الطرائق

1 كيف يتم تعيّن المعادلة الديكارتية لمستوٍ ؟

⊲ **الطريقة**

1. **بمعرفة $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي و A نقطة من المستوي $\mathcal{P}$** :
لهذا المستوي معادلة من الشكل: $ax+by+cz+d=0$
النقطة A تسمح بتعيين العدد الحقيقي d.
2. **بمعرفة ثلاثة نقط A، B و C** :
(أ) نتحقق أنّ هذه النقط ليست على استقامة واحدة.
(ب) نعيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}(a;b;c)$ للمستوي (ABC):
الثلاثية $(a;b;c)$ هي حل للجملة $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$

⊲ **التطبيق الأول:**

1. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathcal{P}$ الذي يشمل النقطة $A(-1;0;4)$ و حيث $\vec{n}(3;4;1)$ شعاع ناظمي لهُ.
2. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي $\mathcal{P}'$ الموازي للمستوي ذو المعادلة $2x-3y+z-5=0$ و الذي يشمل النقطة $A(-1;2;7)$.
3. عيّن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) مع: $A(-1;0;4)$ ، $B(0;-5;1)$ و $C(3;-1;2)$

2 كيف يتم تعيّن التمثيل الوسيطي لمستقيم ؟

⊲ **الطريقة**

بمعرفة شعاع توجيه $\vec{n}(a;b;c)$ لمستقيم $\mathcal{D}$ و نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ منه فإن لهذا المستقيم التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=x_A+at\\ y=y_A+bt\\ z=z_A+ct\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

⊲ **التطبيق الثاني:**

نعتبر النقط: $A(1;-2;3)$ ، $B(0;0;1)$ و $C(2;-5;5)$
عيّن تمثيلا وسيطيا:
1. للمستقيم (AB).
2. لنصف المستقيم $[BC)$
3. للقطعة المستقيمة $[AC]$

3 كيف يتم تعيّن تقاطع مستويين ؟

⊲ **الطريقة**

ليكن $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ شعاعان ناظميين للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ على الترتيب
1. إذا كان $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ مرتبطين خطيا فإنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان.
لتحديد الوضعية بدقّة : نُعيّن نقطة A من المستوي $\mathcal{P}_1$؛
(أ) إذا كان $A\in\mathcal{P}_2$ فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ منطبقان
(ب) إذا كان $A\notin\mathcal{P}_2$ فإنّ $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيان تماما (أو منفصلان)
2. إذا كان $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ المستويين $_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان و تقاطعُهما مستقيم.
لتعيين تمثيل وسيطي لهذا المستقيم : نحل الجملة التي تشمل معادلتي المستويين و نختار إحداثية من الإحداثيات كوسيط.

◁ **التطبيق الثالث:**

نعتبر المستويات $\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ التي معادلاتها :

$$\mathcal{P}_1:\ 2x-y-2z-1=0$$
$$\mathcal{P}_2:\ -x+4y+z-3=0$$
$$\mathcal{P}_3: 4x-2y-4z-5=0$$

أدرس الوضعية النسبية للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$، ثم للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_3$

2 كيف يتم تعيّن تقاطع مستقيمين ؟

◁ **الطريقة**

ليكن $\overrightarrow{u_1}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}_1$ و $\overrightarrow{u_2}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}_2$

1. إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان.
   لتحديد الوضعية بدّقة: نُعيّن نقطة A من المستقيم $\mathcal{D}_1$:
   (أ) إذا كان $A\in\mathcal{D}_2$ فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ منطبقان
   (ب) إذا كان $A\notin\mathcal{D}_2$ فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ متوازيان تماما (أو منفصلان)
2. إذا كان $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطيا فإنّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ هما إمّا متقاطعان و إمّا ليسا من مستوٍ واحد.

لتحديد الوضعية بدّقة: نفرض التقاطع، و في حالة الإجابة بالنفي فالمستقيمين ليسا من مستوٍ واحد

◁ **التطبيق الرابع:**

نعتبر المستقيمات $\mathcal{D}_1$ ، $\mathcal{D}_2$ و $\mathcal{D}_3$ الممثلة وسيطيا بما يلي

$$\mathcal{D}_1:\begin{cases}x=t\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}\quad،\quad \mathcal{D}_2:\begin{cases}x=1+s\\y=-1-2s\\z=3+s\end{cases}\quad و\quad \mathcal{D}_3:\begin{cases}x=-7+7k\\y=4-3k\\z=-1+2k\end{cases}$$

مع t، s و k أعداد حقيقية.

