الثاني :

لدينا : f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left]0;+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=x-\dfrac{(\ln x)^2+\ln x}{x}$

1) تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ثمّ تفسير النتيجة هندسيا :

لدينا : $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{(\ln x)^2+\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2\left[\frac{x}{(\ln x)^2}-\frac{1+\frac{1}{\ln x}}{x}\right]=+\infty$$

لأنَ :
$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{(\ln x)^2}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

التفسير الهندسي للنتيجة :

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$

2) أ) البرهان أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$:

نضع $\sqrt{x}=t$ ومنه $x=t^2$ عندما $x\to+\infty$ فإنّ $t\to+\infty$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln t)^2}{t^2}=\lim_{x\to+\infty}4\times\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

ب)استنتاج $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\frac{(\ln x)^2+\ln x}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{(\ln x)^2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ج) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\frac{(\ln x)^2+\ln x}{x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{(\ln x)^2+\ln x}{x}\right]$

أي $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{\ln x}{x}\right]=0$

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$ ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$

د) دراسة الوضع النسبي للمنحني $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y=x-\frac{(\ln x)^2}{x}-\frac{\ln x}{x}-x=-\frac{(\ln x)^2+\ln x}{x}$

وبالتالي إشارة الفرق $f(x)-y$ عكس إشارة $(\ln x)^2+\ln x$

دراسة شارة $(\ln x)^2+\ln x$:

$(\ln x)^2+\ln x=0$ يكافئ $(\ln x+1)\times\ln x=0$

إما $\ln x+1=0$ أو $\ln x=0$

ومنه $x=e^{-1}$ أو $x=1$

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$(\ln x)^2+\ln x$	‖	+	0	-	0	+	
$f(x)-y$	‖	-	0	+	0	-	

الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

إذا كان $x \in]0;e^{-1}[\cup]1;+\infty[$ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ تحت المستقيم (Δ).

إذا كان $x \in]e^{-1};1[$ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ فوق المستقيم (Δ).

إذا كان $x = e^{-1}$ أو $x = 1$ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقطع المستقيم (Δ).

3) أ) بين أنه من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{x^2 + g(x)}{x^2}$:

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(2 \times \frac{1}{x} ln\, x + \frac{1}{x}\right) \times x - 1\left((ln\, x)^2 + ln\, x\right)}{x^2} = \frac{x^2 - 2\,ln\, x - 2 + (ln\, x)^2 + ln\, x}{x^2}$$

ومنه : $f'(x) = \dfrac{x^2 + (ln\, x)^2 - ln\, x - 1}{x^2} = \dfrac{x^2 + g(x)}{x^2}$

من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{x^2 + g(x)}{x^2}$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $x^2 + g(x)$

من اجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $g(x) > 0$ و $x^2 > 0$

ومنه : $x^2 + g(x) > 0$

أي من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x) > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4) أ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 0 \times (x-1) + 1 = 1$$

معادلة ديكارتية للمماس (T) هي : $y = 1$

ب)تبيان أنّ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0.3<\alpha<0.35$:

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0.3;0.35]$ ولدينا :

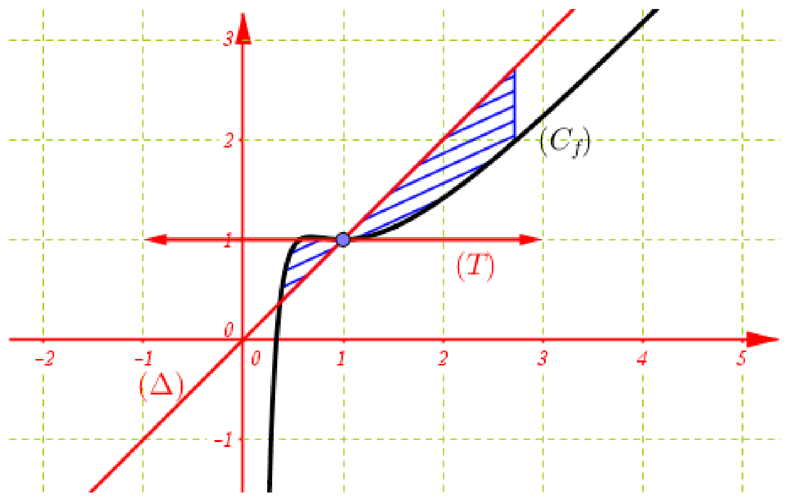
$$f(0.3)=0.3-\frac{(ln(0.3))^2+ln(0.3)}{0.3}=-0.52$$ و $$f(0.35)=0.35-\frac{(ln(0.35))^2+ln(0.35)}{0.35}=0.2$$

أي $f(0.3)\times f(0.35)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3<\alpha<0.35$.

ومنه المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0.3<\alpha<0.35$

ج) رسم (T) ، (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$:



5) أ) تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير:

الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل مجموعة من الدوال الأصلية على المجال $]0;+\infty[$ وهي

الدوال F حيث : $F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x-\frac{(ln\,x)^2}{x}-\frac{ln\,x}{x}\right)dx$

أي $F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}(ln\,x)^3-\frac{1}{2}(ln\,x)^2+k\quad(k\in\mathbb{R})$

ومنه الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغير :

$F(1)=0$ أي $F(1)=\frac{1}{2}(1)^2-\frac{1}{3}(ln1)^3-\frac{1}{2}(ln1)^2+k=0$

ومنه : $\frac{1}{2}+k=0$ أي $k=-\frac{1}{2}$

الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 للمتغيرهي

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}(ln\,x)^3-\frac{1}{2}(ln\,x)^2-\frac{1}{2}$$

ب)حساب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=e^{-1}$ و $x=e$:

$$A = \int_{e^{-1}}^{1} \left[f(x) - x \right] \, dx + \int_{1}^{e} \left[x - f(x) \right] \, dx$$

أي $A = \left[F(x) - \frac{1}{2}x^2 \right]_{e^{-1}}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^2 - F(x) \right]_{1}^{e}$ ومنه

$$A = \left(F(1) - \frac{1}{2} \right) - \left(F\left(e^{-1}\right) - \frac{1}{2}e^{-2} \right) + \left(\frac{1}{2}e^2 - F(e) \right) - \left[\frac{1}{2} - F(1) \right]$$

ولدينا : $F(1) = \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{3}(ln1)^3 - \frac{1}{2}(ln1)^2 - \frac{1}{2} = 0$

$$F\left(e^{-1}\right) = \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{3}\left(ln\, e^{-1}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(ln\, e^{-1}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{2}{3}$$

$$F(e) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}(ln\, e)^3 - \frac{1}{2}(ln\, e)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{4}{3}$$

أي $A = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-2} \right) + \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}e^2 \right) - \frac{1}{2} = \left(-1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) us$

ومنه $A = 1cm^2$

☜ **الأستاذ ثابت إبراهيم نرجو منكم دعوة خالصة للوالدين وللأهل ولي** ❀ ❀