أدرس تقاطع المستقيمين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ ؛ $\mathcal{D}_2$ و $\mathcal{D}_3$ ثمّ $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_3$

2 كيف يتم تعيّن تقاطع مستقيم و مستوٍ ؟

◁ **الطريقة**

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم $\mathcal{D}$ و $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي $\mathcal{P}$

1. إذا كان $\vec{n}\cdot\vec{n}=0$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متوازيان.
   لتحديد الوضعية بدّقة: نُعيّن نقطة A من المستقيم $\mathcal{D}$:
   (أ) إذا كان $A\in\mathcal{P}$ فإنّ $\mathcal{D}$ محتوى في $\mathcal{P}$
   (ب) إذا كان $A\notin\mathcal{P}$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متوازيان تماما.
2. إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$ فإنّ $\mathcal{D}$ و $\mathcal{P}$ متقاطعان في نقطة.
   لتعيين هذه النقطة: نُعوض، في معادلة المستوي $\mathcal{P}$ ، x، y و z بالإحداثيات الوسيطية للمستقيم $\mathcal{D}$، نحصل عندئذ على قيمة الوسيط التي تسمح بتعيين إحداثيات نقطة التقاطع.

◁ **التطبيق الخامس:**

ليكن المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $x-y+z=5$ و المستقيمين

$\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ الممثلين وسيطيا بما يلي

$$\mathcal{D}_1:\begin{cases}x=-8+2t\\ y=-4+t\\ z=9-t\end{cases} \quad \text{و} \quad \mathcal{D}_2:\begin{cases}x=-8+2t\\ y=6-t\\ z=9-t\end{cases}$$

مع t عدد حقيقي.

أدرس تقاطع المستقيم $\mathcal{D}_1$ مع المستوي $\mathcal{P}$، ثمّ $\mathcal{D}_2$ مع $\mathcal{P}$.

◁ **التطبيق السادس:**

نعتبر المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $x+2y+z-4=0$ و النقطة $A(1;0;-2)$.

1. عيّن شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي $\mathcal{P}$.
2. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\mathcal{D}$ الذي يشمل A و عمودي على $\mathcal{P}$.
3. استنتج إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي $\mathcal{P}$.

2 كيف يتم تعيّن تقاطع ثلاث مستويات ؟

◁ **الطريقة**

$\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ ثلاث مستويات

إذا وُجد مستويين متوازيين تماما فإن $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\emptyset$.

إذا كانت المستويات غير متوازية مثنى مثنى، نبحث عن d مستقيم تقاطع المستويين $_1$ و $\mathcal{P}_2$:

(أ) إذا كان $d\subset\mathcal{P}_3$ فإنّ $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=d$.

(ب) إذا كان d و $\mathcal{P}_3$ متقاطعان في نقطة A فإن $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\{A\}$

(جـ) إذا كان d و $\mathcal{P}_3$ متوازيان تماما فإن $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2\cap\mathcal{P}_3=\emptyset$

◁ **التطبيق السابع:**

نعتبر المستويات $\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ التي معادلاتها :

$$\mathcal{P}_1:\ x+y-2z+1=0$$
$$\mathcal{P}_2: 3x+y-z+1=0$$
$$\mathcal{P}_3: -2x-2y+4z-1=0$$

أدرس تقاطع المستويات $\mathcal{P}_1$ ، $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$

التمرين الأول

⏲ 40 دقيقة

مسقط نقطة على مستقيم
مسقط نقطة على مستو

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستوي $\mathcal{P}$ ذو المعادلة $2x+y-z+7=0$ و النقط:

$A(-3;1;2)$، $B(-1;3;1)$ و $C(4;1;-2)$

1. أثبت أنّ النقطة A تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$
   عيّن جملة معادلات وسيطية للمستقيم (AB)
2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $\mathcal{Q}$ المّار بالنقطة C و العمودي على المستقيم (AB)
3. عيّن جملة معادلات وسيطية للمستقيم d المّار بالنقطة C و العمودي على المستوي $\mathcal{P}$
4. ليكن H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي $\mathcal{P}$ و K المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB). عيّن إحداثيات النقطتين H و K
5. أثبت أنّ $CH=3\sqrt{6}$ و $CK=\sqrt{29}$

التمرين الثاني

⏲ 40 دقيقة

تعيين المسقط العمودي لنقطة على مستقيم
حجم رباعي الوجوه

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. النقط :

$A(1;2;3)$، $B(4;2;-1)$ و $C(-2;3;0)$

1. تحقق أنّ النقط O، B و C ليست في استقامية و أنّ $3x+2y+16z=0$ هي معادلة للمستوي (OBC)
2. (أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OC)
   (ب) عيّن إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (OC)
   (جـ) احسب $OC\times HB$
3. (أ) احسب المسافة بين النقطة A و المستوي (OBC)
   (ب) استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

التمرين الثالث

⏲ 40 دقيقة

تقاطع مستويين
المسافة بين مستقيمين
تعيين مجموعة نقط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. نعتبر النقطة A ذات الإحداثيات $(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}$ ذو المركبات $(1;5;-1)$
   عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) المار بالنقطة A و حيث الشعاع $\vec{u}$ هو شعاع توجيه له
2. نعتبر المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ذوا المعادلتين $x-y-z=7$ و $x-2z=11$ على الترتيب.
   (أ) أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d') مستقيم تقاطع $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$
   (ب) أثبت أنّ الشعاع ذو الإحداثيات $(2;1;1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (d')
3. أثبت أنّ المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي
4. نعتبر النقطة H ذات الإحداثيات $(-3;3;5)$ و النقطة (H') ذات الإحداثيات $(3;0;-4)$
   (أ) تحقق أنّ H تنتمي إلى (d) و أنّ H' تنتمي إلى (d')
   (ب) أثبت أنّ المستقيم (HH') هو عمودي على كل من المستقيمين (d) و (d')
   (جـ) أحسب المسافة بين المستقيمين (d) و (d') أي المسافة HH'
5. عيّن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{MH'}\cdot\overrightarrow{HH'}=126$

التمرين الرابع

⏲ 40 دقيقة

تقاطع مستويين

تقاطع سطح كرة و مستو

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط :

$A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. (أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثمّ الطويلتين AB و AC

(ب) استنتج قيمة مقربة إلى الدرجة لقيس الزاوية $\widehat{AB}$

(جـ) استنتج أنّ النقط A، B و C ليست في استقامة واحدة

2. تحقق أنّ المعادلة $2x-y+2z+2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. ليكن $\mathcal{P}_1$ المستوى ذو المعادلة $2x+2y-z+5=0$ و المستوى $\mathcal{P}_2$ ذو المعادلة

$4x-2y-5y-5=0$

أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان في مستقيم $\mathcal{D}$ حيث الجملة التالية هي تمثيلا وسيطيا له

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t-3 \\ z=2t+1 \end{cases}$$ مع عدد حقيقي

4. أثبت أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ عمودي على المستوي (ABC) ثمّ عيّن نقطة تقاطعهما

5. ليكن $(\mathcal{S})$ سطح كرة الذي يمسّ المستوي (ABC) في النقطة $D(-1;-2;-1)$ و حيث المسافة بين مركزه و المستوي (ABC) هي $d=3$. عيّن معادلة ديكارتية لـ $(\mathcal{S})$

التمرين الخامس

⏲ 45 دقيقة

تقاطع مستقيم و مستو

تعيين مجموعة نقط

تقاطع سطح كرة و مستو

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$

1. أثبت أنّ النقط A، B و C ليست في استقامية

2. ليكن $\mathcal{D}$ المستقيم المُمثل وسيطيا بالجملة:

$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})\square$$

(أ) أثبت أنّ المستقيم $\mathcal{D}$ عمودي على المستوي (ABC)

(ب) عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم (ABC)

3. ليكن H نقطة تقاطع المستقيم $\mathcal{D}$ و المستوي (ABC)

(أ) أثبت أنّ H هو مرجح النقط $(A;-2)$، $(B;-1)$ و $(C;2)$

(ب) عيّن طبيعة المجموعة Γ_1 للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

مع تحديد العناصر المميزة لهذه المجموعة

(جـ) عيّن طبيعة المجموعة Γ_2 للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}\square$

مع تحديد العناصر المميزة لهذه المجموعة

(د) عيّن طبيعة و العناصر المميزة لتقاطع المجموعتين Γ_1 و Γ_2

(هـ) هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي إلى تقاطع المجموعتين Γ_1 و Γ_2